

ВПЛИВ ЗАПІЗНЕННЯ НА РЕГУЛЯРНУ ТА ХАОТИЧНУ ДИНАМІКУ СИСТЕМИ “БАК З РІДИНОЮ – ЕЛЕКТРОДВИГУН”

Ільмі Сеїт-Джеліль, Олександр Швець

*Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”
Берестейський просп., 37, Київ, 03056, Україна
e-mail: ilmiseitdzeli17@gmail.com
aleksandrshvetskpi@gmail.com, відповідальний за листування*

The deterministic dynamic “tank with liquid – electric motor” system is considered taking into account the influence of two delay factors. It is shown that the presence of delay in the system under study can lead to the emergence (disappearance) of deterministic chaos. A change in the delay values can also lead to the implementation of new scenarios, both transitions from regular attractors to chaotic ones, and transitions between chaotic attractors of different types.

Розглянуто детерміновану динамічну систему “бак з рідиною – електродвигун” з урахуванням впливу двох факторів запізнення. Показано, що наявність запізнення у досліджуваній системі може приводити до виникнення (зникнення) детермінованого хаосу. Також зміна значень запізнення може привести до реалізації нових сценаріїв як переходів від регулярних атракторів до хаотичних, так і переходів між хаотичними атракторами різних типів.

1. Вступ. Вивченню коливань вільної поверхні рідини в жорстких баках присвячено велику кількість робіт, детальну бібліографію яких наведено в монографіях [1, 2]. Окрім великого дослідницького інтересу ця проблематика має широке практичне застосування в багатьох сферах сучасних технологій, оскільки багато машин, механізмів і транспортних засобів містять як структурні компоненти баки різноманітної форми, що частково заповнені рідиною. Здебільшого коливання рідини в баках розглядають у так званій “ідеальній” постановці задачі. При такому підході припускають, що джерело збудження коливань має потужність значно більшу за потужність, яку споживає коливальне навантаження. Як наслідок, зворотним впливом коливальної системи, в цьому випадку частково заповненого рідиною бака, на функціонування джерела збудження коливань нехтують. Нагальна потреба глобального зменшення споживання енергії вимагає якомога більшої мінімізації потужності вбудованих джерел збудження коливань. Це приводить до того, що потужність джерела збудження стає співмірною з потужністю, що споживається коливальною системою. Саме така ситуація найчастіше виникає в реальних машинах і механізмах. У подібних випадках використання “ідеальних” математичних моделей може призвести до грубих помилок при описі усталених режимів динамічних систем “джерело збудження – коливальна підсистема”. Так, стійкі за Ляпуновим, при теоретичних розрахунках, усталені режими можуть виявитися нестійкими при проведенні натурних експериментів. Замість очікуваних

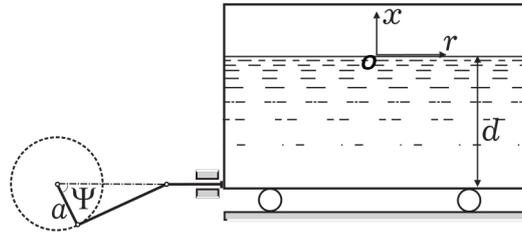


Рис. 1. Схема системи “бак з рідиною – електродвигун”.

періодичних режимів в експерименті виявляють положення рівноваги і навпаки [3–13]. А головне, може бути втрачено інформацію про існування детермінованого хаосу в подібних системах, причиною якого є нелінійна взаємодія між коливальною підсистемою та джерелом збудження коливань [4–6, 14–19]. Тому у випадках, коли потужність джерела збудження співмірна з потужністю, яку споживає коливальна система, обов’язково необхідно враховувати взаємодію між коливальним навантаженням і джерелом збудження.

Важливий вплив на динамічну поведінку систем “бак з рідиною – джерело збудження” мають ті чи інші фактори запізнення: як запізнення впливу джерела збудження на коливання бака з рідиною, так і запізнення оберненого впливу коливального навантаження на функціонування джерела збудження. Зауважимо, що запізнення завжди є в реальних системах внаслідок обмеженості швидкості проходження сигналів: хвиль стиснення, розтягу, вигину, сили току та електричного напруження, а також багатьох інших факторів. Наявність запізнення може привести до виникнення якісно інших усталених режимів руху (взаємодії) досліджуваних систем [20].

2. Математична модель системи. Розглянемо динамічну систему, що складається з електричного двигуна обмеженої потужності та циліндричного бака, частково заповненого рідиною. Причому потужність, що споживається коливальним навантаженням (баком із рідиною), співмірна з потужністю джерела збудження (електродвигуна). Нехай електродвигун за допомогою кривошипно-шатунного механізму збуджує горизонтальні коливання платформи бака з рідиною. Схему подібної системи наведено на рис. 1. Такі динамічні системи класифікуються як неідеальні за Зоммерфельдом – Кононенком [21, 22].

Обертання валу електродвигуна можна описати за допомогою кута Ψ . Коли кривошип довжини a обертається на кут Ψ , бак зазнає переміщення в горизонтальній площині $u(t) = a \cos \Psi(t)$. Нехай рідина в баку є нев’язкою, нестисливою та має густину ρ . Будемо позначати радіус циліндричного бака через R , поперечний переріз — через S .

Припустимо, що рідина заповнює бак до глибини $x = -d$. Розглядатимемо тільки той напрямок рухів $u(t)$ платформи бака, який збігається з напрямком полярної осі Ox . Для опису коливання вільної поверхні рідини введемо циліндричну систему координат $Oxr\Psi$ із початком на осі симетрії бака на незбуреній поверхні рідини. Рівняння рельєфу вільної поверхні рідини може бути записане у вигляді $x = \zeta(r, \Psi, t)$. Рух рідини в баку будемо описувати за допомогою потенціалу швидкості рідини $\varphi(x, r, \Psi, t)$. Подамо функції $\zeta(r, \Psi, t)$ і $\varphi(x, r, \Psi, t)$ у вигляді розкладу за власними модами коливань:

$$\zeta(r, \theta, t) = \sum_{i,j} [q_{ij}^c(t) \chi_{ij}(r) \cos i\theta + q_{ij}^s(t) \chi_{ij}(r) \sin i\theta],$$

$$\varphi(x, r, \theta, t) = \sum_{i,j} [\varphi_{ij}^c(t) X_{ij}(x, r) \cos i\theta + \varphi_{ij}^s(t) X_{ij}(x, r) \sin i\theta],$$
(1)

де q_{ij}^c, q_{ij}^s і $\varphi_{ij}^c, \varphi_{ij}^s$ — невідомі амплітуди нормальних мод; $\chi_{ij}(r) \cos i\theta, \chi_{ij}(r) \sin i\theta, X_{ij}, \cos i\theta$ і $X_{ij} \sin i\theta$ — власні моди в лінійному наближенні задачі коливань ідеальної рідини в циліндричній оболонці.

