УДК 517.9

РОЗВИТОК СПЕКТРАЛЬНОГО МЕТОДУ ШТУРМА – ЛІУВІЛЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ БІГАРМОНІЧНОГО РІВНЯННЯ

В. П. Ревенко

Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України
Україна, 79601, Львів, вул. Наукова, 3б
e-mail: igor@iapmm.lviv.ua
adm@iapmm.lviv.ua

We give a generalization of the Sturm – Liouville spectral method for solving the biharmonic equation. The characteristic equation for finding eigen values was studied and eigen functions were obtained. We find the strain-stress state (SSS) for a rectangular plate loaded on the sides with arbitrary strains. A representation of the SSS for an arbitrary external load as a series with respect to the eigen functions was obtained. A method of integral moments for finding the series coefficients is proposed. The Saint-Venan method was verified.

Узагальнено спектральний метод Штурма – Ліувілля для розв'язування бігармонічного рівняння. Досліджено характеристичне рівняння для визначення власних значень і побудовано власні функції. Знайдено напружено-деформований стан (НДС) прямокутної пластини, навантаженої на сторонах довільними зусиллями. Отримано подання НДС при довільному зовнішньому навантаженні у вигляді ряду за власними функціями. Запропоновано метод інтегральних моментів для знаходження коефіцієнтів ряду. Підтверджено принцип Сен-Венана.

Вступ. Значні результати математичної фізики, отримані при розв'язуванні рівнянь з частинними похідними другого порядку, пов'язані із застосуванням спектрального методу Штурма – Ліувілля [1, 2]. При безпосередньому використанні цього методу для розв'язування бігармонічного рівняння виникають значні проблеми математичного та обчислювального характеру [3 – 5]. А саме, не вдається побудувати ортонормовану систему функцій, пов'язану із крайовою задачею для бігармонічного рівняння, не розроблено ефективні методи одночасного задоволення двох граничних умов однією системою часткових розв'язків та ін.

Запропонований підхід застосуємо до розв'язування крайової задачі для бігармонічного рівняння у прямокутній області [3 – 5]. Така проблема зустрічається в багатьох розділах математичної фізики. При певних граничних умовах така задача фізично буде відповідати плоскій задачі теорії пружності. Тому граничні умови і термінологію будемо використовувати з теорії пружності [3, 4]. Розглянемо плоску задачу теорії пружності у прямокутній області $S = \{(x, y) \in [0, a] \times [-b, b]\}$ за відсутності масових сил, яка полягає у розв'язуванні бігармонічного рівняння

$$\nabla^2\nabla^2\Phi\,(x, y) = 0, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{1}$$

на введену функцію напружень $\Phi\,(x, y)$ [3 – 5]. Такі задачі розглядалися, зокрема, в [3 – 6]. В [5] наведено огляд літератури, присвяченої методам розв'язування бігармонічного рівняння у прямокутній області. Проте проблема побудови наближеного із заданою точністю аналітичного розв'язку для довільного навантаження на сторонах прямоку-ної пластини залишилася невирішеною. Вирішенню цієї важливої проблеми, а також розвитку ідей методу Штурма – Ліувілля, які вперше було висунуто в роботі [7], присвячується дана стаття.

1. Знаходження розв'язку методом розвинення в ряд за власними функціями. Для того щоб знайти напружено-деформований стан (НДС) прямокутної пластини, потрібно розв'язати бігармонічне рівняння (1) при заданих граничних умовах в напруженнях [3, 4]. Через введену функцію напружень $\Phi(x, y)$ нормальні та дотичні напруження виражаються у вигляді

$$\sigma_x(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi(x,y), \ \sigma_y(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(x,y), \ \tau_{xy} = \tau(x,y) = -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\Phi(x,y). \tag{2}$$

Нехай на контурі прямокутника L задано довільні нормальні і дотичні напруження σ_g, τ_g:

$$\sigma_n(x,y)|_L = \sigma_g|_L, \quad \tau_n(x,y)|_L = \tau_g|_L, \tag{3}$$

де функції $\sigma_g, \tau_g \in L_2[L]$. Внаслідок громіздкості алгоритм пошуку бігармонічної функції напружень $\Phi(x, y)$, яка задовольняє граничні умови (3), зведемо до послідовності таких кроків.

