

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ЕВОЛЮЦІЙНИМИ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ РІВНЯННЯМИ НА ПІВОСІ

Андрій Латиш, Ольга Кічмаренко

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

вул. Всеволода Змієнка, 2, Одеса, 65082, Україна

e-mail: andrii.latysh@gmail.com,

olga.kichmarenko@gmail.com, відповідальна за листування

The problem of optimal control of functional differential equations of parabolic type in a Banach space on the semiaxis is considered. Sufficient coefficient conditions for the existence of an optimal pair are obtained. The connection between the optimal pair on a finite interval and on the semiaxis is investigated.

Розглянуто задачу оптимального керування функціонально-диференціальними рівняннями параболічного типу в банаховому просторі на півосі. Отримано достатні коефіцієнтні умови існування оптимальної пари. Досліджено зв'язок між оптимальною парою на скінченному інтервалі та на півосі.

1. Вступ. У цій статті розглянуто задачу оптимального керування еволюційними функціонально-диференціальними рівняннями в банаховому просторі на півосі. Задачу розглядаємо до моменту виходу розв'язку із деякої області банахового простору; задача має вигляд

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= Au + f_1(t, u_t) + f_2(t, u_t)z(t), \\ u(t) &= \varphi_0(t), \quad t \in [-h, 0],\end{aligned}\tag{1}$$

з критерієм якості

$$J[z] = \int_0^\tau (e^{-\gamma t} G(t, u_t) + B(t, z(t))) dt \rightarrow \inf\tag{2}$$

або

$$J[z] = \int_0^\tau (e^{-\gamma t} G(t, u_t) + \|z(t)\|^2) dt \rightarrow \inf.\tag{3}$$

Тут $h > 0$ — інтервал запізнення, $t \geq 0$, A — лінійний (необмежений) оператор у банаховому просторі $X (A: X \rightarrow X)$ з нормою $\|\cdot\|$, $u_t = u(t + \Theta)$, $\Theta \in [-h, 0]$, і всі $t \geq 0$, u_t належить простору $C = C([-h, 0], X)$ неперервних функцій зі стандартною нормою

$\|\varphi\|_C = \max_{\Theta \in [-h, 0]} \|\varphi(\Theta)\|$, D — деяка область у $[-h, \infty) \times C$, ∂D — її межа і $\bar{D} = D \cup \partial D$, τ — момент першого виходу розв'язку (t, u_t) на ∂D .

Відображення f_1 і f_2 визначено в D і $f_1: D \rightarrow X$, $f_2: D \rightarrow \mathfrak{L}(X, X)$, де $\mathfrak{L}(X, X)$ — простір лінійних обмежених операторів, які діють із X у X , з нормою $\|\cdot\|_{\mathfrak{L}}$, $z(t) \in X$ — параметр керування.

Розв'язок початкової задачі (1) будемо розуміти в сенсі м'якого розв'язку (див. п. 2). Зазначимо, що при цьому момент виходу τ залежить від керування z , а це суттєво ускладнює задачу, оскільки добре відомо [1], що на відміну від рівнянь без запізнення розв'язок початкової задачі (1) може й не досягнути межі області D .

Теорію оптимального керування функціонально-диференціальними рівняннями у скінченновимірному випадку достатньо повно викладено в [2].

В останні роки багато авторів зробили внесок у дослідження питань існування оптимального керування для різних типів нелінійних функціонально-диференціальних рівнянь у нескінченновимірних просторах [3–7]. Зокрема, у згаданих роботах автори розглядали задачі з фіксованим моментом виходу $\tau = T$ (тут T — кінець інтервалу, що розглядається). При цьому застосовувалися різні методи, включаючи принцип максимуму, метод динамічного програмування, прямі методи дослідження екстремальних задач. У роботах [8–11] для дослідження оптимізаційних задач застосовували метод усереднення.

Ця стаття узагальнює на нескінченновимірний випадок результати робіт [12, 13] і є продовженням статті [14], у якій таку задачу розглядали на скінченному інтервалі. У цій роботі отримано такі головні результати:

1. Доведено існування оптимальної пари для задач (1), (2) та (1), (3). Достатні умови мають коефіцієнтний характер, що робить їх зручними для перевірки.
2. Встановлено варіаційні співвідношення, а саме доведено слабку збіжність оптимальних керувань, сильну збіжність оптимальних траєкторій, збіжність критеріїв якості задач на скінченних інтервалах до відповідних оптимальних керувань, оптимальних траєкторій і критеріїв якості задач на півосі при збільшенні довжини інтервалу, що розглядається.

Статтю організовано у такий спосіб. У п. 2 наведено необхідні поняття й означення і дано строгу постановку задачі; також сформульовано основні результати роботи. Їхнє доведення наведено в п. 3. У п. 4 отримані абстрактні результати застосовано до функціонально-диференціальних рівнянь із частинними похідними.

2. Необхідні означення й основні результати. Нехай X — рефлексивний банахів простір із нормою $|\cdot|$, A — лінійний оператор, $A: X \rightarrow X$, із областю $D(A)$, яка щільна в X , і A — генератор C_0 напівгрупи $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ обмежених операторів у X . Припустимо, що напівгрупа $S(t)$ є компактною для $t > 0$.

Надалі розв'язки рівняння (1) будемо розглядати в сенсі м'якого розв'язку.

Означення 2.1. Будемо говорити, що функція $u(t) \in X$ є м'яким розв'язком задачі (1) на $[0, T]$, якщо:

- 1) $u(t) = \varphi_0(t)$, $t \in [-h, 0]$;
- 2) $u \in C([0, T]; X)$;
- 3) $u(t)$ задовольняє інтегральне рівняння

$$u(t) = S(t)u(0) + \int_0^t S(t-s)[f_1(s_1 u_s) + f_2(s_1 u_s)z(s)]ds \quad (4)$$

на $[0, T]$.

Задачі оптимального керування розглядаємо за таких умов:

A1) допустимі керування — це функції $z(t) \in \mathfrak{L}^p((0, \infty); X)$, $p > 1$, де простір $\mathfrak{L}^p((0, \infty); X) = \mathfrak{L}^p$ із нормою $\|z\|_p^p = \int_0^\infty \|z(t)\|^p dt$, при цьому $z(t) \in F$ при $t \geq 0$, F — опукла замкнена множина із X , $0 \in F$, і $J[z] < \infty$. Не применшуючи загальності, можемо припустити, що $z(t) = 0$ для $t \geq \tau$, якщо $\tau < \infty$.

Множину допустимих керувань позначимо через $\mathfrak{U}$.

Позначимо $D_t = \{\varphi \in C, (t, \varphi) \in D\}$, $D_C = \bigcup_{t \geq 0} D_t$. Нехай D_C обмежена в C .

