

КРИТЕРІЙ РОЗВ'ЯЗНОСТІ ЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З НЕВИРОДЖЕНИМ ЯДРОМ У ГІЛЬБЕРТОВИХ ПРОСТОРАХ

Валерій Журавльов

*Поліський національний університет
Старий бульв., 7, Житомир, 10008, Україна
email: vfz2008@ukr.net, відповідальний за листування*

Андрій Журавльов

*Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”
Берестейський просп., 37, Київ, 03056, Україна
email: andr2004zur@gmail.com*

Ірина Слюсаренко

*Поліський національний університет
Старий бульв., 7, Житомир, 10008, Україна
email: islusarenko62@gmail.com*

By using the general theory of pseudoinverse operators and orthoprojectors, we construct a pseudoinverse operator to an integral operator with a nondegenerate kernel and obtain criteria for the solvability of integral equations with a nondegenerate kernel and boundary-value problems for them in Hilbert spaces.

З використанням загальної теорії псевдообернених операторів та ортопроекторів побудовано псевдообернений оператор до інтегрального оператора з невідродженим ядром, отримано критерії розв'язності інтегральних рівнянь із невідродженим ядром і крайових задач для них у гільбертових просторах.

У цій роботі продовжено дослідження, розпочаті в [1 – 3], з вивчення умов розв'язності та побудови загальних розв'язків крайових задач для інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь із виродженим ядром у банахових просторах.

У роботах [4, 5] побудовано псевдообернений і узагальнено обернений оператори до інтегрального оператора з виродженим ядром. Інтегральні рівняння з невідродженим ядром і крайові задачі для них у скінченновимірних гільбертових просторах розглянуто у [6 – 8] та ін. Ці рівняння належать до класу нескрізь розв'язних рівнянь [9], оскільки інтегральний оператор не завжди має оберненого.

Встановлення умов існування розв'язків для нескрізь розв'язних операторних рівнянь у гільбертових просторах є нетривіальною задачею. Загальну теорію дослідження таких рівнянь і крайових задач для них у нескінченновимірних гільбертових просторах із використанням ортопроекторів і псевдообернених операторів розроблено в [10–13] та ін.

Дослідження інтегральних рівнянь із невідродженим ядром і крайових задач для них у нескінченновимірних гільбертових просторах авторам не відомі, тому ця тематика є актуальною. У цій статті із застосуванням ортопроекторів і псевдообернених операторів отримано умови існування та загальний вигляд розв'язків інтегральних рівнянь із невідродженим ядром і крайових задач для них у гільбертових просторах.

Постановка задачі. Нехай $\mathbf{H}$ і $\mathbf{H}_1$ — дійсні гільбертові простори зі скалярним добутком, $\mathcal{I} = [a, b]$ — скінченний проміжок, $z(t)$ — вектор-функція зі значеннями у гільбертовому просторі $\mathbf{H}$. На множині таких функцій визначимо скалярний добуток $(z(t), g(t)) = \int_a^b z(t)^* g(t) dt$, де “*” — операція транспонування.

Таким чином, визначили гільбертовий простір $\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})$, норму в якому одержано через скалярний добуток

$$\|z(t)\|_{\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})} = \sqrt{(z(t), z(t))_{\mathbf{H}}} = \sqrt{\int_a^b \|z(t)\|_{\mathbf{H}}^2 dt}.$$

Розглянемо лінійну крайову задачу для інтегрального рівняння

$$(Lz)(t) \equiv z(t) - \int_a^b K(t, s)z(s) ds = f(t), \quad (1)$$

$$\ell z(\cdot) = \alpha, \quad (2)$$

де невідроджене ядро $K(t, s)$ сумовне з квадратом у області $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$ та діє із гільбертового простору $\mathbf{H}$ у $\mathbf{H}$ за кожною змінною, функція $f(t) \in \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})$, $\ell: \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}) \rightarrow \mathbf{H}_1$ — лінійний обмежений вектор-функціонал, $\alpha \in \mathbf{H}_1$.

Розв'язок будемо шукати у класі функцій $z(t) \in \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})$.

Метою цієї роботи є: побудувати ортопроектори на нуль-простори $N(L)$ і $N(L^*)$ інтегрального оператора L (1) та йому спряженого L^* , псевдообернений оператор до інтегрального оператора з невідродженим ядром, встановити критерії розв'язності та отримати структуру загальних розв'язків рівняння (1) і крайової задачі (1), (2).