З огляду на результати робіт [4, 23–28] можна стверджувати, що процес нелінійної взаємодії між коливаннями вільної поверхні рідини в циліндричному баку за головними резонансними модами та обертанням вала електродвигуна обмеженої потужності з урахуванням запізнення впливу електродвигуна на коливання бака з рідиною, а також запізнення оберненого впливу коливального навантаження на функціонування джерела збудження можна описати за допомогою системи диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dp_1(\tau)}{d\tau} &= \alpha p_1(\tau) - \left[\beta(\tau - \delta) + \frac{A}{2} (p_1^2(\tau) + q_1^2(\tau) + p_2^2(\tau) + q_2^2(\tau)) \right] q_1(\tau) \\ &\quad + B(p_1(\tau)q_2(\tau) - p_2(\tau)q_1(\tau))p_2(\tau), \\ \frac{dq_1(\tau)}{d\tau} &= \alpha q_1(\tau) + \left[\beta(\tau - \delta) + \frac{A}{2} (p_1^2(\tau) + q_1^2(\tau) + p_2^2(\tau) + q_2^2(\tau)) \right] p_1(\tau) \\ &\quad + B(p_1(\tau)q_2(\tau) - p_2(\tau)q_1(\tau))q_2(\tau) + 1, \\ \frac{d\beta(\tau)}{d\tau} &= N_3 - \mu_1 q_1(\tau - \rho) + N_1 \beta(\tau), \\ \frac{dp_2(\tau)}{d\tau} &= \alpha p_2(\tau) - \left[\beta(\tau - \delta) + \frac{A}{2} (p_1^2(\tau) + q_1^2(\tau) + p_2^2(\tau) + q_2^2(\tau)) \right] q_2(\tau) \\ &\quad - B(p_1(\tau)q_2(\tau) - p_2(\tau)q_1(\tau))p_1(\tau), \\ \frac{dq_2(\tau)}{d\tau} &= \alpha q_2(\tau) + \left[\beta(\tau - \delta) + \frac{A}{2} (p_1^2(\tau) + q_1^2(\tau) + p_2^2(\tau) + q_2^2(\tau)) \right] p_2(\tau) \\ &\quad - B(p_1(\tau)q_2(\tau) - p_2(\tau)q_1(\tau))q_1(\tau). \end{aligned} \quad (2)$$

Тут фазові змінні p_1, q_1 і p_2, q_2 є амплітудами коливань вільної поверхні рідини за першою і другою основними домінуючими модами відповідно; фазова змінна β пропорційна швидкості обертання вала електродвигуна; τ — безрозмірний час; α — коефіцієнт в'язкого демпфування; μ_1 — коефіцієнт пропорційності вібраційного моменту; N_1 — кут нахилу статичної характеристики електродвигуна. Параметри A і B є константами, що залежать від радіуса бака R і висоти налитої в нього рідини $-d$; N_3 — мультипараметр, який залежить від радіуса бака, довжини кривошипа та власної частоти основного тону коливань вільної поверхні [4, 27, 28]. Величина δ визначає запізнення впливу електродвигуна на коливання бака з рідиною; ρ — запізнення зворотного впливу коливального навантаження на електродвигун, причому $\rho \geq \delta \geq 0$.

Система (2) є нелінійною системою звичайних диференціальних рівнянь із двома запізненнями. Побудова розв'язків для нелінійних систем у загальному випадку, навіть при відсутності запізнення, здійснюється за допомогою чисельно-аналітичних методів. Тому першим кроком у дослідженні системи (2) буде зведення такої системи до системи рівнянь без запізнень. Загальні методи зведення рівнянь із аргументом, що запізнюється, до рівнянь без запізнень описано в [29]. У разі, коли запізнення δ та ρ достатньо малі, може бути

запропонований такий підхід [20]. Розкладемо функції $\beta(\tau - \delta)$ і $q_1(\tau - \rho)$ у ряд Маклорена за степенями малих запізнень, а саме:

$$\begin{aligned}\beta(\tau - \delta) &= \beta(\tau) - \delta \frac{d\beta}{d\tau} + \delta^2 \dots, \\ q_1(\tau - \rho) &= q_1(\tau) - \rho \frac{dq_1}{d\tau} + \rho^2 \dots.\end{aligned}\tag{3}$$

Нехтуючи членами другого і вищих порядків малості, підставимо вирази (3) для $\beta(\tau - \delta)$ і $q_1(\tau - \rho)$ у систему рівнянь (2). Отримаємо систему рівнянь

$$\begin{aligned}\frac{dp_1(\tau)}{d\tau} &= \alpha p_1(\tau) - \left[\beta(\tau) - \delta \{ N_3 - \mu_1 q_1(\tau) + N_1 \beta(\tau) \} \right. \\ &\quad \left. + \frac{A}{2} (p_1^2(\tau) + q_1^2(\tau) + p_2^2(\tau) + q_2^2(\tau)) \right] q_1(\tau) + B(p_1(\tau)q_2(\tau) - p_2(\tau)q_1(\tau))p_2(\tau), \\ \frac{dq_1(\tau)}{d\tau} &= \alpha q_1(\tau) + \left[\beta(\tau) - \delta \{ N_3 - \mu_1 q_1(\tau) + N_1 \beta(\tau) \} \right. \\ &\quad \left. + \frac{A}{2} (p_1^2(\tau) + q_1^2(\tau) + p_2^2(\tau) + q_2^2(\tau)) \right] p_1(\tau) \\ &\quad + B(p_1(\tau)q_2(\tau) - p_2(\tau)q_1(\tau))q_2(\tau) + 1, \\ \frac{d\beta(\tau)}{d\tau} &= N_3 + N_1 \beta - \mu_1 q_1 + \mu_1 \rho \left(\alpha q_1 + \left[\beta + \frac{A}{2} (p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] p_1 \right. \\ &\quad \left. + B(p_1 q_2 - p_2 q_1) q_2 + 1 \right), \\ \frac{dp_2(\tau)}{d\tau} &= \alpha p_2(\tau) - \left[\beta(\tau) - \delta \{ N_3 - \mu_1 q_1(\tau) + N_1 \beta(\tau) \} \right. \\ &\quad \left. + \frac{A}{2} (p_1^2(\tau) + q_1^2(\tau) + p_2^2(\tau) + q_2^2(\tau)) \right] q_2(\tau) \\ &\quad - B(p_1(\tau)q_2(\tau) - p_2(\tau)q_1(\tau))p_1(\tau), \\ \frac{dq_2(\tau)}{d\tau} &= \alpha q_2(\tau) + \left[\beta(\tau) - \delta \{ N_3 - \mu_1 q_1(\tau) + N_1 \beta(\tau) \} \right. \\ &\quad \left. + \frac{A}{2} (p_1^2(\tau) + q_1^2(\tau) + p_2^2(\tau) + q_2^2(\tau)) \right] p_2(\tau) \\ &\quad - B(p_1(\tau)q_2(\tau) - p_2(\tau)q_1(\tau))q_1(\tau).\end{aligned}\tag{4}$$

Систему рівнянь (4) надалі використовували як математичну модель для дослідження регулярної та хаотичної динаміки системи “бак з рідиною – електродвигун”. Параметри ρ та δ формально вже не є запізненнями у системі рівнянь (4), проте будемо використовувати термін “запізнення” виключно для того, щоб підкреслити генезис цих параметрів у системі рівнянь (4).