Додатково накладено такі умови на нелінійності:

A2) $f_1(t, \varphi)$ — відображення з D у X і $f_2(t, \varphi)$ — відображення з D у $\mathfrak{L}(X, X)$, для майже всіх t функції f_1, f_2 неперервні за φ для кожного фіксованого φ , f_1 і f_2 вимірні за t ;

A3) (умова лінійного зростання та умова Ліпшиця). Існує така додатна стала $K > 0$, що

$$\|f_1(t, \varphi)\| + \|f_2(t, \varphi)\|_{\mathfrak{L}} \leq K(1 + \|\varphi\|_C)$$

для всіх $(t, \varphi) \in D$ і

$$\|f_1(t, \varphi_1) - f_1(t, \varphi_2)\| + \|f_2(t, \varphi_1) - f_2(t, \varphi_2)\|_{\mathfrak{L}} \leq K\|\varphi_1 - \varphi_2\|_C$$

для всіх $(t, \varphi_1), (t, \varphi_2) \in D$;

A4) відображення $G: D \rightarrow \mathbb{R}^1$ неперервне за всіма змінними, $G(t, \varphi) \geq 0$ та існує стала K_G така, що $G(t, \varphi) \leq K_G(1 + \|\varphi\|_C)$;

A5) відображення $B: [0, \infty] \times X \rightarrow \mathbb{R}^1$ вимірне за всіма аргументами, існують додатні сталі a_0, a_1 такі, що

$$a_1\|z\|^p \geq B(t, z) \geq a_0\|z\|^p, \quad t \geq 0;$$

A6) $B(t, z)$ для всіх $t \geq 0$ є сильно диференційовним по z і похідна Фреше $\frac{\partial B}{\partial z}$ при $t \geq 0$ задовольняє також оцінку

$$\left\| \frac{\partial B}{\partial z} \right\|_{X^*} \leq a_3\|z\|_X^{p-1}$$

з деякою сталою $a_3 > 0$. Тут $\|\cdot\|_{X^*}$ — рівномірна операторна норма у просторі лінійних неперервних функціоналів над X .

Наступна теорема визначає достатні умови існування оптимальних керувань для задач (1), (2) і (1), (3).

Теорема 2.1. *Нехай виконуються умови A1)–A5). Тоді задачі оптимального керування (1), (2) і (1), (3) мають розв'язки $(u^*(t), z^*(t))$, де $z^*(t)$ — оптимальне керування, а $u^*(t)$ — відповідна оптимальна траєкторія, τ^* — перший момент часу, в який сегмент u_t^* досягає межі ∂D .*

Нехай $T > 0$ фіксоване. Через $(u^{T,*}(t), z_T^*(t))$ позначимо розв'язки задач (1), (2) і (1), (3) на скінченному інтервалі $[0, T]$.

Для задач оптимального керування на півосі покладемо

$$z_{T,\infty}(t) = \begin{cases} z_T^*(t), & t \in [0, T], \\ 0, & t > T, \end{cases} \quad (5)$$

$u^{T,\infty}(t)$ — відповідна до керування $z_{T,\infty}(t)$ траєкторія.

Очевидно, що це керування є допустимим для вихідної задачі.

Через $V(\varphi_0)$ позначимо функцію Беллмана задач керування на $[0, \infty]$, а через $V_T(\varphi_0)$ — функцію Беллмана відповідної задачі на інтервалі $[0, T]$.

Варіаційні співвідношення між задачами на скінченному й нескінченному інтервалах розглянуто в такій теоремі.

Теорема 2.2. Нехай виконуються умови A1)–A5). Тоді:

$$1) \quad V_T(\varphi_0) \rightarrow V(\varphi_0), \quad T \rightarrow \infty; \quad (6)$$

2) існує послідовність $T_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, така, що послідовність $\{z_{T_n, \infty}^*\}$ є мінімізатором для задачі (1.1), (1.2), тобто

$$J[z_{T_n, \infty}^*] \rightarrow V, \quad n \rightarrow \infty, \quad (7)$$

$$z_{T_n, \infty}^* \xrightarrow{w} z^*, \quad n \rightarrow \infty, \quad (8)$$

слабо в $\mathcal{L}^p$;

$$u^{T_n, \infty}(t) \rightarrow u^*(t), \quad n \rightarrow \infty, \quad (9)$$

поточково на $[0, \tau^*]$, рівномірно на кожному скінченному інтервалі.

Якщо задача (1), (2) має єдиний розв'язок, то збіжність у (7), (8) виконується для всіх $T \rightarrow \infty$.

Щодо функціонала якості (3) сформулюємо таке твердження.

Твердження 2.1. За умов теореми 2.2 для функціонала (3) всі твердження теореми 2.2 виконуються, при цьому збіжність оптимальних керувань у (8) є сильною в $\mathcal{L}^2((0, \infty); X)$.

3. Доведення основних результатів. 3.1. Доведення теореми 2.1. Спочатку зазначимо, що з умов теореми 2.1 випливає виконання умов теореми 3.2 [14]. Отже, м'який розв'язок задачі (1) існує і може бути продовжений до межі області D .

Єдиність випливає із таких міркувань. Припустимо, що існують два м'які розв'язки $u(t)$ і $v(t)$. Тоді маємо

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\|^q &\leq 3^{q-1} \left(K^q T^{q/p} M^q \int_0^t \|u_s - v_s\|^q ds \right. \\ &\quad \left. + M^q K^q \int_0^t \|u_s - v_s\|^q ds \left(\int_0^t \|z(s)\|^p ds \right)^{q/p} \right), \end{aligned}$$

де

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1 \quad \text{і} \quad M = \max_{t \in [0, \tau]} \|S(t)\|.$$

Отже,

$$\max_{s \in [0, t]} \|u(s) - v(s)\| \leq C_0 \int_0^t \max_{\tau \in [0, s]} \|u(s) - v(s)\|^q ds$$

і єдиність випливає з леми Гронуолла.

Далі зауважимо, що множина допустимих керувань $\mathcal{U}$ є непорожньою, оскільки $0 \in \mathcal{U}$. Дійсно, якщо $u(t, 0) \in \text{розв'язком рівняння (1)}$, який існує для такого керування, і $u_t(0)$ — відповідний елемент у C , то з умов A4), A5) та обмеженості D_C маємо

$$\begin{aligned} J[0] &= \int_0^\tau e^{-\gamma t} G(t, u_t(0)) dt + \int_0^\tau e^{-\gamma t} K_G(1 + \|u_t(0)\|_C) dt \\ &\leq K_G \int_0^\infty e^{-\gamma t} dt + K_G r \int_0^\infty e^{-\gamma t} dt < \infty, \end{aligned}$$

де r — радіус околу в C , який містить D_C .

Оскільки функціонал якості набуває невід'ємних значень, то існує невід'ємна нижня межа m значень $J[z]$, і тому існує послідовність допустимих керувань $\{z_n(t)\}$ таких, що $J[z_n] \rightarrow m$, $n \rightarrow \infty$, монотонно.

Нехай $u^{(n)}(t)$ — послідовність розв'язків рівняння (1), які відповідають керуванням $z_n(t)$, і нехай $[-h, \tau_n]$ — максимальний інтервал їхнього існування. Зауважимо, що $(\tau_n, u_{\tau_n}^{(n)}) \in \partial D$, тоді

$$m + 1 \geq a_0 \int_0^{\tau_n} \|z_n(t)\|^p dt = a_0 \int_0^\infty \|z_n(t)\|^p dt \quad (10)$$

згідно з умовою A1) для достатньо великих n . Оскільки X рефлексивне, то $z_n(t)$ є слабо компактною в $\mathcal{L}^p$. Це означає, що вона містить слабо збіжну підпослідовність. Не применшуючи загальності, припустимо, що $z_n(t)$ і є слабо збіжною до $z^* \in \mathcal{L}^p$.