Псевдообернений оператор до інтегрального оператора з невідродженим ядром. Розв'язок інтегрального рівняння у гільбертовому просторі. Застосуємо до розв'язання крайової задачі (1), (2) методику з [14, с. 260].

Нехай $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^\infty$ — ортонормований базис гільбертового простору $\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})$ [15]. Складемо з базисних вектор-функцій $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1, \infty}$, зліченновимірну матрицю

$$\Phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_i(t), \dots).$$

Тоді будь-яку функцію $z(t)$ з простору $\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})$ можна навести у вигляді

$$z(t) = \Phi(t)\bar{z},$$

де $\bar{z}$ — вектор-стовпець, компоненти якого $\bar{z}_i = (\varphi_i(t) \cdot z(t)) = \int_a^b \varphi_i^*(t) z(t) dt$, $i = \overline{1, \infty}$, є коефіцієнтами Фур'є вектор-функції $z(t)$ за базисом $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$, тобто

$$\bar{z} = \int_a^b \Phi^*(t) z(t) dt.$$

Враховуючи викладене вище, утворимо коефіцієнти Фур'є функцій $z(t)$ і $f(t)$ [7; 14, с. 266]:

$$\bar{z} = \int_a^b \Phi^*(t) z(t) dt, \quad \bar{f} = \int_a^b \Phi^*(t) f(t) dt. \quad (3)$$

Далі утворимо коефіцієнти Фур'є ядра $K(t, s)$ як функції змінної s :

$$k_i(t) = \int_a^b \varphi_i^*(s) K(t, s) ds, \quad i = \overline{1, \infty},$$

а потім коефіцієнти Фур'є отриманих функцій за змінною t :

$$k_{ij} = \int_a^b \int_a^b \varphi_i^*(s) K(t, s) \varphi_j(t) ds dt, \quad i, j = \overline{1, \infty}.$$

Надалі будемо використовувати запис у векторно-матричній формі

$$K(t) = \int_a^b \Phi^*(s) K(t, s) ds$$

і

$$K = \int_a^b K(t) \Phi(t) dt = \int_a^b \int_a^b \Phi^*(s) K(t, s) \Phi(t) ds dt. \quad (4)$$

Застосовуючи вирази (3), (4) до інтегрального рівняння (1), отримуємо зліченну систему алгебраїчних рівнянь

$$\bar{z} - K\bar{z} = \bar{f}$$

або

$$D\bar{z} = \bar{f}, \quad (5)$$

де оператор $D = \{d_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty} = I - K$.

Під розв'язком системи (5) будемо розуміти послідовність чисел $\{\bar{z}_j\}_{j=1}^{\infty}$, при підстановці яких у рівняння (5) усі ряди $\sum_{j=1}^{\infty} d_{ij} \bar{z}_j$, $i = \overline{1, \infty}$, будуть збіжними, а їхні суми співпадуть із вільними членами правої частини [15]. Очевидно, що оператор D лінійний.

Нехай $D: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ — обмежений нормально розв'язний оператор.

Нормальна розв'язність оператора D означає, що він псевдооборотний та існують обмежені ортопроектори $P_{N(D)}$, $P_{N(D^*)}$ на нуль-простори $N(D)$ і $N(D^*)$ та обмежений псевдообернений оператор D^+ до оператора D [12].

Відомо [12], що при виконанні умови

$$P_{N(D^*)}\bar{f} = 0 \quad (6)$$

і лише за неї операторне рівняння (5) має сім'ю розв'язків

$$\bar{z} = P_{N(D)}\bar{z} + D^+\bar{f},$$

де $\bar{z}$ — довільний вектор гільбертового простору $\mathbf{H}$.

Таким чином, справджується така теорема.

Теорема 1. *Нехай оператор $D: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ нормально розв'язний. Тоді однорідна система (5) ($\bar{f} \equiv 0$) має сім'ю розв'язків*

$$\bar{z} = P_{N(D)}\bar{z},$$

де $\bar{z} \in \mathbf{H}$ — довільна стала.