3. Методика чисельних досліджень та основні результати. Внаслідок нелінійності системи рівнянь (4) всі подальші дослідження з побудови граничних множин цієї системи

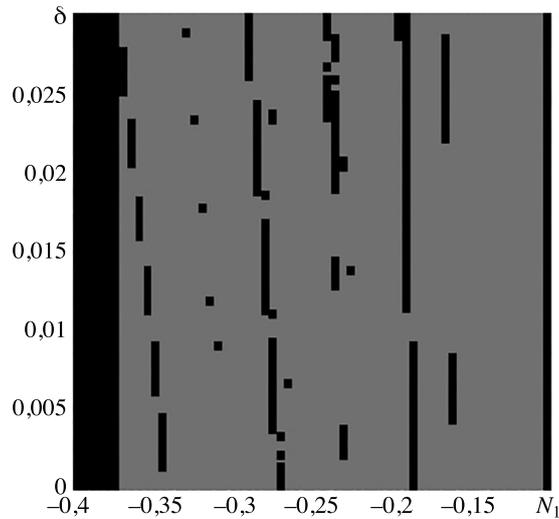


Рис. 2. Лист карти динамічних режимів за значень параметрів з набору (5).

та вивчення типів цих граничних множин проводили за допомогою чисельних методів, а саме алгоритму Бенеттіна [30, 31], методу Ено [32 – 34], комп’ютерного методу зображення частин фазових траєкторій лініями різної яскравості [27, 35] тощо.

Нехай значення параметрів системи (4) дорівнюють

$$\alpha = -0,1, \quad \mu_1 = 0,5, \quad N_3 = -0,1, \quad A = 1,12, \quad B = -1,531. \quad (5)$$

На рис. 2 наведено карту динамічних режимів системи (4) при фіксованих значеннях параметрів (5) і змінних значеннях параметра N_1 і запізнень за умови $\rho = 2\delta$. Побудову цієї карти проводили з кроком 0,005 для параметра N_1 і кроком 0,0004 для запізнень. Ідентифікацію типу динамічного режиму робили на підставі обчислення спектра ляпуновських характеристичних показників за узагальненим алгоритмом Бенеттіна. На цій карті чорні та сірі області відповідають значенням параметрів, за яких атрактором системи (4) є відповідно хаотичний атрактор або граничний цикл. Надалі цю карту використовуємо при проведенні додаткових розрахунків для більш детальних досліджень особливостей регулярних і хаотичних режимів.

Нехай параметри системи (4) дорівнюють значенням із набору (5), а запізнення задовольняють умову $\rho = 2\delta$. Додатково покладемо $N_1 = -0,19$.

На рис. 3 зображено фазопараметричну характеристику (біфуркаційне дерево) системи (4), побудовану за допомогою методу Ено з використанням січної площини $\beta = -1,2$. Густо-чорна область цього біфуркаційного дерева свідчить про існування в системі (4) хаотичного атрактора, оскільки за відповідних значень параметрів старший ляпуновський показник системи є додатним (рис. 3 б)). Натомість окрема “гілка” біфуркаційного дерева свідчить про існування граничного циклу. При відсутності запізнення у вихідній системі (2), тобто при $\delta = 0$, у системі (4) існує хаотичний атрактор. Зі зростанням значень запізнення, при $\delta \approx 0,0118$, хаотичний атрактор зникає і в системі народжується граничний цикл. Перехід “хаос – цикл” відбувається за зворотним сценарієм переміжності, за одну жорстку біфуркацію. Зворотність сценарію переміжності розуміємо у тому сенсі, що при розгляді спадання параметра δ буде реалізований перехід “цикл – хаос” за класичним сценарієм переміжності Манневілля – Помо [36 – 38].

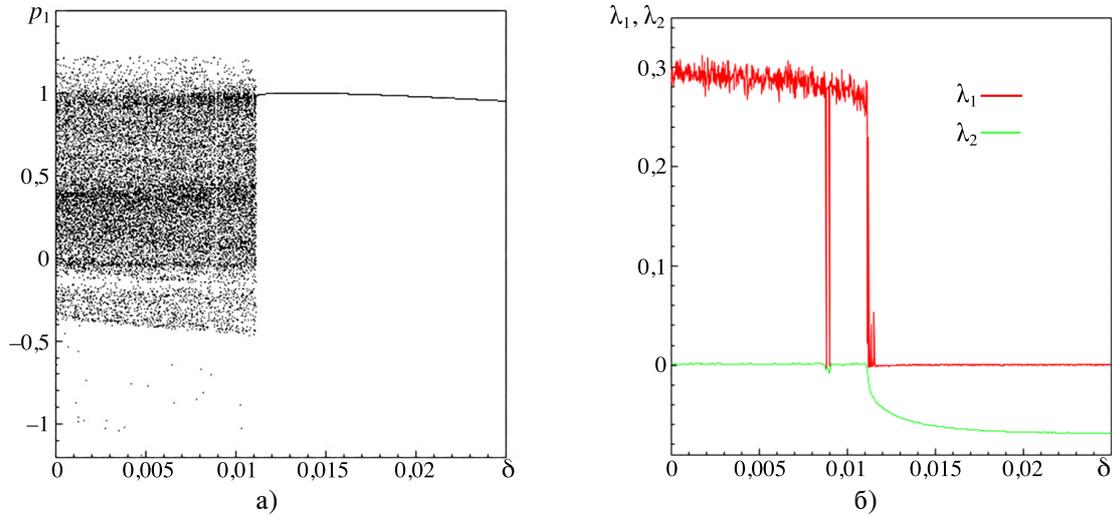


Рис. 3. Фазопараметрична характеристика та графік перших двох ляпуновських показників при значеннях параметрів із набору (5) і додаткових умов $\rho = 2\delta$ і $N = -0,19$.

За допомогою узагальненого алгоритму Бенеттіна проведено розрахунок спектра ляпуновських характеристичних показників (ЛХП) для набору параметрів, який використовувався для побудови фазопараметричної характеристики. На рис. 3 б) побудовано графіки залежності двох старших ляпуновських характеристичних показників λ_1 і λ_2 від значень запізнення δ . Причому графік максимального показника λ_1 зображено червоним кольором, а графік другого показника λ_2 — зеленим. Як видно з рисунка, при $\delta < 0,0118$ максимальний показник буде додатним, а другий дорівнюватиме нулю. Три інші показники будуть від’ємними. Така сигнатура спектра додатково свідчить про те, що при $\delta < 0,0118$ у системі (4) існує хаотичний атрактор. Натомість після точки біфуркації, тобто при $\delta > 0,0118$, максимальний показник λ_1 дорівнює нулю, а інші показники будуть від’ємними. Це свідчить про те, що атрактор системи стає граничним циклом.

На рис. 4 а) побудовано тривимірну проекцію фазового портрета хаотичного атрактора при відсутності запізнення, тобто при $\delta = \rho = 0$. Структура фазового портрета достатньо типова для хаотичних атракторів. Відповідно на рис. 4 б) побудовано переріз Пуанкаре цього атрактора. Цей переріз являє собою деяку хаотичну множину точок на січній площині $\beta = -1,8$. Хаотичні атрактори такого типу існують у системі (4) при зміні запізнення в інтервалі $0 \leq \delta < 0,118$. При подальшому зростанні запізнення хаотичний атрактор зникає і в системі народжується граничний цикл, який має достатньо просту однообертovu структуру. Проекцію фазового портрета такого циклу побудовано на рис. 4 в).