I крок. Розіб'ємо загальні граничні умови (3) на дві частини: А) на горизонтальних сторонах прямокутної пластини немає зовнішніх навантажень

$$\sigma_y(x, \pm b) = 0, \quad \tau(x, \pm b) = 0, \quad x \in [0, a], \tag{4}$$

на вертикальних сторонах задано граничні умови (3); Б) навпаки, на вертикальних сторонах прямокутника немає зовнішніх навантажень, на горизонтальних сторонах задано граничні умови (3). Враховуючи ідентичність задач А і Б, в подальшому будемо розглядати задачу А. Умови (4) задають крайову задачу для методу Штурма – Ліувілля. Якщо функція напружень задовольняє граничні умови (4), то будемо називати її власною функцією.

II крок. Знаходження власних значень і власних функцій. Згідно з відомим принципом Сен-Венана [3] розв'язок задачі А також розіб'ємо на дві частини:

1) однорідний НДС, який відповідає прикладеним до пластини рівномірно розподіленим зовнішній нормальній T_x і зсувній Q_x силам, а також згинному моменту M_x [3]:

$$\sigma_x(x_j, y) = \frac{T_x}{S} + 6\chi y (M_x + x_j Q_x), \qquad \tau(x_j, y) = -3\chi Q_x \left(y^2 - b^2\right), \ j = 1, 2,$$

де $S = 2bh$, h — товщина пластини, $\chi = \dfrac{1}{4b^3 h}$, $x_1 = 0$, $x_2 = a$, значення індексу $j = 1$ відповідає лівій, а $j = 2$ — правій вертикальній стороні пластини;

2) НДС від самозрівноважених зовнішніх напружень, який ще називається „збуреним" НДС; його також розіб'ємо на дві частини:

а) НДС від самозрівноважених зусиль, прикладених на лівій стороні:

$$\sigma_x(0,y) = \sigma_1(y), \quad \tau(0,y) = \tau_1(y), \ \sigma_x(a,y) = 0, \quad \tau(a,y) = 0; \tag{5 а}$$

б) НДС від самозрівноважених зусиль, прикладених на правій стороні пластини:

$$\sigma_x(a,y) = \sigma_2(y), \quad \tau(a,y) = \tau_2(y), \quad \sigma_x(0,y) = 0, \quad \tau(0,y) = 0, \tag{5б}$$

де $\sigma_1(y)$, $\tau_1(y)$ (відповідно $\sigma_2(y)$, $\tau_2(y)$) — відомі зовнішні напруження, на які накладають умови самозрівноваженості і коректні фізичні умови

$$\tau_j(\pm b) = 0, \quad |\sigma_j(y)| < \infty, \ |\tau_j(y)| < \infty. \tag{6}$$

Розв'язок задачі 1 є відомим, його визначає функція напружень

$$\Phi_0(x,y) = \frac{T_x}{2S}y^2 + \chi M_x y^3 + 3\chi Q_x xy\left(\frac{1}{3}y^2 - b^2\right). \tag{7}$$

Функція $\Phi_0(x,y)$ є власною і відповідає нульовому значенню спектрального параметра β. Розв'язок задачі 2 подамо методом відокремлення змінних у вигляді ряду

$$\Phi(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Re}\{[b_k^1\cos(\beta_k y) + a_k^1\sin(\beta_k y) + y\left(g_k^1\cos(\beta_k y) + c_k^1\sin(\beta_k y)\right)]\exp(-\beta_k x) +$$

$$+ \ [b_k^2\cos(\beta_k y) + a_k^2\sin(\beta_k y) + y\left(g_k^2\cos(\beta_k y) + c_k^2\sin(\beta_k y)\right)]\exp(\beta_k x)\}, \tag{8}$$

де $\beta_k \in \mathbb{C}$ — власні значення, для яких окремі розв'язки (8) задовольняють граничні умови (4), $a_k^j, \ b_k^j, \ g_k^j, \ c_k^j$ — невідомі комплексні коефіцієнти.

Розглянемо задачу 2а. Спочатку припустимо, що пластина за змінною x є достатньо „довгою", тобто такою, що зовнішні „збурені" зусилля, прикладені до однієї сторони пластини ($x = 0$), практично не викликають появи „збуреного" НДС на протилежній стороні. У цьому випадку $a >> b$, і таку пластину будемо називати „довгою". З фізичних міркувань випливає, що окремий частковий розв'язок у поданні (8) буде мати вигляд

$$\Phi(x,\beta y) = \mathrm{Re}\{[b\cos(\beta y) + a\sin(\beta y) + y\left(g\cos(\beta y) + c\sin(\beta y)\right)]\exp(-\beta x)\}, \tag{9}$$

де $\mathrm{Re}(\beta) > 0$, $a, \ g, \ c, \ b$ — невідомі комплексні коефіцієнти.