Неоднорідна система (5) є розв'язною для тих і лише тих $\bar{f}$, які задовольняють умову (6), і має сім'ю розв'язків

$$\bar{z} = P_{N(D)}\bar{z} + D^+\bar{f}.$$

Отже, за теоремою Ріса–Фішера [16, с. 113] існує елемент $z(t) \in \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})$ такий, що координати вектора $\bar{z}$ є його коефіцієнтами Фур'є і має місце зображення

$$z(t) = \Phi(t)\bar{z} = \Phi(t)P_{N(D)}\bar{z} + \Phi(t)D^+\bar{f}, \quad (7)$$

де $\Phi(t)P_{N(D)}\bar{z}$ — розв'язок відповідного (1) однорідного рівняння $(Lz)(t) = 0$.

Використовуючи методику з [12, с. 266], можна показати, що множина елементів $z(t)$, визначених співвідношенням (7), є шуканою сім'єю розв'язків інтегрального рівняння (1).

Позначимо оператори

$$(P_{N(L)}z)(t) = \Phi(t)P_{N(D)} \int_a^b \Phi^*(s)z(s) ds, \quad (8)$$

$$(P_{N(L^*)}f)(t) = \Phi(t)P_{N(D^*)} \int_a^b \Phi^*(s)f(s) ds. \quad (9)$$

Покажемо, що оператори (8) і (9) є ортопроекторами.

Теорема 2. *Нехай $D: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ нормально розв'язний. Тоді оператори (8) і (9) є ортопроекторами на нуль-простори $N(L) \subset \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})$ і $N(L^*) \subset \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})$ операторів L і L^* .*

Доведення. Оператор P називається ортопроектором на нуль-простір оператора L , якщо

$$1) P^2 = P; \quad 2) P^* = P; \quad 3) LP = 0. \quad (10)$$

Доведення проведемо для оператора $P_{N(L)}$ (8).

1. Покажемо, що $P_{N(L)}^2 = P_{N(L)}$:

$$\begin{aligned} P_{N(L)}(P_{N(L)}z)(t) &= \Phi(t)P_{N(D)} \int_a^b \Phi^*(s) \left[\Phi(s)P_{N(D)} \int_a^b \Phi^*(\xi)z(\xi) d\xi \right] ds \\ &= \Phi(t)P_{N(D)} \int_a^b \Phi^*(s)\Phi(s) ds P_{N(D)} \left[\int_a^b \Phi^*(\xi)z(\xi) d\xi \right] = (P_{N(L)}z)(t), \end{aligned}$$

оскільки $\int_a^b \Phi^*(s)\Phi(s) ds = I$, а $P_{N(D)}^2 = P_{N(D)}$.

2. Покажемо, що оператор $P_{N(L)}$ задовольняє співвідношення

$$((P_{N(L)}z)(t), y(t))_{\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})} = (z(t), (P_{N(L)}y)(t))_{\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})},$$

тобто $P_{N(L)}^* = P_{N(L)}$;

$$\begin{aligned} ((P_{N(L)}z)(t), y(t))_{\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})} &= \int_a^b \left[\Phi(t)P_{N(D)} \int_a^b \Phi^*(s)z(s) ds \right]^* y(t) dt \\ &= \int_a^b \int_a^b [\Phi^*(s)z^*(s)]^* [\Phi(t)P_{N(D)}]^* y(t) ds dt \\ &= \int_a^b z^*(t)\Phi(s)P_{N(D)} \int_a^b \Phi^*(t)y(t) dt ds \\ &= (z(t), (P_{N(L)}y)(t))_{\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})}, \end{aligned}$$

оскільки $P_{N(D)}^* = P_{N(D)}$.

Таким чином,

$$(P_{N(L)}^*z)(t) = (P_{N(L)}z)(t) = \Phi(t)P_{N(D)} \int_a^b \Phi^*(s)z(s) ds.$$

3. Далі покажемо, що оператор $P_{N(L)}$ є проєктором на нуль-простір оператора L , тобто $LP_{N(L)} = 0$:

$$\begin{aligned} (LP_{N(L)}z)(t) &= \Phi(t)P_{N(D)} \int_a^b \Phi^*(s)z(s) ds - \int_a^b K(t, s) \left[\Phi(s)P_{N(D)} \int_a^b \Phi^*(\xi)z(\xi) d\xi \right] ds \\ &= \Phi(t)P_{N(D)}\bar{z} - \int_a^b K(t, s)\Phi(s)P_{N(D)}\bar{z} ds = 0, \end{aligned}$$

оскільки $\bar{z} = \int_a^b \Phi^*(s)z(s) ds$, а $z(t) = \Phi(t)P_{N(D)}\bar{z}$ — розв'язок однорідного рівняння $(Lz)(t) = 0$.