Використовуючи лему Мазура [15, розд. V] та опуклість і замкненість F , маємо, що $z^*(t) \in F$ майже для всіх $t \geq 0$. Також отримуємо

$$\begin{aligned} J[z_n] &= \int_0^\tau \left(e^{-\gamma t} G(t, u_t^{(n)}) + B(t, z_n(t)) \right) dt \\ &\leq \int_0^{\tau_n} e^{-\gamma t} K_G \left(1 + \|u_t^{(n)}\|_C \right) dt + a_1 \int_0^{\tau_n} \|z_n(t)\|^p dt < \infty. \end{aligned}$$

Отже, керування z^* є допустимим.

Тепер розглянемо послідовність розв'язків $u^{(n)}(t, z_n) = u^{(n)}(t)$ рівняння (1), які відповідають керуванням $z_n(t)$. Для $t \in [0, \tau_n]$ одержуємо

$$u^{(n)}(t) = S(t)\varphi_0(0) + \int_0^t S(t-s) \left[f_1(s, u_s^{(n)}) + f_2(s, u_s^{(n)})z_n(s) \right] ds.$$

З використанням $u^{(n)}(t)$ побудуємо функції $v^{(n)}(t)$, визначені на напівосі у такий спосіб:

$$v^{(n)} = \begin{cases} u^{(n)}(t), & t \in [-h, \tau_n], \\ u^{(n)}(\tau_n), & t > \tau_n. \end{cases} \quad (11)$$

Оскільки D_C є обмеженою, то існує $C > 0$ така, що

$$\|v^{(n)}(t)\| \leq C, \quad t \geq 0. \quad (12)$$

Із теореми 3.2 [14] отримуємо, що $(\tau_n, u_{\tau_n}^{(n)}) \in \partial D$, з (6) із використанням рівномірної неперервності $u_t^{(n)}$ на $[0, \tau_n]$ маємо $\|u_{\tau_n}^{(n)}\| \leq C$ і $\lim_{t \rightarrow \tau_n - 0} u^{(n)}(t) = u^{(n)}(\tau_n)$.

Оберемо довільне $T > 0$ і зафіксуємо його. Покажемо, що сім'я функцій $\{v^{(n)}(t)\}$ є компактом на $([0, T], X)$. Будемо використовувати нескінченновимірну версію теореми Арцела – Асколі [16]. Доведемо,

1) що для довільного $t \in [0, T]$, $n \in \mathbb{N}$, множина $P_n(t) = \{v^{(n)}(t)\}$ є передкомпактом у X ;

2) а також рівностепеневу неперервність сім'ї функцій $\{v^n\}$ на $[0, T]$.

Для цього сформулюємо й доведемо такі леми.

Лема 3.1. Нехай $T > 0$. Розглянемо неперервну функцію $u(t)$ на $t \in [-h, T]$ і u_t — її асоційований сегмент на $[-h, 0]$.

Якщо $u_0 = \varphi$, то

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u_t\|_C \leq \|\varphi\|_C + \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|. \quad (13)$$

Доведення. Маємо

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u_t\|_C = \sup_{t \in [0, T]} \sup_{\Theta \in [-h, 0]} \|u(t + \Theta)\| = \sup_{t \in [-h, T]} \|u(t)\| \leq \|\varphi\|_C + \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|.$$

Наступна лема є простим наслідком твердження 8.1 із [17].

Лема 3.2. Якщо $S(t)$ при $t > 0$ є компактними операторами і $p \geq 1$, то оператор

$$Hf(t) = \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \quad f \in \mathfrak{L}^p(0, T; X),$$

є компактом із $\mathfrak{L}^p(0, T; X)$ у $C([0, T]; X)$.

Продовжимо доведення теореми 2.1.

З умови A3) отримуємо

$$\left\| f_1(s, v_s^{(n)}) \right\|_p^p \leq K^p \int_0^T \left(1 + \|v_s^{(n)}\|_C \right)^p ds \leq C_1$$

для деякої сталої $C_1 > 0$ згідно з (12), (13).

Із A3), (10) і (13) маємо

$$\left\| f_2(s, v_s^{(n)}) z_n(s) \right\|_p^p \leq K^p \left\| \int_0^T \left(1 + \|v_s^{(n)}\|_C \right) \right\|_C^p \|z_n(s)\|^p ds \leq C_2$$

для деякої сталої $C_2 > 0$.

За лемою 3.2 і з урахуванням (11) множина функцій $P_n(t)$ є передкомпактом у X для всіх $t \in [0, T]$.

Доведення рівномірної неперервності аналогічне до доведення теореми 2.1 з [18].

Отже, існує підпослідовність $v^{(n_k)}(t)$ послідовності $v^{(n)}(t)$ така, що $v^{(n_k)}(t)$ збігається рівномірно до $v^*(t)$ на $[0, T]$. Функція $v^*(t)$ визначена та неперервна на $[0, T]$ і тому v_t^* існує як елемент простору C для всіх $t \in [0, T]$. Покажемо, що існує підпослідовність послідовності $\{v^{(n)}(t)\}$, яка збігається поточково на $[0, \infty)$ до деякої неперервної функції. Для цього використаємо діагональний метод.

Для $T = 1$ маємо підпослідовність $\{v_1^{(n)}\}$ послідовності $\{v^{(n)}\}$ таку, що $v_1^{(n)} \rightrightarrows v_1^*$, $n \rightarrow \infty$, на $[0, 1]$.

Для $T = 2$ існує підпослідовність $\{v_2^{(n)}\}$ послідовності $\{v_1^{(n)}\}$ така, що $v_2^{(n)} \rightrightarrows v_2^*$, $n \rightarrow \infty$, на $[0, 2]$. Зазначимо, що $v_2^*(t) = v_1^*(t)$ для $t \in [0, 1]$.

Продовжуючи цей процес, отримуємо, що для кожного натурального числа N існує підпослідовність $\{v_N^{(n)}(t)\}$ послідовності $\{v_{N-1}^{(n)}(t)\}$ така, що $v_N^{(n)} \rightrightarrows v_N^*$ на $[0, N]$ і $v_N^*(t) = v_{N-1}^*(t)$ для $t \in [0, N-1]$.

Застосовуючи діагональний метод, ми можемо побудувати підпослідовність $\{v_N^{(n)}(t)\}$ послідовності $\{v^{(n)}(t)\}$ таку, що збігається поточково на $t \in [0, \infty)$ до неперервної функції $v^*(t)$, визначену таким чином:

$$v^*(t) = v_N^*(t) \quad \text{на } [0, N].$$

Згадаємо, що $\{v_N^{(n)}(t)\}$ рівномірно збігається до $v^*(t)$ на будь-якому фіксованому інтервалі $[0, T]$. Без втрати загальності можемо припустити, що послідовність $v^{(n)}(t)$ є збіжною, а відповідна послідовність керувань $\{z^{(n)}(t)\}$ є слабо збіжною. Оскільки $v^*(t)$ визначена та неперервна на $[0, \infty)$, то v_t^* існує як елемент простору C для всіх $t \geq 0$.