Далі, додатково до вибраних значень параметрів (5) і умови $\rho = 2\delta$, покладемо $N_1 = -0,271$. Як і раніше, застосовуючи метод Ено та узагальнений алгоритм Бенеттіна, побудуємо фазопараметричну характеристику та графіки залежності двох старших ляпуновських показників. На рис. 5 а) зображено фазопараметричну характеристику системи (4), побудовану при значенні $N_1 = -0,271$. Чітко помітні густо-чорні ділянки, відповідні хаотичним атракторам, і окремі “гілки” біфуркаційного дерева, що відповідають граничним циклам. Також можна помітити білі “прорізи” у густо-чорних областях хаосу. Це так звані вікна періодичності. Для більш детального з’ясування біфуркацій, які відбуваються у системі при зміні значень запізнення, побудовано два фрагменти фазопараметричної характеристики, які зображені на рис. 5 б), в).

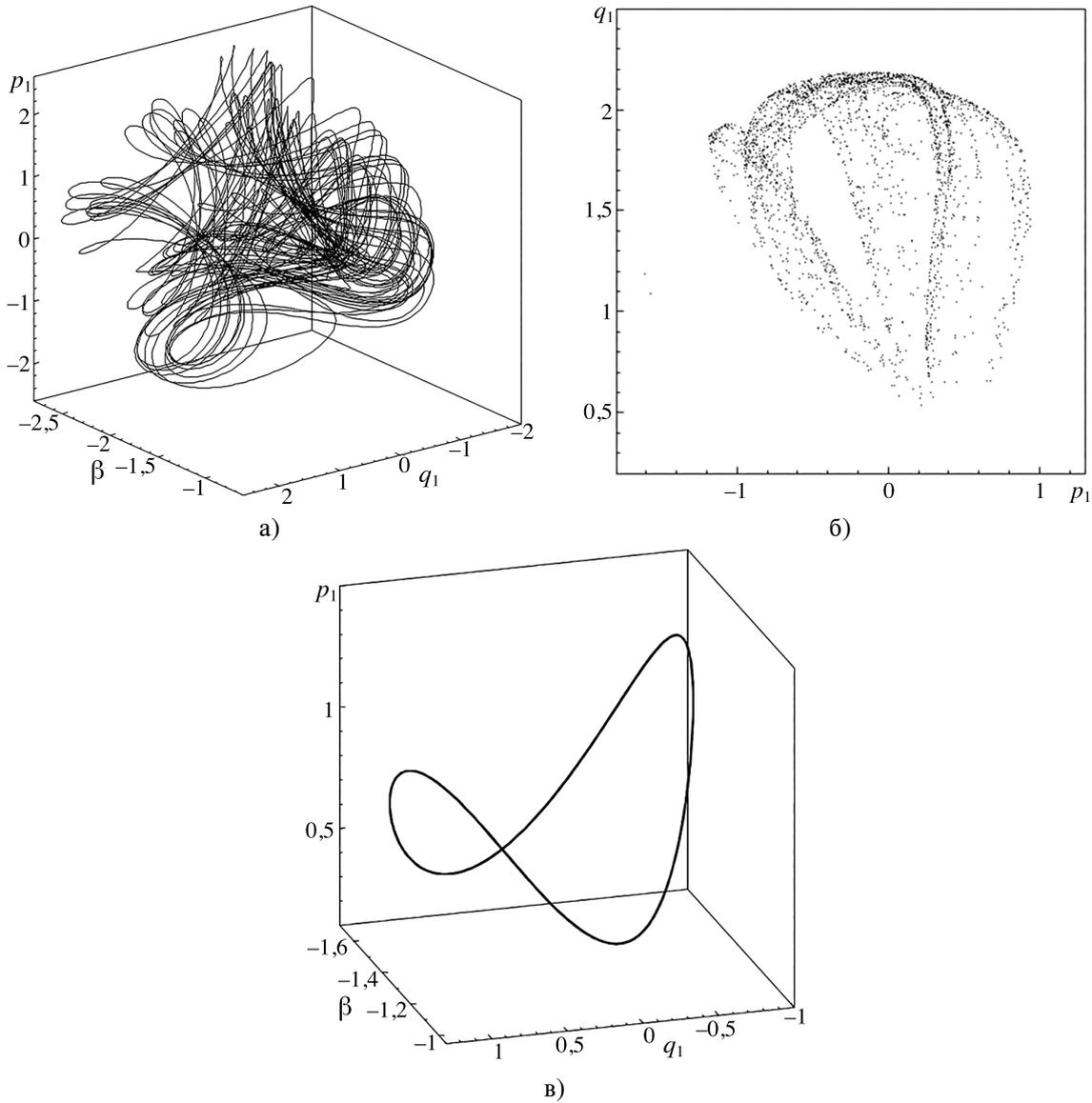


Рис. 4. Хаотичний аттрактор при $\delta = 0$ а), переріз Пуанкаре хаотичного аттрактора при $\delta = 0$ б) і граничний цикл при $\delta = 0,012$ в).

Детально розглянемо рис. 5 б). При відсутності запізнення $\delta = \rho = 0$ аттрактором системи (4) буде граничний цикл. Зі зростанням значення запізнення можна побачити розгалуження окремих гілок біфуркаційного дерева. Кожне таке розгалуження є точкою біфуркації подвоєння періоду граничного циклу. Такий нескінченний каскад біфуркацій подвоєння періодів граничних циклів завершується виникненням хаотичного аттрактора при $\delta \approx 0,0035$ (рис. 6 г)). Зауважимо, що цей аттрактор існує у відносно невеликому інтервалі значень запізнення $0,0035 < \delta < 0,005$ і має відносно малу область локалізації у фазовому просторі.

Ідентифікацію регулярності чи хаотичності аттрактора можна провести, аналізуючи сигнатуру спектра ЛХП. На рис. 5 г) побудовано графіки першого та другого ляпуновських характеристичних показників. На цьому рисунку, як і раніше, графік залежності макси-