Виражаючи напруження (2) через функцію (9) і підставляючи в граничні умови (4), одержуємо систему чотирьох лінійних рівнянь відносно невідомих комплексних коефіцієнтів a, g, c, b з нульовими правими частинами. Як відомо, відмінний від нуля розв'язок такої системи можливий тільки за умови рівності нулю визначника цієї системи. Якщо розкрити цей визначник, то отримаємо характеристичне рівняння для визначення власних спектральних значень β у вигляді [5]

$$F^{\pm}(z) = \sin(2z) \pm 2z = 0, \tag{10}$$

де $z = b\beta$. Характеристичне рівняння (10) визначає власні значення при знаходженні НДС прямокутної пластини.

Теорема 1. *Функція* $F^+(z)$ *має зліченну кількість нулів* $z_k = R\beta_k$.

Доведення. Із означення порядку функції [8] випливає, що функція $F^{+}(z)$ є цілою функцією порядку 1. Покладемо $z = \sqrt{\zeta}$. Функція $F^{+}\left(\sqrt{\zeta}\right)/\sqrt{\zeta}$ стосовно комплексної змінної ζ є функцією порядку $\dfrac{1}{2}$. З теореми 5 [8, с. 268] випливає твердження теореми 1. Аналогічно доводиться теорема для $F^{-}(z)$.

Всі корені рівнянь (10) (крім $\beta_0 = 0$) є комплексно-спряженими і розташовані дискретно на чотирьох гілках, що прямують у нескінченність в своїх квадрантах. Наведемо асимптотичні значення знайдених коренів:

$$\operatorname{Re} z_k \approx \frac{A_k}{4} - \frac{\ln A_k}{A_k} + O\left(\frac{\ln A_k}{A_k}\right)^2, \ \operatorname{Im} z_k \approx \frac{\ln A_k}{2} + \frac{\ln^2 A_k}{A_k^2} - 2\frac{\ln A_k}{A_k^2}, \tag{11}$$

де $A_k = \pi(4k \mp 1)$.

Розмістимо корені z_k, а отже, і β_k в порядку зростання їхніх дійсних частин. Введемо безрозмірну змінну γ, $y = b\gamma$. Після підстановки функції напружень (9) у граничні умови (4) і використання залежності (10) знайдемо явний вигляд власних функцій: для знаку „+"

$$\Phi_k(x, z_k\gamma) = b\operatorname{Re}\{g_k\varphi_k(\gamma)\exp(-\beta_k x)\}, \ \ k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{12}$$

де $\varphi_k(\gamma) = \gamma\sin(z_k\gamma) - tg(z_k)\cos(z_k\gamma)$, g_k — довільний комплексний коефіцієнт; для знаку „−"

$$\Psi_k(x, z_k\gamma) = b\operatorname{Re}\{a_k\psi_k(\gamma)\exp(-\beta_k x)\}, \ \ k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{13}$$

де $\psi_k(\gamma) = -\operatorname{ctg}(z_k)\sin(z_k\gamma) + \gamma\cos(z_k\gamma)$, a_k — довільний комплексний коефіцієнт. Легко перевірити, що власні функції (12) визначають відносно змінної y парні напруження σ_x, непарні дотичні напруження τ (задача „розтягу-стиску"), а власні функції (13) — непарні напруження σ_x, парні дотичні напруження τ (задача „згину"). Як бачимо, задачі 2а, 2б також розпадаються на дві частини.

III крок. У подальшому будемо розглядати задачу „розтягу-стиску". Підставивши власні функції (12) у співвідношення (2), одержимо напруження у вигляді

$$\begin{gathered}\sigma_y(x,\gamma) = \operatorname{Re}\{bg_k\beta_k^2\varphi_k(\gamma)\exp(-\beta_k x)\}, \ \sigma_x(x,\gamma) = \operatorname{Re}\{bg_k\beta_k^2\chi_k(\gamma)\exp(-\beta_k x)\}, \\ \tau(x,\gamma) = \operatorname{Re}\{bg_k\beta_k^2\psi_k(\gamma)\exp(-\beta_k x)\},\end{gathered} \tag{14}$$

де $\chi_k(\gamma) = \left[\dfrac{1}{z_k} - \operatorname{ctg}(z_k)\right]\cos(z_k\gamma) - \gamma\sin(z_k\gamma)$. Легко перевірити такі залежності: $\psi_k'(\gamma) = z_k\chi_k(\gamma)$, $\psi_k(1) = \psi_k(-1) = 0$.

Означення. *Будемо називати функцію напружень сен-венанівською, якщо виражені через неї нормальні і дотичні напруження мають на кожній стороні прямокутника нульові інтегральні нормальну T_n і зсувну Q_t сили, а також нульовий згинний момент M_n.*

При розв'язуванні задачі 2 потрібно будувати функції напружень (9) таким чином, щоб вони були сен-венанівськими. Легко показати, що власна функція напружень $\Phi_0(x, y)$, яка описує самозрівноважений НДС, не є сен-венанівською.