Нехай τ^* — перший момент часу, коли (t, v_t^*) досягає межі ∂D . Тоді

$$\tau^* = \begin{cases} \inf\{t \geq 0 : (t, v_t^*) \in \partial D, \\ \infty, & (t, v_t^*) \in D, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Зауважимо, що $v_{\tau_n}^{(n)} = v^{(n)}(\tau_n + \Theta) = u^{(n)}(\tau_n + \Theta) = v_{\tau_n}^{(n)}$, і отже, τ_n є першим моментом часу, коли $(t, v_t^{(n)})$ досягає ∂D .

Тепер покажемо, що $\tau^* \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \tau_n$. Припустимо супротивне:

$$\tau^* > \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \tau_n. \quad (14)$$

Розглянемо два випадки: $\tau^* < \infty$ і $\tau^* = \infty$.

1) Якщо $\tau^* < \infty$, то $\tau^* > \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \tau_n = \tau$.

Оберемо довільне $T \in [0, \infty]$ таке, що $T \geq \tau^*$. Очевидно, існує підпослідовність $\{\tau_{n_k}\}$ послідовності $\{\tau_n\}$ така, що $\tau_{n_k} \rightarrow \tau$ при $n_k \rightarrow \infty$.

Отже, для достатньо великого n_k маємо $\tau_{n_k} < \tau^*$ і

$$(\tau_{n_k}, v_{\tau_{n_k}}^*) \in D, \quad (\tau, v_\tau^*) \in D, \quad (15)$$

але $(\tau_{n_k}, v_{\tau_{n_k}}^{n_k}) \in \partial D$.

З іншого боку, беручи до уваги рівномірну на $[-h, T]$ неперервність функції $v^*(t)$, маємо $v_{\tau_{n_k}}^{(n_k)} \rightarrow v_\tau^*$ у C . Дійсно,

$$\begin{aligned} & \sup_{-h \leq \Theta \leq 0} \|v^{(n_k)}(\tau_{n_k} + \Theta) - v^*(\tau + \Theta)\| \\ & \leq \sup_{-h \leq \Theta \leq 0} \|v^{(n_k)}(\tau_{n_k} + \Theta) - v^*(\tau_{n_k} + \Theta)\| \\ & \quad + \sup_{-h \leq \Theta \leq 0} \|v^*(\tau_{n_k} + \Theta) - v^*(\tau + \Theta)\| \rightarrow 0, \quad n_k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Оскільки множина ∂D є замкнутою, то $(\tau, v_\tau^*) \in \partial D$. Це суперечить (15).

2) Нехай $\tau^* = \infty$ і $\tau < \infty$. Оберемо $T_2 > \tau$.

Тепер застосуємо аналогічні міркування на $[0, T_2]$. Отримаємо, що цей випадок зводиться до попереднього.

Отже, $\tau^* \leq \tau$.

Покладемо $u^*(t) = v^*(t)$ для $t \in [0, \tau^*]$ у випадку скінченного τ^* і $t \in [0, \infty)$ при $\tau^* = \infty$. Покажемо, що $u^*(t)$ є розв'язком початкової задачі (1), якому відповідає керування $z^*(t)$.

Розглянемо такі три випадки:

1) Якщо $\tau < \infty$, то доведення є аналогічним до доведення відповідного факту в [14], теорема 2.1.

2) Якщо $\tau = \infty$, але $\tau^* < \infty$. У цьому випадку або існує підпослідовність $\{\tau_{n_k}\}$ послідовності $\{\tau_n\}$ така, що $\tau_{n_k} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, або лише скінченна кількість $\tau_n < \infty$. Тоді для достатньо великого n_k маємо $v^{(n_k)}(t) = u^{(n_k)}(t)$ при $t \in [0, \tau^*]$ і $u^{(n_k)} \rightrightarrows u^*$ при $n_k \rightarrow \infty$ на $[0, \tau^*]$. Далі доведення аналогічне до доведення теореми 2.1 з [14].

3) Якщо $\tau^* = \infty$, то оберемо довільне $T > 0$ і розглянемо відрізок $[0, T]$. Аналогічно до попереднього випадку існує підпослідовність $\{\tau_{n_k}\}$ така, що $\tau_{n_k} \rightarrow \infty$ при $n_k \rightarrow \infty$.

Тоді на $[0, T]$ для достатньо великого n_k маємо $v^{(n_k)}(t) = u^{(n_k)}(t)$ на $[0, T]$, тому $v^{(n_k)} \rightrightarrows u^*$ на $[0, T]$ при $n \rightarrow \infty$.

Подальше доведення є аналогічним до попереднього випадку. Завдяки довільності значення T отримуємо функцію $u^*(t)$, яка є розв'язком задачі (1) для $t \geq 0$.

Залишилося показати, що керування $z^*(t)$ є оптимальним. Знову розглянемо два випадки.

1. Нехай $\tau^* < \tau$. У цьому випадку існує підпослідовність $\{\tau_{n_k}\}$ послідовності $\{\tau_n\}$ така, що $\tau_{n_k} \rightarrow \tau$, $n_k \rightarrow \infty$, або у випадку $\{\tau = \infty\}$ лише не більш ніж скінченна кількість $\tau_n < \infty$. Тому для достатньо великих n_k знову отримуємо $v^{(n_k)}(t) = u^{(n_k)}(t)$ для $t \in [0, \tau^*]$ і $u^{(n_k)}(t) \rightrightarrows u^*(t)$, $n_k \rightarrow \infty$, на $[0, \tau^*]$.

Також, очевидно, що для всіх $t \in [0, \tau^*]$ маємо

$$\|u_t^{(n_k)} - u_t^*\|_C \rightarrow 0, \quad n_k \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Тоді

$$\int_0^{\tau_{n_k}} e^{-\gamma t} G(t, u_t^{(n_k)}) dt + \int_0^{\tau_{n_k}} B(t, z^{(n_k)}(t)) dt$$

$$\geq \int_0^{\tau^*} e^{-\gamma t} G(t, u_t^{(n_k)}) dt + \int_0^{\tau^*} B(t, z^{(n_k)}(t)) dt. \quad (17)$$

З (16) випливає, що підінтегральний вираз у першому доданку (17) для кожного t прямує до $G(t, u_t^*)$. З того, що D_C є обмеженою, та з умови лінійного зростання на $G(t, \varphi)$ випливає, що для деякої сталої $K_1 > 0$ маємо оцінку $G(t, u_t^{(n_k)}) \leq K_1$. Тоді, використовуючи теорему мажорантної збіжності Лебега, отримуємо

$$\int_0^{\tau^*} e^{-\gamma t} G(t, u_t^{(n_k)}) dt \rightarrow \int_0^{\tau^*} e^{-\gamma t} G(t, u_t^*) dt, \quad n_k \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Оскільки $B(t, z)$ є опуклим за другим аргументом z , то

$$B(t, \Psi(t)) \geq B(t, z^*(t)) + \langle B'_z(t, z^*(t)), \Psi(t) - z^*(t) \rangle \quad (19)$$

для кожного допустимого керування $\Psi(t) \in \mathfrak{U}$. Тут $\langle B'_z, \Psi - z^* \rangle$ — дія лінійного неперервного функціонала B'_z на елемент $(\Psi(t) - z^*(t)) \in X$.