Отже, всі умови (10) виконано. А це означає, що оператор $P_{N(L)}$ — ортопроектор на нуль-простір інтегрального оператора L .

Для оператора $P_{N(L^*)}$ (9) властивості 1, 2 можна перевірити аналогічно, але необхідно показати, що ортопроектор $P_{N(L^*)}$ є проектором на нуль-простір $N(L^*)$ оператора L^* . Для цього скористаємося співвідношенням $P_{N(L^*)}L = 0$:

$$\begin{aligned} (P_{N(L^*)}Lz)(t) &= \Phi(t)P_{N(D^*)} \int_a^b \Phi^*(s) \left[z(s) - \int_a^b K(s, \xi)z(\xi) d\xi \right] ds \\ &= \Phi(t)P_{N(D^*)}\bar{z} - \Phi(t)P_{N(D^*)} \int_a^b \int_a^b \Phi^*(s)K(s, \xi)\Phi(\xi)\bar{z} d\xi ds \\ &= \Phi(t)P_{N(D^*)}\bar{z} - \Phi(t)P_{N(D^*)}K\bar{z} = \Phi(t)P_{N(D^*)}D\bar{z} = 0, \end{aligned}$$

оскільки $z(\xi) = \Phi(\xi)\bar{z}$, $D = I - K$, а $P_{N(D^*)}D = 0$.

Таким чином, оператор $P_{N(L^*)}$ — ортопроектор на нуль-простір $N(L^*)$ оператора L^* . Далі покажемо, що оператор

$$(L^+f)(t) = \Phi(t)D^+ \int_a^b \Phi^*(s)f(s) ds \quad (11)$$

є псевдооберненим до оператора L .

Теорема 3. Нехай $D: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ нормально розв'язний. Тоді оператор (11) є єдиним псевдооберненим за Муром–Пенроузом оператором до інтегрального оператора L .

Для доведення необхідно й достатньо показати, що оператор (11) задовольняє співвідношення

$$1) LL^+L = L, \quad 2) L^+LL^+ = L^+, \quad 3) (LL^+)^* = LL^+, \quad 4) (L^+L)^* = L^+L, \quad (12)$$

які визначають псевдообернений оператор [17].

Спочатку знайдемо суперпозицію операторів L^+ та L :

$$\begin{aligned} (L^+Lz)(t) &= \Phi(t)D^+ \int_a^b \Phi^*(s) \left[z(s) - \int_a^b K(s, \xi)z(\xi) d\xi \right] ds \\ &= \Phi(t)D^+ \left[\int_a^b \Phi^*(s)z(s) ds - \int_a^b \int_a^b \Phi^*(s)K(s, \xi)z(\xi) d\xi ds \right] \\ &= \Phi(t)D^+\bar{z} - \Phi(t)D^+K\bar{z} = \Phi(t)D^+[I - K]\bar{z} = \Phi(t)D^+D\bar{z} \\ &= \Phi(t)[I - P_{N(D)}]\bar{z} = \Phi(t)\bar{z} - \Phi(t)P_{N(D)}\bar{z} \end{aligned}$$

$$= z(t) - \Phi(t)P_{N(D)} \int_a^b \Phi^*(s)z(s) ds,$$

оскільки $z(t) = \Phi(t)\bar{z}$, а $\bar{z} = \int_a^b \Phi^*(s)z(s) ds$.

Таким чином, взявши до уваги (8), отримаємо

$$(L^+Lz)(t) = z(t) - \Phi(t)P_{N(D)} \int_a^b \Phi^*(s)z(s) ds = (I_{L_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})} - P_{N(L)})z(t).$$

Крім того, зважаючи на той факт, що $P_{N(L)}$ є ортопроектором, переконуємося, що умова 4) з (12) теж виконується:

$$(L^+L)^* = [I_{L_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})} - P_{N(L)}]^* = I_{L_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})} - P_{N(L)} = L^+L.$$

Далі знайдемо суперпозицію операторів L та L^+ :

$$\begin{aligned} (LL^+f)(t) &= \Phi(t)D^+ \int_a^b \Phi^*(s)f(s) ds - \int_a^b K(t,s)\Phi(s)D^+ \left[\int_a^b \Phi^*(\xi)f(\xi) d\xi \right] ds \\ &= \Phi(t)D^+\bar{f} - \int_a^b K(t,s)\Phi(s)D^+\bar{f} ds = \left[\Phi(t) - \int_a^b K(t,s)\Phi(s) ds \right] D^+\bar{f}, \end{aligned}$$

оскільки $\bar{f} = \int_a^b \Phi^*(s)f(s) ds$.