Теорема 2. *Кожна власна функція напружень (12) є сен-венанівською.*

Доведення. Теорему доведемо безпосереднім обчисленням нормальної T_x і зсувної Q_x сил та згинного моменту M_x. Врахувавши значення $\sigma_x(x,\gamma)$ (14), знайдемо інтегральне зусилля T_x, яке діє в будь-якому перерізі, паралельному боковій стороні пластини:

$$T_x = hb\int_{-1}^{1}\sigma_x(x,\gamma)\,d\gamma = hb\,\mathrm{Re}\{g_k\beta_k[\psi_k(1)-\psi_k(-1)]\exp(-\beta_k x)\} = 0.$$

Внаслідок парності напружень $\sigma_x(x,\gamma)$ за змінною γ одержимо $M_x = 0$, а внаслідок непарності дотичних напружень $\tau(x,\gamma)$ — $Q_x = 0$. Отже, на вертикальних сторонах прямокутника умови виконуються. На горизонтальних сторонах сен-венанівська умова виконується на підставі залежностей (2). Теорему доведено.

Із теореми випливає, що кожна власна функція напружень вигляду (9), (12) (крім $\Phi_0(x,y)$) відповідає самозрівноваженому зовнішньому навантаженню. Виконане нами розбиття на дві задачі є коректним і розбиває множину розв'язків на два відокремлених класи. Для набору розв'язків (9), (12) виконується принцип Сен-Венана, оскільки в ці розв'язки входить експоненціально згасаюча функція від x.

2. Розрахунок НДС „довгої" пластини (задача „розтягу-стиску"). Наведемо перші 6 комплексних коренів рівняння (10) для знаку „+" [6]:

$$z_1 = 2,106196 + 1,125364i,\ \ z_2 = 5,356268 + 1,551574i,\ \ z_3 = 8,536668 + 1,775543i,$$

$$z_4 = 11,69918 + 1,929404i,\ \ z_5 = 14,85406 + 2,046851i,\ \ z_6 = 18,00493 + 2,141890i,$$

де i — уявна одиниця. Для знаходження коренів $k > 6$ можна використати асимптотичну формулу (11). Загальна функція напружень для задач 1, 2 має вигляд

$$\Phi(x,\gamma) = \frac{T_x}{2S}(b\gamma)^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\Phi_k(x, z_k\gamma). \tag{15}$$

Враховуючи числові значення коренів $z_k = b\beta_k$, бачимо, що кожна функція напружень $\Phi_k(x, z_k\gamma)$ (12) швидко спадає за змінною x, відповідно спадає і НДС, який описується нею. Причому, чим більший номер власної функції, тим швидше вона спадає при віддаленні від лівої вертикальної сторони. Наприклад, функція Φ_1 зменшується в 100 разів на відстані $x \geqslant 2,2b$, а Φ_2 — на відстані $x \geqslant 0,85\,b$. Отже, вже при $a > 2,2b$ пластину можна розраховувати як „довгу". Таке швидке спадання НДС повністю відповідає принципу Сен-Венана.

Припустимо, що на лівій боковій стороні пластини ($x = 0$) прикладено відомі нормальні та дотичні напруження (5a). Граничні умови $\sigma_x(a,y) = 0,\quad \tau(a,y) = 0$ задовольняються тотожно, оскільки пластина вважається „довгою". Використавши співвідношення (14), подамо граничні умови (5a) у вигляді

$$\sigma_1(b\gamma) = \sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Re}\{(x_k+iy_k)\,\chi_k(\gamma)\},\quad \tau_1(b\gamma) = \sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Re}\{(x_k+iy_k)\,\psi_k(\gamma)\}, \tag{16}$$

де $x_k + iy_k = c_k = \dfrac{z_k^2 g_k}{b}$, $x_k,\ y_k$ — дійсна та уявна частини комплексного коефіцієнта c_k. Виділимо у функцій $\chi_k(\gamma)$, $\psi_k(\gamma)$ дійсну та уявну частини: $\chi_k(\gamma) = \chi_{rk}(\gamma) + i\chi_{yk}(\gamma)$, $\psi_k(\gamma) = \psi_{rk}(\gamma) + i\psi_{yk}(\gamma)$. Для знаходження невідомих коефіцієнтів $x_k,\ y_k$, а отже, і комплексних коефіцієнтів g_k модифікуємо метод інтегральних моментів [1]. Обмежимось у співвідношеннях (15), (16) скінченною кількістю N членів ряду. Оскільки окремі члени ряду (15) є розв'язками бігармонічного рівняння, то достатньо знайти невідомі коефіцієнти з умови мінімуму граничного відхилення знайденого розв'язку від зовнішніх навантажень (5). Відмітимо, що граничні умови на горизонтальних сторонах пластини задовольняються тотожно. Мірою наближення обрізаного розв'язку до точного є інтеграл квадратичного відхилення обрізаних напружень (16) від заданих зовнішніх зусиль на бокових сторонах (5):