Отже, використовуючи умову А6), маємо

$$\int_0^{\tau^*} \left\| \frac{\partial B(t, z^*(t))}{\partial z} \right\|_{X^*}^q dt \leq a_3 \int_0^{\infty} \|z^*(t)\|^p dt < \infty,$$

де $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.

Отже, вираз

$$\int_0^{\tau^*} \langle B'_z(t, z^*(t)), \Psi(t) - z^*(t) \rangle dt$$

визначає лінійний неперервний функціонал у $\mathfrak{L}^p$. Тепер нехай $\Psi(t) = z^{(n_k)}(t)$ у (19) і, використовуючи слабку збіжність z_{n_k} до z^* для другого доданка в (17), одержуємо

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} \inf \int_0^{\tau^*} B(t, z_{n_k}(t)) dt \geq \int_0^{\tau^*} B(t, z^*(t)) dt. \quad (20)$$

З (17), (18) і (20) маємо

$$\begin{aligned} m &= \lim_{n_k \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\tau_{n_k}} e^{-\gamma t} G(t, u_t^{(n_k)}) dt + \int_0^{\tau_{n_k}} B(t, z_{n_k}(t)) dt \right) \\ &\geq \int_0^{\tau^*} e^{-\gamma t} G(t, u_t^*) dt + \int_0^{\tau^*} B(t, z^*(t)) dt. \end{aligned}$$

Отже, в цьому випадку $z^*(t)$ є оптимальним.

2. Нехай $\tau^* = \tau$. Оберемо довільне $t_1 < \tau^*$ і розглянемо відрізок $[0, t_1]$. На цьому відрізку $u^{(n_k)}(t) \rightrightarrows u^*(t)$ при $n_k \rightarrow \infty$, і тому $u_t^{(n_k)} \rightarrow u_t^*$ у C , $n_k \rightarrow \infty$.

За теоремою характеристики нижньої межі множина $\{n \in \mathbb{N} \mid \tau_n < t_1\}$ є скінченною, а відкритий інтервал (t_1, τ^*) може містити нескінченну кількість точок τ_n (якщо вони скінченні). Тому за аналогією з попереднім випадком одержуємо

$$m \geq \int_0^{t_1} e^{-\gamma t} G(t, u_t^*) dt + \int_0^{t_1} B(t, z^*(t)) dt.$$

Звідси граничним переходом при $t_1 \rightarrow \tau^*$ отримуємо, що $J[z^*] = m$. Для функціонала (3) доведення є аналогічним, умова А6) виконується автоматично, оскільки $\frac{\partial B}{\partial z} = 2z$.

Це доводить теорему 2.1.

3.2. Доведення теореми 2.2. Зафіксуємо $T > 0$ і позначимо через $V(\varphi_0)$ функцію Беллмана для поставленої задачі, а через $V_T(\varphi_0)$ — функцію Беллмана для відповідної задачі на $[0, T]$. З теореми 2.1 цієї роботи і теореми 2.1 з [14] випливає, що ці задачі мають розв'язки $(u^*(t), z^*(t))$ і $(u^{*,T}(t), z_T^*(t))$ відповідно. Зауважимо, що множина допустимих керувань на $[0, \infty)$ складається з допустимих керувань на $[0, T]$. Із допустимих керувань $z(t)$ на $[0, T]$, які є недопустимими на $[0, \infty)$, побудуємо керування

$$z_{T,\infty}(t) = \begin{cases} z(t), & t \in [0, T], \\ 0, & t > 0. \end{cases} \quad (21)$$

Нехай $\mathcal{U}_T$ описує сукупність множин допустимих керувань на $[0, \infty)$ із множиною керувань типу (21). Тоді на $[0, \infty)$ ця множина допустимих керувань співпадає з множиною $\mathcal{U}$, а на відрізках $[0, T]$ вона співпадає з множиною всіх допустимих керувань для задачі (1), (2) на $[0, T]$. Дійсно, з довільності допустимих керувань $z(t)$ на $[0, T]$, які є недопустимими на $[0, \infty)$, за правилом (21) побудуємо допустимі керування на $[0, \infty)$. З іншого боку, $\mathcal{L}^p([0, \infty); X) \subset \mathcal{L}^p([0, T]; X)$.

Нехай $Q_T = D \cap [-h, T]$, позначимо через τ_T^* перший момент часу, коли $u_T^{*,T}$ досягає межі області Q_T . Зауважимо, що у випадку $\tau_T^* < T$ керування $z_{T,\infty}^*(t)$ є оптимальним для задачі (1), (2) на $[0, \infty)$. Тоді $V = V_T$.

Тепер розглянемо випадок $\tau_T^* = T$. Позначимо через $u(t) = u(t, z_{T,\infty}^*(t))$ розв'язок початкової задачі (1), який відповідає керуванню $z_{T,\infty}^*(t)$. Вважатимемо, що $t \in [0, T]$, тоді $z_{T,\infty}^* = z_T^*(t)$. З єдиності розв'язку початкової задачі (1) маємо $u(t) = u^{*,T}(t)$ для $t \in [0, T]$. Отже, з визначення функції Беллмана та з використанням умови А5) маємо

$$\begin{aligned} V \leq J[z_{T,\infty}^*] &= \int_0^T \left(e^{-\gamma t} G(t, u_t^{*,T}) + B(t, z_T^*) \right) dt + \int_T^{\tau_T^*} e^{-\gamma t} G(t, u_t) dt \\ &= V_T + \int_T^{\tau_T^*} e^{-\gamma t} G(t, u_t) dt. \end{aligned} \quad (22)$$

Тут τ_T описує момент, коли u_t досягає межі області D . Другий доданок у (22) прямує до нуля при $T \rightarrow \infty$ завдяки обмеженості D_C і за теоремою домінантної збіжності.

Згадаємо, що τ^* — момент часу, коли оптимальна траєкторія u_t^* задачі (1), (2) на $[0, \infty)$ досягає межі області D .

Також зауважимо, що $\tau^* \leq T$, тоді пара $(u^*(t), z^*(t))$ є оптимальною для задачі на скінченному інтервалі $[0, T]$ з урахуванням побудови $\mathcal{U}_T$. Отже, в цьому випадку $V = V_T$.

Нехай $\tau^* > T$, тоді маємо

$$\begin{aligned} V = J[u^*] &= \int_0^T (e^{-\gamma t} G(t, u_t^*) + B(t, z^*(t))) dt \\ &\quad + \int_T^{\tau^*} (e^{-\gamma t} G(t, u_t^*) + B(t, z^*(t))) dt \\ &\geq V_T + \int_T^{\tau^*} (e^{-\gamma t} G(t, u_t^*) + B(t, z^*(t))) dt, \end{aligned} \quad (23)$$

але

$$\begin{aligned} \int_T^{\tau^*} (e^{-\gamma t} G(t, u_t^*) + B(t, z(t))) dt &\leq \int_T^{\infty} e^{-\gamma t} K_G (1 + K_1) dt \\ &\quad + \int_T^{\infty} a_1 \|z^*(t)\|^p dt \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (24)$$

Звідси, з одного боку, з (22) отримаємо

$$V - V_T \leq \int_T^{\tau_T} e^{-\gamma t} G(t, u_t) dt,$$

а з іншого боку маємо

$$V - V_T \leq \int_T^{\tau^*} e^{-\gamma t} G(t, u_t^*) + B(t, z^*(t)) dt.$$

Тоді, беручи до уваги (23) і (24), одержимо твердження 1) теореми 2.2, а саме (6).