Позначимо $y(t) = (LL^+f)(t)$ і утворимо коефіцієнти Фур'є цієї функції:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \int_a^b \Phi^*(s)y(s) ds = \int_a^b \Phi^*(s)(LL^+f)(s) ds \\ &= \left[\int_a^b \Phi^*(s)\Phi(s) ds - \int_a^b \int_a^b \Phi^*(s)K(t,s)\Phi(t) ds dt \right] D^+\bar{f} \\ &= [I - K]D^+\bar{f} = DD^+\bar{f} = [I - P_{N(D^*)}]\bar{f}. \end{aligned}$$

Тоді $y(t) = \Phi(t)\bar{y}$ або

$$\begin{aligned} y(t) &= (LL^+f)(t) = \Phi(t)[I - P_{N(D^*)}]\bar{f} = \Phi(t)\bar{f} - \Phi(t)P_{N(D^*)}\bar{f} \\ &= f(t) - \Phi(t)P_{N(D^*)} \int_a^b \Phi^*(s)f(s) ds = ([I_{L_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})} - P_{N(L^*)}]f)(t). \end{aligned}$$

Враховуючи той факт, що $P_{N(L^*)}$ є ортопроектором, переконуємося, що умова 3) з (12) виконується:

$$(LL^+)^* = [I_{\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})} - P_{N(L^*)}]^* = [I_{\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})} - P_{N(L^*)}] = LL^+. \quad (13)$$

Перевіримо виконання властивостей 1), 2) з (12):

$$\begin{aligned} L(L^+Lz)(t) &= L \left[z(t) - \Phi(t)P_{N(D)} \int_a^b \Phi^*(s)z(s) ds \right] \\ &= \Phi(t)\bar{z} - \Phi(t)P_{N(D)}\bar{z} - \int_a^b K(t,s) [\Phi(s)\bar{z} - \Phi(s)P_{N(D)}\bar{z}] ds \\ &= z(t) - \int_a^b K(t,s)z(s) ds - \left[\Phi(t)P_{N(D)}\bar{z} - \int_a^b K(t,s)\Phi(s)P_{N(D)}\bar{z} ds \right] = (Lz)(t), \end{aligned}$$

оскільки

$$\Phi(t)P_{N(D)}\bar{z} - \int_a^b K(t,s)\Phi(s)P_{N(D)}\bar{z} ds = 0$$

як розв'язок однорідного рівняння $(Lz)(t) = 0$;

$$\begin{aligned} L^+L(L^+f)(t) &= (L^+f)(t) - \Phi(t)P_{N(D)} \int_a^b \Phi^*(s)(L^+f)(s) ds \\ &= \Phi(t)D^+ \int_a^b \Phi^*(s)f(s) ds - \Phi(t)P_{N(D)} \int_a^b \Phi^*(s)\Phi(s)D^+ \int_a^b \Phi^*(\xi)f(\xi) d\xi ds \\ &= \Phi(t)D^+ \int_a^b \Phi^*(s)f(s) ds = (L^+f)(t), \end{aligned}$$

тому що $\int_a^b \Phi^*(s)\Phi(s) = I$, а $P_{N(D)}D^+ = 0$.

Таким чином, оператор (11) є єдиним псевдооберненим до оператора L і справедлива така теорема.

Теорема 4. Нехай оператор $D: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ нормально розв'язний. Тоді відповідне (1) однорідне інтегральне рівняння має сім'ю розв'язків

$$z(t) = (P_{N(L)}\tilde{z})(t).$$

Неоднорідне інтегральне рівняння (1) розв'язне для тих і лише тих $f(t) \in \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})$, які задовольняють умову

$$(P_{N(L^*)}f)(t) = 0, \quad (14)$$

і при цьому має сім'ю розв'язків

$$z(t) = (P_{N(L)}\tilde{z})(t) + (L^+f)(t), \quad (15)$$

де $P_{N(L)}$ і $P_{N(L^*)}$ — ортопроектори (8), (9), L^+ — псевдообернений оператор (11) до оператора L , $\tilde{z}(t) \in \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})$ — довільний елемент.