$$\Psi\{x_1,\dots,x_N,y_1,\dots,y_N\} = \int\limits_0^1 \left\{ \left\{ \sum_{k=1}^{N} \left[x_k\chi_{rk}(\gamma) - y_k\chi_{yk}(\gamma)\right] - \sigma_1(b\gamma) \right\}^2 + \right.$$

$$\left. + \left\{ \sum_{k=1}^{N} \left[x_k\psi_{rk}(\gamma) - y_k\psi_{yk}(\gamma)\right] - \tau_1(b\gamma) \right\}^2 \right\} d\gamma. \tag{17}$$

Невідомі коефіцієнти $x_k,\quad y_k,\ k = \overline{1,N}$, визначимо із умови мінімуму функціонала (17). Для цього знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial\Psi\{x_1,\dots,x_N,y_1,\dots,y_N\}}{\partial x_j}, \qquad \frac{\partial\Psi\{x_1,\dots,x_N,y_1,\dots,y_N\}}{\partial y_j}, \qquad j = \overline{1,N},$$

і прирівняємо їх до нуля. Після громіздких обчислень інтегралів одержимо систему $2N$ лінійних рівнянь для визначення $2N$ невідомих

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N}\left\{x_k B_{k,j}^1 - y_k B_{k,j}^2\right\} &= \int\limits_0^1 [\sigma_1(\gamma)\,\chi_{rj}(\gamma) + \tau_1(\gamma)\,\psi_{rj}(\gamma)]d\gamma, \\ \sum_{k=1}^{N}\left\{x_k B_{k,j}^3 - y_k B_{k,j}^4\right\} &= \int\limits_0^1 [\sigma_1(\gamma)\,\chi_{yj}(\gamma) + \tau_1(\gamma)\,\psi_{yj}(\gamma)]d\gamma, \quad j = \overline{1,N}, \end{aligned} \tag{18}$$

де

$$B_{k,j}^1 = \mathrm{Re}\,(N_{k,j}), \quad B_{k,j}^2 = \mathrm{Im}\,(N_{k,j}), \quad N_{k,j} = P_1(k,j) + Q_1(k,j), B_{k,j}^3 = B_{j,k}^2,$$

$$B_{k,j}^4 = \mathrm{Re}\,(A_{k,j}), \quad A_{k,j} = P_2(k,j) + Q_2(k,j), \quad 2P_m(k,j) = D(z_k,\overline{z}_j) - (-1)^m D(z_k,z_j),$$

$$2Q_m(k,j) = M(z_k,\overline{z}_j) - (-1)^m M(z_k,z_j), \quad m = 1,2.$$

Функції $M\left(z,w\right),\ D\left(z,w\right)$ для значень аргументів $z\neq w$ знаходяться за формулами

$$M\left(z,w\right)=m(z)m(w)F_{1,1}\left(z,w\right)-m(z)G\left(w,z\right)-m(w)G\left(z,w\right)+F_{0,3}\left(z,w\right),$$

$$D\left(z,w\right)=n(z)n(w)F_{0,1}\left(z,w\right)-n(z)G\left(z,w\right)-n(w)G\left(w,z\right)+F_{1,3}\left(z,w\right),$$

$$F_{0,1}\left(z,w\right)=W\left(z,w\right)\left[z\sin\left(z\right)\cos\left(w\right)-w\sin\left(w\right)\cos\left(z\right)\right],$$

$$m(z)=\operatorname{ctg}\left(z\right),\quad n(z)=\frac{1}{z}-\operatorname{ctg}\left(z\right),$$

$$G\left(z,w\right)=W\left(z,w\right)\left[z\sin\left(z\right)\sin\left(w\right)+w\cos\left(w\right)\cos\left(z\right)\right]+$$

$$+W^{2}\left(z,w\right)\left[\left(z^{2}+w^{2}\right)\cos\left(z\right)\sin\left(w\right)-2zw\cos\left(w\right)\sin\left(z\right)\right],\quad W\left(z,w\right)=\frac{1}{z^{2}-w^{2}},$$