Далі, для зручності, без утрати загальності можемо вважати, що $T = n \in \mathbb{N}$ — натуральне число.

Нехай знову $z_n^*(t)$ — оптимальне керування на $[0, n]$, і нехай $z_{n,\infty}^*(t)$ — допустиме керування задачі (1), (2) на $[0, \infty)$, яке визначається за допомогою (5).

Знову, якщо $\tau_n^* < n$ для деякого n , то $z_{n,\infty}^*$ є оптимальним керуванням для задачі на нескінченному інтервалі. Вважаємо, що τ_n^* — перший момент часу, коли $u_t^{*,n}$ досягає межі області D .

Тепер нехай $\tau_n^* = n$ для всіх n . Оскільки $V_n = J[z_n^*] \rightarrow V$, $n \rightarrow \infty$, то існує стала L така, що $V_n \leq L$. Але з умов A4), A5) та згідно з (5) маємо

$$L \geq V_n = J[z_n^*] \geq a_0 \int_0^n \|z_n^*(t)\|^p dt = a_0 \int_0^\infty \|z_{n,\infty}^*(t)\|^p dt,$$

і тому послідовність допустимих керувань $\{z_{n,\infty}^*\}$ є слабо компактною в $\mathcal{L}^p$.

Отже, існує слабо збіжна підпослідовність, яку без втрати загальності знову позначимо через $\{z_{n,\infty}^*\}$. Більш того, маємо

$$z_{n,\infty}^* \xrightarrow{w} z^*, \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{у } \mathcal{L}^p. \quad (25)$$

Так само, як для теореми 2.1, використовуючи лему Мазура, отримуємо, що $z^*(t) \in F$ майже для всіх t .

Позначимо через $u^{n,\infty}(t)$ розв'язок задачі (1), який відповідає керуванню $z_{n,\infty}^*(t)$. Нехай τ_n — перший момент часу, коли розв'язок $u^{n,\infty}(t)$ досягає межі області D . Очевидно, $\tau_n \geq n$ (тому що $\tau_n^* = n$). Тоді маємо

$$J[z_{n,\infty}^*] = V_n + \int_n^{\tau_n} (e^{-\gamma t} G(t, u_t^{n,\infty}) + B(t, z_{n,\infty}^*(t))) dt.$$

З побудови послідовності $z_{n,\infty}^*$ і умови A5) одержуємо

$$J[z_{n,\infty}^*] = V_n + \int_n^{\tau_n} (e^{-\gamma t} G(t, u_t^{n,\infty})) dt.$$

З того, що множина D_C є обмеженою, випливає, що $\|u_t^{n,\infty}\|_C \leq K_1$ для $t \leq \tau_n$. Тому

$$\begin{aligned} \int_n^{\tau_n} e^{-\gamma t} G(t, u_t^{n,\infty}) dt &\leq \int_n^{\tau_n} e^{-\gamma t} K_G (1 + \|u_t^{n,\infty}\|_C) dt \\ &\leq \int_n^\infty e^{-\gamma t} K_G (1 + K_1) dt \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Далі з $V_n \rightarrow V$ маємо

$$J[z_{n,\infty}^*] \rightarrow V, \quad n \rightarrow \infty.$$

Тобто $\{z_{n,\infty}^*\}$ є мінімізуючою послідовністю для задачі (1), (2).

Отже, твердження 2) теореми 2.2 доведено.

Тепер позначимо через $u^*(t)$ розв'язок початкової задачі (1), який відповідає керуванню $z^*(t)$ з (25). З теореми 3.2 [14], випливає, що такий розв'язок існує і він єдиний. Твердження, що пара $(u^*(t), z^*(t))$ є оптимальною для задачі (1), (2), може бути доведено аналогічно до відповідної частини доведення теореми 2.1. Тож твердження (9) теореми 2.2 є обґрунтованим.

Якщо задача (1), (2) має єдиний розв'язок, то з кожної підпослідовності $\{z_{n_k, \infty}^*\}$ послідовності $\{z_{n, \infty}^*\}$ у (25) можемо виділити послідовність, яка слабо збігається до оптимального керування z^* і це керування є єдиним.

Теорему 2.2 доведено.

3.3. Доведення твердження 2.1. Розглянемо задачу оптимального керування (1), (3). Очевидно, доведення вимагає лише встановлення факту, що послідовність $\{z_{T_n, \infty}^*\}$ збігається сильно до z^* . Маємо

$$\begin{aligned} V(\varphi_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\tau_n} e^{-\gamma t} G(t, u_t^{n, \infty}) dt + \int_0^{\tau_n} \|z_{n, \infty}^*(t)\|^2 dt \right) \\ &\geq \int_0^{\tau^*} e^{-\gamma t} G(t, u_t^*) dt + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\tau_n} \|z_{n, \infty}^*(t)\|^2 dt. \end{aligned} \quad (26)$$

Остання межа в (26) існує й співпадає з її нижньою межею. З побудови $z_{n, \infty}^*$ випливає, що

$$\int_0^{\tau_n} \|z_{n, \infty}^*(t)\|^2 dt = \int_0^{\infty} \|z_{n, \infty}^*(t)\|^2 dt.$$

Таким чином, з (26) маємо

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\tau} e^{-\gamma t} G(t, u_t^*) dt + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \|z_{n, \infty}^*(t)\|^2 dt \\ &= \int_0^{\tau^*} e^{-\gamma t} G(t, u_t^*) dt + \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \int_0^{\infty} \|z_{n, \infty}^*(t)\|^2 dt \\ &\geq \int_0^{\tau^*} e^{-\gamma t} G(t, u_t^*) dt + \int_0^{\infty} \|z^*(t)\|^2 dt \\ &\geq \int_0^{\tau^*} e^{-\gamma t} G(t, u_t^*) dt + \int_0^{\tau^*} \|z^*(t)\|^2 dt = V. \end{aligned}$$

Отже,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \|z_{n, \infty}^*(t)\|^2 dt = \int_0^{\infty} \|z^*(t)\|^2 dt.$$

Так, беручи до уваги (25), отримуємо сильну збіжність $z_{n, \infty}^*$ до z^* у $\mathcal{L}^2$, що й доводить твердження 2.1.

4. Застосування. Бідоменне рівняння. Класичні бідоменні рівняння виникають у різноманітних моделях, які описують поширення імпульсів в електрофізіології, і вперше

з'явилися в роботах Hodgkin і Huxley у 1950-ті роки. Бідоменне рівняння детально описано, наприклад, у монографії [19].