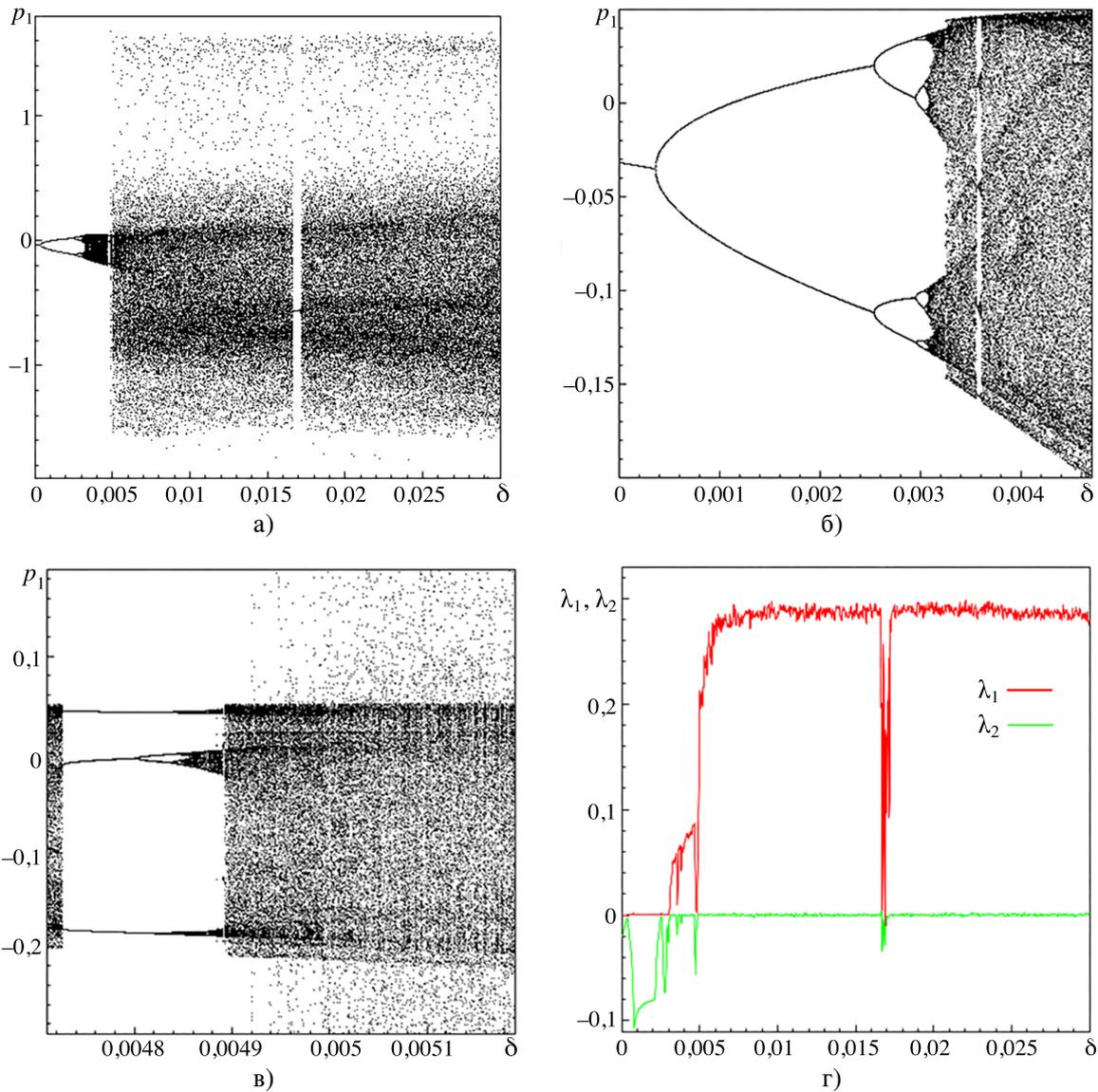


Рис. 5. Фазопараметрична характеристика а); збільшені фрагменти фазопараметричної характеристики б), в) і графік перших двох ляпуновських показників г) при $N_1 = -0,271$.

мального ляпуновського показника λ_1 від запізнення δ зображено червоним кольором, а графік другого ляпуновського показника λ_2 — зеленим кольором. Зауважимо, що були обчислені всі п'ять ляпуновських показників. Суттєвим є те, що всі інші показники від'ємні при будь-яких значеннях запізнення. При значеннях $0 \leq \delta < 0,0035$ сигнатура спектра ЛХП [27] має вигляд $\langle "0", "-", "-", "-", "-" \rangle$.

Отже, всі атрактори системи у цьому випадку будуть граничними циклами. При $\delta \geq 0,0035$, як видно з рис. 5 г), максимальний показник стає додатним, а другий — нульовим. У цілому сигнатура спектра ЛХП набуває вигляду $\langle "+", "0", "-", "-", "-" \rangle$, що свідчить про виникнення хаотичного атрактора. З подальшим зростанням значень запізнення відбувається чергування достатньо широких, у сенсі значень δ , областей хаосу і достатньо вузьких вікон періодичності.

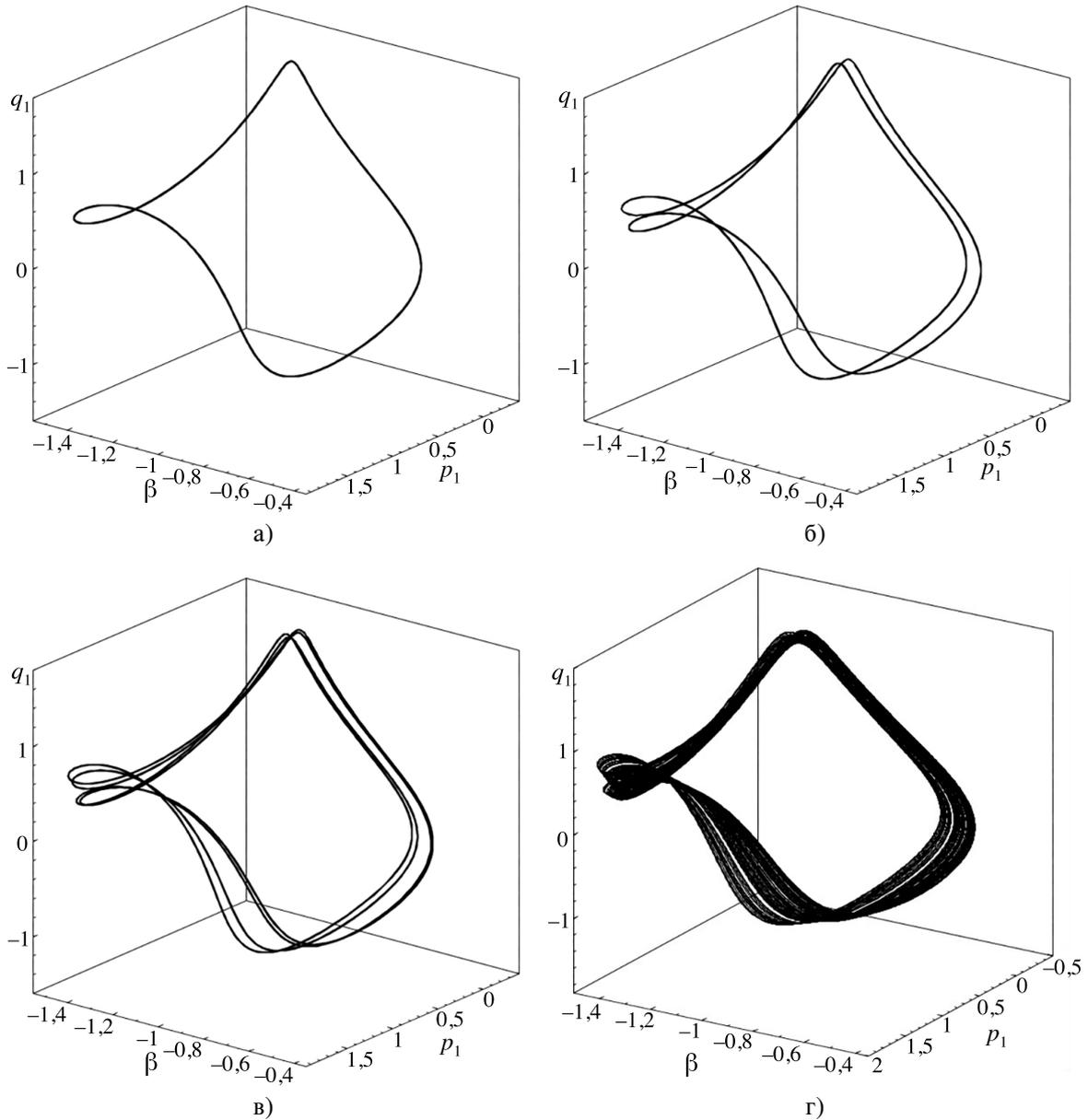


Рис. 6. Граничний цикл при $\delta = 0$ а); граничні цикли після перших двох біфуркацій подвоєння при $\delta = 0,002$, $\delta = 0,0028$ б), в); хаотичний атрактор при $\delta = 0,0035$ г).