$$F_{0,3}\left(z,w\right)=F_{0,1}\left(z,w\right)+\frac{\cos(z+w)}{(z+w)^{2}}+\frac{\cos(z-w)}{(z-w)^{2}}-\frac{\sin(z+w)}{(z+w)^{3}}-\frac{\sin(z-w)}{(z-w)^{3}},$$

$$F_{1,3}\left(z,w\right)=F_{1,1}\left(z,w\right)-\frac{\cos(z+w)}{(z+w)^{2}}+\frac{\cos(z-w)}{(z-w)^{2}}+\frac{\sin(z+w)}{(z+w)^{3}}-\frac{\sin(z-w)}{(z-w)^{3}},$$

$$F_{1,1}\left(z,w\right)=W\left(z,w\right)\left[w\sin\left(z\right)\cos\left(w\right)-z\sin\left(w\right)\cos\left(z\right)\right].$$

Коефіцієнти $D\left(z_k,z_k\right),\quad M\left(z_k,z_k\right)$ знаходяться за формулами

$$D\left(z_k,z_k\right)=\frac{3}{2}\operatorname{ctg}^{2}\left(z_k\right)+\frac{7}{6},\quad M\left(z_k,z_k\right)=-\frac{1}{3}-\frac{\operatorname{ctg}\left(z_k\right)}{2z_k}.$$

Розв'яжемо систему лінійних рівнянь (18) чисельно і визначимо коефіцієнти $x_k,\quad y_k$, а отже, і комплексні коефіцієнти g_k, $k=\overline{1,N}$. Знайдемо інтеграл квадратичного відхилення $\Psi\left\{x_1,\ldots,x_N,y_1,\ldots,y_N\right\}$ (17) і порівняємо його з інтенсивністю дії зовнішнього навантаження

$$\Psi_0=\int\limits_0^1[\sigma_1\left(b\gamma\right)^2+\tau_1\left(b\gamma\right)^2]d\gamma.$$

Якщо відносне значення буде меншим, ніж $0,001$, то розв'язок знайдено; якщо відносне значення за модулем більше, ніж $0,001$, то збільшуємо кількість членів ряду N і повторно проводимо обчислення. Далі за формулами (2), (15) знаходимо НДС пластини.

3. Розрахунок НДС „короткої" ($a\leqslant 2,2b$) пластини (задача „розтягу-стиску"). В цьому випадку зовнішні „збурені" зусилля, прикладені до однієї сторони пластини ($x=$

$= 0$), викликають появу „збуреного” НДС на протилежній стороні. Загальну функцію напружень зручно подати у вигляді

$$\Phi(x,\gamma) = \frac{T_x}{2S}(b\gamma)^2 + b^2 \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}\{[g_k \exp(-\beta_k x) + q_k \exp(\beta_k(x-a))]\varphi_k(\gamma)\}, \tag{19}$$

де g_k, q_k — невідомі комплексні коефіцієнти. Граничні умови (5а), (5б) після об'єднання і використання функції напружень (19) набирають вигляду

$$\begin{gathered} \sigma_m(b\gamma) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}\{z_k^2[g_k \exp(-\beta_k(m-1)) + q_k \exp(\beta_k(m-2)a)]\chi_k(\gamma)\}, \\ \tau_m(b\gamma) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}\{z_k^2[g_k \exp(-\beta_k(m-1)) - q_k \exp(\beta_k(m-2)a)]\psi_k(\gamma)\}, \quad m = 1,2. \end{gathered} \tag{20}$$

Обмежимося у співвідношеннях (19), (20) скінченною кількістю N членів ряду. Введемо нові позначення невідомих $x_k + iy_k = z_k^2 g_k,\ \ x_{k+N} + iy_{k+N} = z_k^2 q_k,\ \ k = \overline{1,\ N}$. Для знаходження невідомих коєфіцієнтів $x_k,\ \ y_k,\ \ k = \overline{1,\ 2N}$, використаємо метод інтегральних моментів. Запишемо інтеграл квадратичного відхилення знайдених напружень (20) від заданих зовнішніх зусиль на бокових (вертикальних) сторонах

$$\begin{aligned} \Psi\{x_1,\ldots,x_{2N},y_1,\ldots,y_{2N}\} = \int_0^1 \Bigg\{ \sum_{m=1}^{2} \Bigg\{ \Bigg\{ \sum_{k=1}^{N} \left[x_k \chi_{rk}^m(\gamma) - y_k \chi_{yk}^m(\gamma)\right] - \sigma_m(b\gamma) \Bigg\}^2 + \\ + \Bigg\{ \sum_{k=1}^{N} \left[x_k \psi_{rk}^m(\gamma) - y_k \psi_{yk}^m(\gamma)\right] - \tau_m(b\gamma) \Bigg\}^2 \Bigg\} \Bigg\} d\gamma, \end{aligned} \tag{21}$$