Система має вигляд

$$\begin{aligned}\partial_t u - f(u, w) - \nabla(a_i \nabla u_i) &= I_i \quad \text{в } (0, \infty) \times Q, \\ \partial_t u - f(u, w) + \nabla(a_e \nabla u_e) &= -I_e \quad \text{в } (0, \infty) \times Q, \\ \partial_t w - g(u, w) &= 0 \quad \text{в } (0, \infty) \times Q\end{aligned}\tag{27}$$

з крайовими умовами

$$a_i \nabla u_i \nu = 0, \quad a_e \nabla u_e \nu = 0 \quad \text{на } (0, \infty) \times Q,$$

і початковими даними $u(0) = u_0$, $w(0) = w_0$. Тут $Q \subset \mathbb{R}^d$ — обмежена область, функції u_i і u_e моделюють внутрішньо- та зовнішньоклітинні електричні потенціали, u — транс-мембранний потенціал, ν — вектор зовнішньої нормалі до ∂Q . Анізотропні властивості цієї системи описано через матриці провідності $a_i(x)$ і $a_e(x)$. Функції I_i та I_e описують відповідно внутрішньо- то зовнішньоклітинні стимулюючі струми. Функції f і g — нелінійні збурення.

У [20] введено нелокальний інтегро-диференціальний оператор

$$Au = -\nabla(u_i \nabla u) + \nabla\left(a_i \left(\{\nabla(a_i + a_e)\nabla\}^{-1} \nabla(a_i \nabla u)\right)\right),$$

який назвали бідоменним оператором.

Систему (27) можна переписати в абстрактній формі:

$$\begin{aligned}\partial_t u - f(u, w) + Au &= S, \\ \partial_t w - g(u, w) &= 0, \\ u(0) = u_0, \quad w(0) &= w_0.\end{aligned}\tag{28}$$

У [21] для цієї системи при певних умовах отримано теореми існування для м'яких і сильних розв'язків, доведено, що бідоменні операторні форми є аналітичними й компактними напівгрупами $S(t) = e^{-tA}$ у $\mathfrak{L}^p$ і $\mathfrak{L}^\infty$ ($p > 1$).

У [22, 23] бідоменні рівняння керуються стохастичним впливом процесів типу Q-Wiener. Доведено існування глобальних м'яких і сильних розв'язків, отримано умови існування інваріантних мір. У [24] вивчено функціонально-диференціальні бідоменні рівняння.

Розглянемо функціонально-диференціальне бідоменне рівняння

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -Au + f\left(x, \int_{-h}^0 \|u(t+\Theta)\|_H d\Theta, \int_{-h}^0 \|w(t+\Theta)\|_H d\Theta\right) \\ \quad + f_1\left(x, \int_{-h}^0 \|u(t+\Theta)\|_H d\Theta, \int_{-h}^0 \|w(t+\Theta)\|_H d\Theta\right) z(t), \\ \frac{dw}{dt} = g\left(x, \int_{-h}^0 \|u(t+\Theta)\|_H d\Theta, \int_{-h}^0 \|w(t+\Theta)\|_H d\Theta\right), \\ u(t) = \varphi(t), \quad w(t) = \psi(t), \quad t \in [-u, 0]. \end{cases}\tag{29}$$

Нехай $X = \mathcal{L}^2(Q) = H$, $H^1(Q)$ і $H^2(Q)$ — простори Соболева,

$$D(A) = \{u \in H^2(Q) \cap H_0, \nabla uv = 0, \text{ на } \partial Q\},$$

$$H_0 = \left\{ v \in H, \int_Q v \, dx = 0 \right\}.$$

Припустимо, що $a_i: Q \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ і $a_e: Q \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ — симетричні матриці й функції класу $C^1(\bar{Q})$. Далі, існують сталі $\underline{a}$ і $\bar{a}$, $0 < \underline{a} < \bar{a}$, такі, що

$$\underline{a}|\xi|^2 \leq \xi^* a_i(x) \xi \leq \bar{a}|\xi|^2$$

і

$$\underline{a}|\xi|^2 \leq \xi^* a_e(x) \xi \leq \bar{a}|\xi|^2 \quad (30)$$

для всіх $x \in \bar{Q}$ і $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Функції $f(y_1, y_2)$, $f_1(x, y_1, y_2)$ і $g(x_0, y_1, y_2)$ визначені для $x \in Q$, $y_1, y_2 \in [0, l]$, $l > 0$, і набувають значень у $\mathbb{R}^1$, є неперервними та задовольняють умову Ліпшиця при y_1, y_2 .

Область $D \subset [-h, \infty] \times C$ є множиною $\{(t, \varphi): t \in [-h, \infty), \varphi \in M\}$, де M — множина функцій $\varphi \in C = C([-h, 0], \mathcal{L}^2(Q))$ таких, що $\int_{-h}^0 \|\varphi(\Theta, \cdot)\|_H \, d\Theta \in (0, l)$, а ∂M — множина функцій $\varphi \in C$ таких, що $\int_{-h}^0 \|\varphi(\Theta, \cdot)\|_H \, d\Theta = l$ або $\varphi(\Theta, x) = 0$ майже всюди. При цьому природно вважати, що початкові функції $\varphi(t, x)$ і $\psi(t, x)$ належать M . Тоді $\partial D = \{[0, \infty) \times \partial M\}$.

Допустимими керуваннями будуть функції $z \in \mathcal{L}^2([0, \infty) \times Q)$ такі, що $z(t, x) \in F$ майже для всіх $t \geq 0$, $x \in Q$.

Перевіримо виконання умов A2), A3). Маємо

$$\begin{aligned} \left\| f \left(x, \int_{-h}^0 \|\varphi(\Theta, \cdot)\|_H \, d\Theta \right) \right\|_H^2 &= \int_Q \left| f \left(x, \int_{-h}^0 \|\varphi(\Theta, \cdot)\|_H \, d\Theta \right) \right|^2 dx \\ &\leq \int_Q 2 \left(|f(x, 0)|^2 + \left(L \int_{-h}^0 \|\varphi(\Theta, \cdot)\|_H \, d\Theta \right)^2 \right) dx \\ &\leq 2 \operatorname{mes} s^2 Q \left(\sup_{x \in Q} |f(x, 0)|^2 + L^2 h^2 \sup_{Q \in [-h, 0]} \|\varphi(\Theta, \cdot)\|_H^2 \right). \end{aligned}$$

Цю умову для g можна просто перевірити. Для f_1 одержуємо

$$\begin{aligned} \|f_1(x, \varphi)\xi\|_H^2 &= \int_Q \left| f_1 \left(x, \int_{-h}^0 \|\varphi(\Theta, \cdot)\|_H \, d\Theta \right) \xi(x) \right|^2 dx \\ &\leq 2 \int_Q \left(\left| f_1(x, 0) + L^2 h^2 \sup_{\Theta \in [-h, 0]} \|\varphi(\Theta, \cdot)\|_H^2 \xi(x) \right|^2 \right) dx, \quad \xi \in \mathcal{L}^2(Q). \end{aligned}$$

Тому $f_1(x, \varphi) \in \mathcal{L}(H, H)$ і задовольняє умову лінійного зростання.

Виконання умови Ліпшиця для f і g може бути легко перевірене.