Нарешті розглянемо фазові портрети атракторів. На рис. 6 а) наведено тривимірну проекцію граничного циклу, який існує у системі при відсутності запізнення. Відповідно на рис. 6 б), в) побудовано проєкції фазових портретів після перших двох біфуркацій подвоєння періоду вихідного граничного циклу, які відбуваються при невеликому збільшенні значень запізнення. Такий каскад біфуркацій подвоєння періоду завершується виникненням хаотичного атрактора при $\delta = 0,0035$ (рис. 6 г)).

Таким чином, у розглянутому інтервалі зміни значень запізнення $0 \leq \delta < 0,005$ перехід до хаосу відбувається за класичним сценарієм Фейгенбаума [39, 40].

Далі розглянемо вплив запізнень на біфуркаційні процеси в малому вікні періодичності $0,00473 \leq \delta \leq 0,0049$. Як видно з рис. 5 в), перехід від граничного циклу до хаотичного

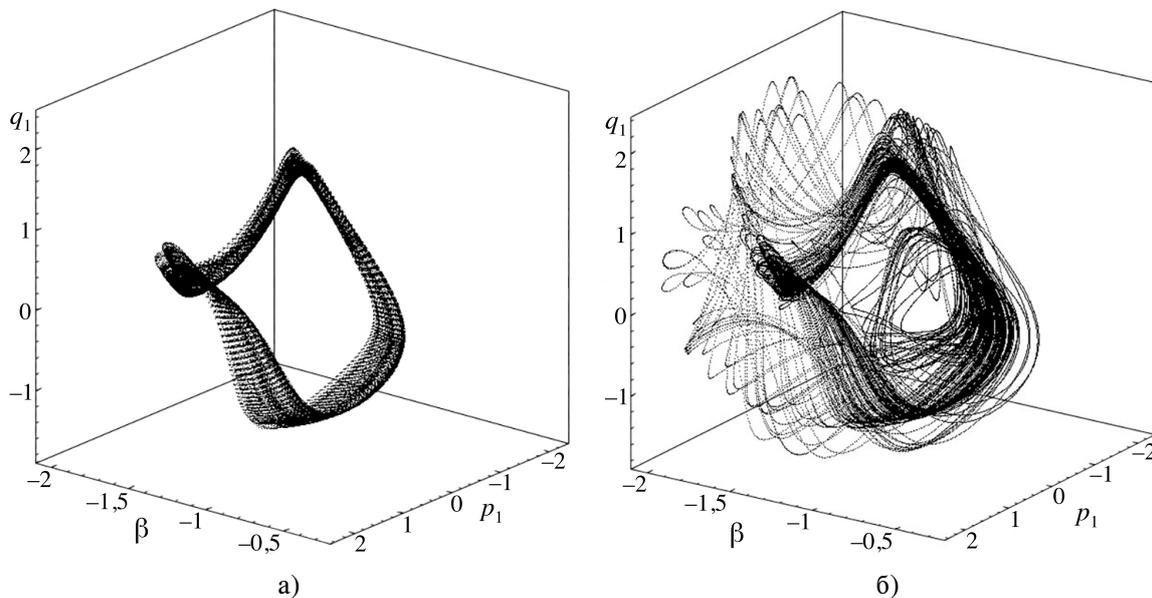


Рис. 7. Розподіл інваріантної міри за фазовим портретом хаотичного атрактора при $\delta = 0,0049$ а) та при $\delta = 0,005$ б).

атрактора при зменшенні значень запізнення відбувається за одну біфуркацію. Тобто реалізується сценарій переміжності за Манневіллем – Помо [36, 37]. Зауважимо, що перехід хаосу через переміжність при зменшенні значень запізнення відбувається так само, як і для раніше розглянутого першого набору (5) значень параметрів системи (4).

Більш цікавий біфуркаційний процес у вікні періодичності, що розглядається, відбувається при зростанні значень запізнення. Спочатку реалізується перехід до хаосу за сценарієм Фейгенбаума через нескінченний каскад біфуркацій подвоєння періоду граничних циклів. А от у точці $\delta \approx 0,00492$ відбувається перехід від хаотичного атрактора одного типу до хаотичного атрактора іншого типу за сценарієм узагальненої переміжності. Різні типи сценарію узагальненої переміжності описано в роботах [18, 28, 41, 42].

На рис. 7 а), б) побудовано розподіли природної інваріантної міри за фазовими портретами хаотичних атракторів відповідно при $\delta = 0,0049$ а) та при $\delta = 0,005$ б). Про хаотичність цих атракторів свідчить фазопараметрична характеристика (рис. 5 в)) і графіки перших двох ляпуновських характеристичних показників (рис. 5 г)). Побудову таких розподілів проводять за допомогою комп'ютерного кодування траєкторій атрактора відтінками чорного кольору [27]. Маємо два типи хаотичних атракторів системи (4). Хаотичний атрактор, зображений на рис. 7 б), має значно більшу область локалізації у фазовому просторі системи, ніж хаотичний атрактор, зображений на рис. 7 а). Хаотичний атрактор, зображений на рис. 7 а), надалі будемо називати хаотичним атрактором першого типу. Відповідно хаотичний атрактор, зображений на рис. 7 б), — хаотичним атрактором другого типу. Перехід від хаотичного атрактора одного типу до хаотичного атрактора іншого типу відбувається за одну жорстку біфуркацію за сценарієм узагальненої переміжності. Такою точкою біфуркації у нашому випадку буде точка $\delta \approx 0,00492$. Про реалізацію сценарію узагальненої переміжності свідчать дві характерні ознаки. Перша — це значне зростання площі густо-чорної області хаосу на фазопараметричній характеристиці системи, що чітко видно з рис. 5 а), в). Другою ознакою є суттєве збільшення величини максимального ляпуновсько-