де

$$\chi_k^m(\gamma) = \chi_k(\gamma) \exp(\beta_k(1-m)a), \quad \chi_{k+N}^m(\gamma) = \chi_k(\gamma) \exp(\beta_k(m-2)a),$$

$$\psi_k^m(\gamma) = \psi_k(\gamma) \exp(\beta_k(1-m)a), \quad \psi_{k+N}^m(\gamma) = -\psi_k(\gamma) \exp(\beta_k(m-2)a), \quad k = \overline{1,\ N},$$

$$\chi_k^m(\gamma) = \chi_{rk}^m(\gamma) + i\chi_{yk}^m(\gamma), \qquad \psi_k^m(\gamma) = \psi_{rk}^m(\gamma) + i\psi_{yk}^m(\gamma), \quad m = 1,2,$$

$\chi_{rk}^m(\gamma),\ \ \psi_{rk}^m(\gamma)$ — дійсні, $\chi_{yk}^m(\gamma), \psi_{yk}^m(\gamma)$ — відповідно уявні частини. Діючи, як у п. 2, після громіздких обчислень інтегралів одержимо систему $4N$ лінійних рівнянь для визначення $4N$ невідомих $x_k,\ \ y_k,\ \ k = \overline{1,\ 2N}$:

$$\begin{gathered} \sum_{k=1}^{2N} \left\{x_k V_{k,j}^1 - y_k V_{k,j}^2\right\} = \sum_{m=1}^{2} \int_0^1 \left[\sigma_m(\gamma)\, \chi_{rj}^m(\gamma) + \tau_m(\gamma)\, \psi_{rj}^m(\gamma)\right] d\gamma, \\ \sum_{k=1}^{2N} \left\{x_k V_{j,k}^2 - y_k V_{k,j}^4\right\} = \sum_{m=1}^{2} \int_0^1 \left[\sigma_m(\gamma)\, \chi_{yj}^m(\gamma) + \tau_m(\gamma)\, \psi_{yj}^m(\gamma)\right] d\gamma, \quad j = \overline{1,\ 2N}, \end{gathered} \tag{22}$$

де коефіцієнти $V_{k,j}^m$ для значень індексів $k, j \leqslant N,$ або $k, j \geqslant N$, знаходяться за формулами

$$V_{k,j}^1 = (1 + V_k V_j) B_{k,j}^1 - V_k W_j B_{j,k}^2 - W_k V_j B_{k,j}^2 + W_k W_j B_{k,j}^4,$$

$$V_{k,j}^2 = (1 + V_k V_j) B_{k,j}^2 - W_k W_j B_{j,k}^2 - W_j V_k B_{k,j}^4 + W_k V_j B_{k,j}^1,$$

$$V_{k,j}^4 = (1 + V_k V_j) B_{k,j}^4 + V_j W_k B_{j,k}^2 + W_j V_k B_{k,j}^2 + W_k W_j B_{k,j}^1,$$

а для значень індексів $k \geqslant N, \quad j < N,$ або $j \geqslant N, \quad k < N$, маємо

$$V_{k,j}^1 = (V_k + V_j) E_{k,j}^1 - W_j E_{j,k}^2 - W_k E_{k,j}^2, \quad V_{k,j}^2 = (V_k + V_j) E_{k,j}^2 - W_j E_{k,j}^4 + W_k E_{k,j}^1,$$

$$V_{k,j}^4 = (V_k + V_j) E_{k,j}^4 + W_k E_{j,k}^2 + W_j E_{k,j}^2.$$

Коефіцієнти $B_{n,l}^m, \quad E_{n,l}^m, \quad V_l, W_l$ для значень індексів $n \geqslant N, \ l \geqslant N$ обчислюються за формулами

$$B_{k+N,j+N}^m = B_{k,j}^m, \quad E_{k,j+N}^m = E_{k+N,j}^m = E_{k,j}^m, \quad V_{k+N} = V_k, \quad W_{k+N} = W_k, \quad m = \overline{1, \ 4},$$

де

$$V_k = \mathrm{Re}\left(\exp(-\beta_k a)\right), \quad W_k = \mathrm{Im}\left(\exp(-\beta_k a)\right), \quad E_{k,j}^1 = \mathrm{Re}\left(P_1(k,j) - Q_1(k,j)\right),$$

$$E_{k,j}^2 = \mathrm{Im}\left(P_1(k,j) - Q_1(k,j)\right), \quad E_{k,j}^4 = \mathrm{Im}\left(P_2(k,j) - Q_2(k,j)\right).$$