Тепер перевіримо умову Ліпшиця для f_1 :

$$\begin{aligned}
 & \sup_{\|\xi\|_H \leq 1} \|(f_1(x, \varphi_1) - f_1(x, \varphi_2)\xi)\|_H^2 \\
 &= \int_Q \left(f_1 \left(x, \int_{-h}^0 \|\varphi_1(\Theta, \cdot)\|_H d\Theta \right) - f_1 \left(x, \int_{-h}^0 \|\varphi_2(\Theta, \cdot)\|_H d\Theta \right) \xi(x) \right)^2 dx \\
 &\leq \int_Q L^2 \left| \int_{-h}^0 \|\varphi_1(\Theta, \cdot)\|_H d\Theta - \int_{-h}^0 \|\varphi_2(\Theta, \cdot)\|_H d\Theta \right|^2 |\xi(x)|^2 dx \\
 &\leq L^2 \int_{-h}^0 \left| \|\varphi_1(\Theta, \cdot)\|_H - \|\varphi_2(\Theta, \cdot)\|_H \right|^2 d\Theta \\
 &\leq L^2 \int_{-h}^0 \|\varphi_1(\Theta, \cdot) - \varphi_2(\Theta, \cdot)\|_H^2 d\Theta \leq L^2 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_C^2 h.
 \end{aligned}$$

Отже, умова Ліпшиця для f_1 виконується.

Далі введемо умови на критерій якості.

Нехай F — опукла замкнена множина в R^1 .

1. Відображення $G: [0, \infty) \times M \rightarrow R[0, \infty)$ задовольняє умову A4).
2. Функція $B: [0, \infty) \times F \rightarrow [0, \infty)$ є вимірною за всіма змінними, опуклою за z та задовольняє нерівності $a_1|z|^p \geq B(t, z) \geq a_0|z|^p$, $t \geq 0$, для деяких додатних a_0, a_1 .
3. Функція $B(t, z)$ для всіх $t \geq 0$ неперервно диференційовна за другим аргументом z і

$$\left| \frac{\partial B}{\partial z} \right| \leq a_3 |z|^{p-1}$$

для деякої сталої $a_3 > 0$.

Допустимо керування — дійсна функція така, що $z(t) \in F$, $t \geq 0$, і

$$\int_0^\infty |z(t)|^p dt < \infty.$$

Отже, всі умови теорем 2.1, 2.2 виконано.

Від імені всіх авторів відповідальна за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів. Усі необхідні дані містяться в статті. Внесок авторів у цю роботу є таким: Ольга Кічмаренко запропонувала постановки задач і методологію отримання результатів, Андрій Латиш сформулював і довів усі результати самостійно. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Література

1. J. Hale, *Theory of functional differential equation*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg (1977).
2. V. Kolmanovskii, L. Shaikhet, *Control of systems with after-effect*, American Mathematical Society, Providence, RI (1992).
3. J. Lu, X. Yang, *A class of Hilfer fractional stochastic differential equations and optimal controls*, Adv. Differential Equations, **17**, Paper No. 17 (2019).
4. P. I. Kogul, O. P. Kупenko, G. Leugering, *On boundary exact controllability of one-dimensional wave equations with weak and strong interior degeneration*, Math. Methods Appl. Sci., **43**, № 2, 770–792 (2022).
5. X. Li, *Optimality conditions for controls of infinite dimensional systems*, Proceedings of the First World Congress of Nonlinear Analyses, Tampa, Florida, August 19–20, 1992 (1992).
6. M.-H. Chang, T. Pang, M. Pemy, *Optimal control of stochastic functional differential equations with a bounded memory*, Stochastics, **80**, № 1, 69–96 (2008).
7. O. V. Kapustyan, O. A. Kapustyan, A. V. Sukretna, *Approximate stabilization for nonlinear parabolic boundary-value problem*, Ukr. Math. J., **63**, № 5, 759–767 (2011).
8. A. M. Samoilenko, A. N. Stanzhetskii, *On the averaging of differential equations on an infinite interval*, Differ. Equat., **42**, № 4, 505–511 (2006).
9. T. V. Nosenko, O. M. Stanzhyts'kyi, *Averaging method in some problems of optimal control*, Nonlinear Oscil. (N.Y.), **11**, № 4, 539–547 (2008).
10. V. I. Kravets, T. V. Kovalchuk, V. V. Mohyl'ova, O. M. Stanzhyts'kyi, *Application of the method of averaging to the problems of optimal control over functional*, Differ. Equat., **70**, № 2, 232–242 (2018).
11. T. V. Kovalchuk, V. V. Mohyl'ova, T. V. Shoukopylas, *Averaging method in problems of optimal control over impulsive systems*, J. Math. Sci. (N.Y.), **247**, № 2, 314–327 (2020).
12. O. Kichmarenko, O. Stanzhyts'kyi, *Sufficient conditions for the existence of optimal controls for some classes of functional-differentials equations*, Nonlinear Dyn. Syst. Theory, **18**, № 2, 196–211 (2018).
13. O. Kichmarenko, O. Stanzhytskyi, *Optimal control problems for some classes of functional-differential equations on the semi-axis*, Miskolc Math. Notes, **20**, № 2, 1021–1037 (2019).
14. Л. Латиш, О. Кічмаренко, *Оптимальне керування функціонально-диференціальними рівняннями параболічного типу в банаховому просторі*, Нелін. коливання, **26**, № 1 (2023); **English translation:** J. Math. Sci., **278**, 1034–1054 (2024).
15. K. Yosida, *Functional analysis*, Springer-Verlag, Berlin, New York (1980).
16. H. Royden, *Real analysis*, The Macmillan Company, New York; Collier Macmillan Ltd., London (1963).
17. G. Da Prato, J. Zabczyk, *Stochastic equations in infinite dimensions*, Cambridge University Press, Cambridge (1992).
18. J. Wu, *Theory and applications of partial functional differential equations*, Springer-Verlag, New York (1996).
19. J. Keener, J. Sneyd, *Mathematical physiology*, Interdisciplinary Appl. Math., Springer-Verlag, New York (1998).
20. Y. Bourgault, Y. Goudière, C. Pierre, *Existence and uniqueness of the solution for the bidomain model used in cardiac electrophysiology*, Nonlinear Anal. Real World Appl., **10**, № 1, 458–482 (2009).
21. Y. Giga, N. Kajiwara, *On the a resolvent estimate for bidomain operators and its applications*, J. Math. Anal. Appl., **459**, № 1, 528–555 (2018).
22. M. Hieber, O. Misiats, O. Stanzhytskyi, *On the bidomain equations driven by stochastic forces*, Discrete Contin. Dyn. Syst., **40**, № 11, 6159–6177 (2020).
23. O. Kapustyan, O. Misiats, O. Stanzhytskyi, *Strong solutions and asymptotic behavior of bidomain equations with random noise*, Stoch. Dyn., **22**, № 6 (2022).
24. A. O. Stanzhytskyi, *On weak and strong solutions of paired stochastic functional differential equations in infinite-dimentional spaces*, J. Optim. Differ. Equat. Appl., **29**, № 2, 48–76 (2021).

Одержано 08.02.25