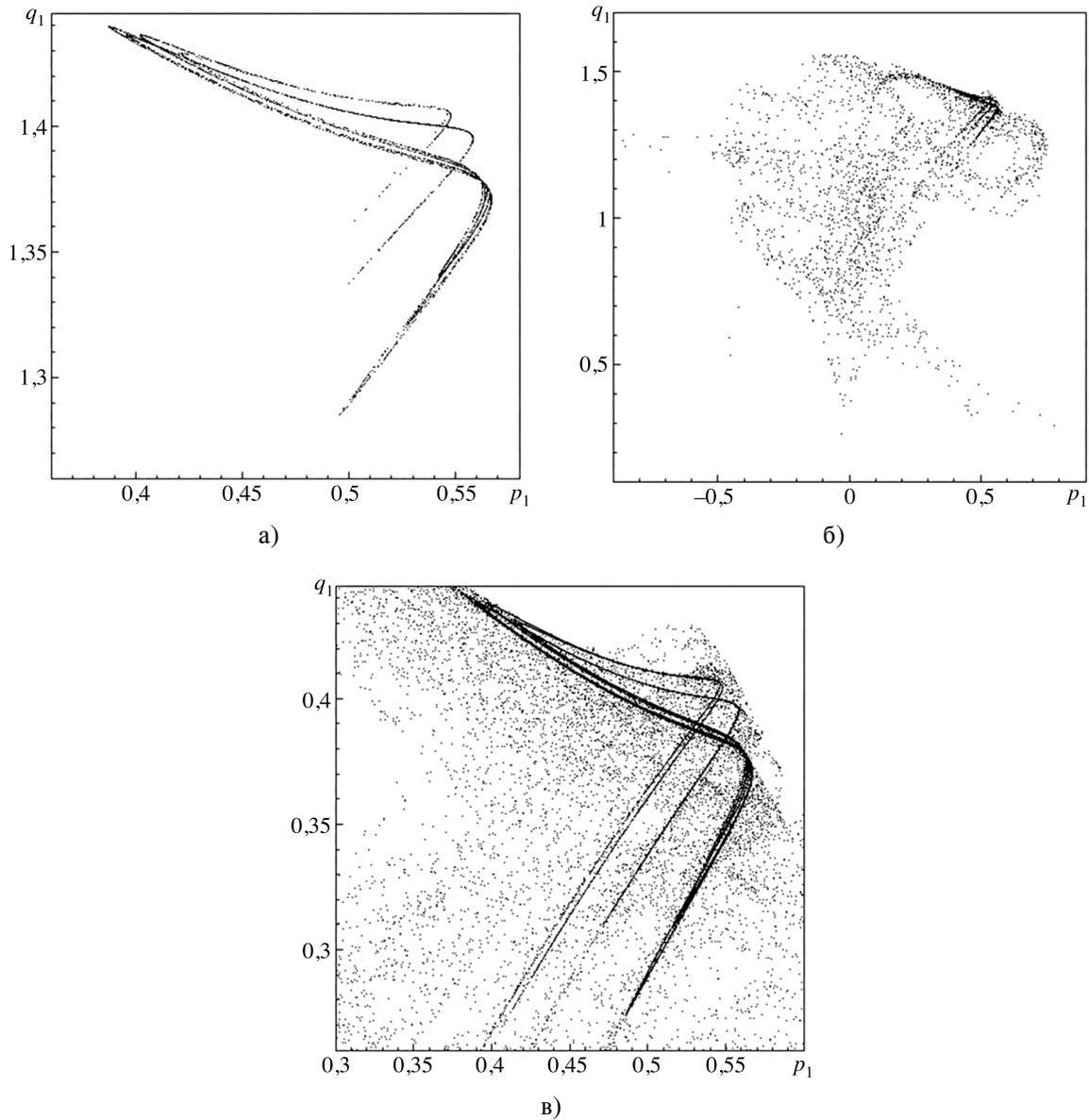


Рис. 8. Перерізи Пуанкаре хаотичних атракторів при $\delta = 0,0049$ а) та $\delta = 0,005$ б), в) із січною площиною $\beta = -0,8$.

го показника після точки біфуркації. На графіку максимального ляпуновського показника λ_1 (рис. 5 г)) помітно більш ніж двократне збільшення значення максимального показника відразу після біфуркаційної точки.

Сам перехід від хаотичного атрактора одного типу до хаотичного атрактора іншого типу відбувається таким чином. При $\delta = 0,0049$ аттрактором системи (4) є хаотичний аттрактор першого типу. Зі збільшенням значення запізнення після проходження точки біфуркації хаотичний аттрактор першого типу зникає, а в системі виникає хаотичний аттрактор другого типу. Рух за траєкторіями, що належать до хаотичного атрактора другого типу, складається з двох фаз: грубо ламінарної та турбулентної. У грубо ламінарній фазі (значно щільніше нанесені точки на рис. 7 б) траєкторія здійснює хаотичні блукання в області локалізації у

фазовому просторі зниклого хаотичного атрактора першого типу. Зазначимо, що області розподілу інваріантної міри у грубо ламінарній фазі практично збігаються з областями розподілу інваріантної міри зниклого хаотичного атрактора першого типу. У непередбачуваний момент часу траєкторія відходить із цієї області у більш віддалені частини фазового простору. Така фаза переміжності називається турбулентною. Турбулентна фаза відповідає рідше нанесеним точкам на рис. 7 б). Цей процес зміни фаз повторюється нескінченну кількість разів. І навіть більше, час переходу від грубо ламінарної фази до турбулентної і назад у грубо ламінарну фазу є непередбачуваним.

Не менш наочно сценарій узагальненої переміжності може бути описаний за допомогою перерізів Пуанкаре. Побудовані за допомогою методу Ено, перерізи Пуанкаре хаотичних атракторів першого та другого типів зображено на рис. 8. Зазначимо, що як січну площину обрано площину $\beta = -0,8$. Усі побудовані перерізи Пуанкаре є деякими хаотичними множинами точок. Так, на рис. 8 а) зображено переріз Пуанкаре хаотичного атрактора першого типу. Відповідно на рис. 8 б), в) зображено переріз Пуанкаре та фрагмент цього перерізу для хаотичного атрактора другого типу. Грубо ламінарній фазі переміжності відповідає область, яка утворює яскраво чорну ділянку на рис. 8 в). Особливо слід підкреслити, що за формою та геометричними розмірами ця область рис. 8 в) майже збігається з перерізом Пуанкаре першого хаотичного атрактора (рис. 8 а)). Турбулентній фазі переміжності відповідають окремі точки з рис. 8 в). Також зауважимо, що рис. 8 б) добре ілюструє помітне зростання області локалізації у фазовому просторі хаотичного атрактора другого типу, який виникає у результаті реалізації сценарію узагальненої переміжності.

4. Висновки. Проведені дослідження свідчать про значний вплив факторів запізнення на виникнення граничних множин різних типів, як регулярних, так і хаотичних, детермінованої динамічної системи “бак з рідиною – електродвигун”. Проте всі зроблені чисельні розрахунки виконано лише для порівняно малих величин значень запізнень. У подальших дослідженнях планується запропонувати обчислювальні схеми придатні для будь-яких значень запізнень. Також будуть розглянуті випадки змінних за часом величин запізнень.

Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів. Усі необхідні дані містяться в статті. Всі автори зробили рівномірний внесок у цю роботу, а також заявляють про відсутність спеціального фінансування для її виконання.

Література

1. R. A. Ibrahim, *Liquid sloshing dynamics: theory and applications*, Cambridge University Press (2009); DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511536656>.
2. I. A. Lukovsky, *Nonlinear dynamics: mathematical models for rigid bodies with a liquid*, De Gruyter Stud. Math. Phys. (2015); DOI: <https://doi.org/10.1515/9783110316575>.
3. K. V. Frolov, T. S. Krasnopolskaya, *Sommerfeld effect in systems without internal damping*, Sov. Appl. Mech., **23**, 1122 – 1126 (1987); DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00884888>.
4. T. S. Krasnopolskaya, A. Yu. Shvets, *Properties of chaotic oscillations of the liquid in cylindrical tanks*, Prikl. Mekh., **28**, № 6, 52 – 61 (1992); **English translation:** Internat. Appl. Mech., **28**, № 6, 386–394 (1992).
5. Т. С. Краснополяская, А. Ю. Швець, *Хаотические колебания сферического маятника как эффект взаимодействия с источником энергии*, Прикл. механика, **28**, № 10, 61 – 68 (1992); DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00846923>.
6. T. S. Krasnopol'skaya, A. Y. Shvets, *Parametric resonance in the system: liquid in tanks + electric motor*, Int. Appl. Mech., **29**(9), 722 – 730 (1993); DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00847371>.
7. D. Belato, J. M. Balthazar, H. I. Weber, et al., *A note about of non-hyperbolic solutions in a mechanical pendulum system*, Nonlinear Dyn., **34**, 300 – 317 (2003); DOI: <https://doi.org/10.1023/B:NODY.0000013510.13416.2e>.