Розв'яжемо систему лінійних рівнянь (22) чисельно і визначимо дійсні коефіцієнти x_k, y_k, $k = \overline{1, \ 2N}$, а отже, і комплексні коефіцієнти g_k, q_k, $k = \overline{1, \ N}$. Знайдемо інтеграл квадратичного відхилення $\Psi\left\{x_1, \ldots, x_{2N}, y_1, \ldots, y_{2N}\right\}$ (21) і порівняємо його з інтенсивністю дії зовнішнього навантаження

$$\Psi_0 = \int_0^1 \sum_{m=1}^2 [\sigma_m (b\gamma)^2 + \tau_m (b\gamma)^2] d\gamma.$$

Якщо відносне значення буде меншим, ніж $0,001$, то розв'язок знайдено; якщо відносне значення більше, ніж $0,001$, то збільшуємо кількість членів ряду N і повторно проводимо обчислення. Далі за формулами (2), (19) знаходимо НДС пластини.

Основні результати, висновки і перспективи подальших досліджень.

1. Узагальнено спектральний метод Штурма – Ліувілля інтегрування рівнянь другого порядку до розв'язування крайової задачі для бігармонічного рівняння. Запропонований метод можна розвинути і використати при інтегруванні рівнянь з частинними похідними четвертого і вищих порядків.

2. Як приклад застосування цього методу розроблено алгоритм розрахунку НДС прямокутної ізотропної пластини для довільного силового навантаження (задача „розтягу-стиску”). Запропоновано регуляризацію розв'язку цієї задачі шляхом виділення однорідних несамозрівноважених зусиль і самозрівноваженої частини, яка має локальний характер. Знайдено подання функції напруження самозрівноваженого напруженого стану у вигляді ряду. Показано, що компоненти цього ряду є сен-венанівськими, тобто створюють на кожній стороні прямокутної пластини нульові інтегральні нормальну і зсувну сили та згинний момент. Цей алгоритм можна розвинути і використати для розв'язування задачі „згину” прямокутної пластини.

3. Побудовано функцію напруження самозрівноваженої частини розв'язку у вигляді ряду за власними (сен-венанівськими) комплексними функціями, які задовольняють нульові граничні умови на бокових сторонах прямокутника. Знайдено явні вирази функцій, а також інтегралів від добутку цих функцій.

4. Розроблено інтегральний метод визначення комплексних коефіцієнтів ряду, який базується на методі моментів і принципі найменших квадратів. Знайдено в явному вигляді коефіцієнти матриці лінійної системи рівнянь для визначення шуканих коефіцієнтів ряду. Запропонований метод для розв'язування бігармонічного рівняння є узагальненням схеми Штурма–Ліувілля інтегрування рівнянь з частинними похідними другого порядку, оскільки при його застосуванні до рівняння другого порядку він збігається з методом Штурма–Ліувілля [1]. Цей метод можна розвинути і використати при розв'язуванні мішаних крайових задач.

5. Запропоновано методи розрахунку „довгої” ($a > 2,2b$) і „короткої” ($a \leq 2,2b$) пластин. Виражено компоненти НДС прямокутної пластини довільних розмірів через введені власні функції. Підтверджено принцип Сен-Венана. Показано, що коли до короткої сторони пластини, рівної $2b$ ($b < 0,45a$), прикласти самозрівноважені зусилля, то збуреними напруженнями на протилежній стороні практично можна знехтувати.

1. *Стеклов В.А.* Основные задачи математической физики. — М.: Наука, 1983. — 432 с.
2. *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966. — 444 с.
3. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. — М.: Наука, 1975. — 576 с.
4. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф.* Пространственные задачи теории упругости и пластичности // Равновесие упругих тел канонической формы. — Киев: Наук. думка, 1985. — Т. 3. — 280 с.
5. *Meleshko V.V.* Selected topics in history of the two-dimensional biharmonic problem // Appl. Mech. Rev. — 2003. — **56**, № 1. — P. 33–85.
6. *Космодамианский А.С., Шалдырван В.А.* Толстые многосвязные пластины. — Киев: Наук. думка, 1978. — 240 с.
7. *Остроградский М.В.* Мемуар о распространении волн в цилиндрическом бассейне (Доложен в Парижской академии 6 ноября 1826 г.) // Полное собрание трудов. — Киев: Изд-во АН УССР, 1959. — Т. 1. — С. 7–22.
8. *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций. Т. 2. Дальнейшее построение теории. — М.: Наука, 1968. — 624 с.

Одержано 22.07.2003