8. S. L. T. de Souza, I. L. Caldas, R. Viana, J. M. Balthazar, *Dynamics of vibrating systems with tuned liquid column dampers and limited power supply*, J. Sound Vib., **289**, № 4, 987–998 (2006); DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.03.001>.
9. M. Dimentberg, C. Bucher, *Combinational parametric resonance under imperfectly periodic excitation*, J. Sound Vib., **331**, № 19, 4373–4378 (2009); DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.04.025>.
10. N. N. Verichev, S. N. Verichev, V. I. Yerofeyev, *The dynamics of a “flexible-rotor/limited-power-excitation-source” system*, J. Appl. Math. Mech., **73**, № 4, 395–402 (2009); DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2009.08.012>.
11. M. Karthikeyan, A. Bisoi, A. K. Samantaray, R. Bhattacharyya, *Sommerfeld effect characterization in rotors with non-ideal drive from ideal drive response and power balance*, Mech. Mach. Theory, **91**, 269–288 (2015); DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2015.04.016>.
12. Yu. Mikhlin, A. Onizhuk, J. Awrejcewicz, *Resonance behavior of the system with a limited power supply having the Mises girder as absorber*, Nonlinear Dyn., **99**, № 1, 519–536 (2020); DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-019-05125-z>.
13. Ya. O. Lebedenko, Yu. V. Mikhlin, *Stationary regimes and transient in two systems with limited power supply*, J. Appl. Nonlinear Dyn., **14**, № 1, 189–210 (2025); DOI: <https://doi.org/10.5890/JAND.2025.03.013>.
14. S. L. T. de Souza, I. L. Caldas, R. Viana, J. M. Balthazar, *Impact dampers for controlling chaos in systems with limited power supply*, J. Sound Vib., **279**, № 3, 955–967 (2005); DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2003.11.068>.
15. S. L. T. de Souza, I. L. Caldas, R. L. Viana, et al., *A simple feedback control for a chaotic oscillator with limited power supply*, J. Sound Vib., **299**, № 3, 664–671 (2007); DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.07.024>.
16. N. N. Verichev, *Chaotic torsional vibration of imbalanced shaft driven by a limited power supply*, J. Sound Vib., **331**, № 2, 384–393 (2012); <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.08.022>.
17. S. L. T. de Souza, A. M. Batista, M. S. Baptista, et al., *Characterization in bi-parameter space of a non-ideal oscillator*, Phys. A., **466**, 224–231 (2017); DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2016.09.020>.
18. A. Shvets, *Overview of scenarios of transition to chaos in nonideal dynamic systems*, Springer Proc. Complexity, Springer, Cham, 853–864 (2021); DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-70795-8_59.
19. M. Wang, L. Zhou, E. Chen, P. Liu, *Dynamical characterization of a Duffing–Holmes system containing nonlinear damping under constant excitation*, Chaos Solitons Fractals, **175**, № 1 (2023); DOI: <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2023.113926>.
20. A. Shvets, S. Donetskyi, *Identification of hidden and rare attractors in some electroelastic systems with limited excitation*, Springer Proc. Complexity, Springer, Cham, 865–878 (2021); DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-70795-8_60.
21. A. Sommerfeld, *Beitrag zum dynamischen Ausbau der Festigkeitslehre*, Phys. Z., **3**, 266–271 (1902).
22. V. O. Kononenko, *Vibrating system with a limited power-supply*, Iliffe, London (1969).
23. J. W. Miles, *Nonlinear surface waves in closed basins*, J. Fluid Mech., **75**, № 3, 419–448 (1976); DOI: [10.1017/S002211207600030X](https://doi.org/10.1017/S002211207600030X).
24. J. W. Miles, *Resonant motion of a spherical pendulum*, Phys. D, **11**, № 3, 309–323 (1984); DOI: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(84\)90013-7](https://doi.org/10.1016/0167-2789(84)90013-7).
25. J. W. Miles, *Internally resonant surface waves in circular cylinder*, J. Fluid Mech., **149**, 1–14 (1984); DOI: [10.1017/S0022112084002500](https://doi.org/10.1017/S0022112084002500).
26. J. W. Miles, *Resonantly forced surface waves in circular cylinder*, J. Fluid Mech., **149**, 15–31 (1984); DOI: [10.1017/S0022112084002512](https://doi.org/10.1017/S0022112084002512).
27. Т. С. Краснополяская, А. Ю. Шве́ц, *Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением*, Ин-т комп. исследований, R&C Dynamics (2008).
28. T. S. Krasnopol'skaya, A. Yu. Shvets, *Dynamical chaos for a limited power supply for fluid oscillations in cylindrical tanks*, J. Sound Vib., **322**, № 3, 532–553 (2009); DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.09.007>.
29. Jiaoxun Kuang, Yuhao Cong, *Stability of numerical methods for delay differential equations*, Elsevier (2005).
30. G. Benettin, L. Galgani, J.-M. Strelcyn, *Kolmogorov entropy and numerical experiments*, Phys. Rev. A., **14**, № 6, 2338–2342 (1976); DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.14.2338>.

31. G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, J.-M. Strelcyn, *Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems — a method for computing all of them. I — Theory. II — Numerical application*, *Meccanica*, **15**, № 1, 21–30 (1980); DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02128236>.
32. M. Hinon, *A two-dimensional mapping with a strange attractor*, *Comm. Math. Phys.*, **50**, № 1, 69–77 (1976); DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01608556>.
33. M. Hinon, *On the numerical computation of Poincaré maps*, *Phys. D*, **5**, № 2, 412–415 (1982); DOI: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(82\)90034-3](https://doi.org/10.1016/0167-2789(82)90034-3).
34. P. Palaniyandi, *On computing Poincaré map by Hénon method*, *Chaos Solitons Fractals*, **39**, Issue 4, 1877–1882 (2009); DOI: <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2007.06.118>.
35. *Handbook of applications of chaos theory*, ed. C. H. Skiadas, CRC Press, Boca Raton, FL (2016); DOI: <https://doi.org/10.1201/b20232>.
36. P. Manneville, Y. Pomeau, *Different ways to turbulence in dissipative dynamical systems*, *Phys. D*, **1**, № 2, 219–226 (1980); DOI: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(80\)90013-5](https://doi.org/10.1016/0167-2789(80)90013-5).
37. Y. Pomeau, P. Manneville, *Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems*, *Comm. Math. Phys.*, **74**, № 2, 189–197 (1980); DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01197757>.
38. P. Berge, Y. Pomeau, C. Vidal, *Order within chaos: towards a deterministic approach to turbulence*, John Wiley & Sons, New York (1984).
39. M. J. Feigenbaum, *Quantitative universality for a class of nonlinear transformations*, *J. Stat. Phys.*, **19**, № 1, 25–52 (1978); DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01020332>.
40. M. J. Feigenbaum, *The universal metric properties of nonlinear transformations*, *J. Stat. Phys.*, **21**, № 6, 669–706 (1979); DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01107909>.
41. A. Yu. Shvets, V. A. Sirenko, *Scenarios of transitions to hyperchaos in nonideal oscillating systems*, *J. Math. Sci. (N.Y.)*, **243**, № 2, 338–346 (2019); DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04543-z>.
42. A. Y. Shvets, *Nonisolated limit sets for some hydrodynamic systems with limited excitation*, *J. Math. Sci. (N.Y.)*, **274**, 912–922 (2023); DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06650-4>.

Одержано 19.02.25