Зауваження 1. Умова (14) еквівалентна умові

$$P_{N(D^*)} \int_a^b \Phi^*(s)f(s) ds = 0, \quad (16)$$

оскільки зліченновимірна матриця $\Phi(t)$ складається з лінійно незалежної системи векторів $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^\infty$, які є ортонормованим базисом гільбертового простору $\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})$.

Зауваження 2. Якщо оператор D оборотний, то ортопроектори $P_{N(D)} = 0$ і $P_{N(D^*)} = 0$, а $D^+ = D^{-1}$. Тоді $P_{N(L)} = 0$ і $P_{N(L^*)} = 0$, умову (14) буде завжди виконано, $L^+ = L^{-1}$ і з (15) будемо мати, що інтегральне рівняння (1) має єдиний розв'язок

$$z(t) = (L^{-1}f)(t) = \Phi(t)D^{-1} \int_a^b \Phi^*(s)f(s) ds.$$

Крайові задачі для інтегральних рівнянь у гільбертових просторах. Знайдемо умови, при яких крайова задача (1), (2) буде мати розв'язок.

Підставимо розв'язок (15) інтегрального рівняння (1) у крайову умову (2):

$$\ell z(\cdot) = (\ell P_{N(L)}\tilde{z})(\cdot) + (\ell L^+f)(\cdot) = \alpha. \quad (17)$$

Позначивши $Q = \ell P_{N(L)} = \ell \Phi(\cdot)P_{N(D)}$ та беручи до уваги, що $\tilde{\tilde{z}} = \int_a^b \Phi^*(s)\tilde{z}(s) ds$, з (17) отримаємо операторне рівняння щодо $\tilde{\tilde{z}}$:

$$Q\tilde{\tilde{z}} = \alpha - (\ell L^+f)(\cdot). \quad (18)$$

Нехай оператор $Q: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}_1$ нормально розв'язний. Позначимо $P_{N(Q)}: \mathbf{H} \rightarrow N(Q)$ і $P_{N(Q^*)}: \mathbf{H}_1 \rightarrow N(Q^*)$ ортопроектори на нуль-простори операторів Q та його спряженого Q^* , а через Q^+ — єдиний псевдообернений оператор до оператора Q .

Рівняння (18) має розв'язок тоді й лише тоді, коли виконується умова

$$P_{N(Q^*)}\{\alpha - (\ell L^+f)(\cdot)\} = 0. \quad (19)$$

При виконанні цієї умови рівняння (18) має сім'ю розв'язків

$$\tilde{\tilde{z}} = P_{N(Q)}\tilde{\tilde{z}} + Q^+\{\alpha - (\ell L^+f)(\cdot)\}. \quad (20)$$

Підставимо знайдене $\tilde{\tilde{z}}$ у (7):

$$z(t) = \Phi(t)P_{N(D)}[P_{N(Q)}\tilde{\tilde{z}} + Q^+\{\alpha - (\ell L^+f)(\cdot)\}] + (L^+f)(t).$$

Позначимо

$$\begin{aligned}(Gf)(t) &= (L^+ f)(t) - \Phi(t)P_{N(D)}Q^+(\ell L^+ f)(\cdot) \\ &= \Phi(t)[I - P_{N(D)}Q^+\ell\Phi(\cdot)]D^+ \int_a^b \Phi^*(s)f(s) ds\end{aligned}\quad (21)$$

узагальнений оператор Гріна напіводнорідної $\alpha = 0$ крайової задачі (1), (2).

Після перетворень отримаємо загальний розв'язок крайової задачі (1), (2):

$$z(t) = \Phi(t)P_{N(D)}P_{N(Q)}\bar{z} + (Gf)(t) + \Phi(t)P_{N(D)}Q^+\alpha. \quad (22)$$

Таким чином, справджується така теорема.

Теорема 5. Нехай $D: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ і $Q: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}_1$ — нормально розв'язні оператори. Тоді відповідна (1), (2) однорідна $f(t) = 0$, $\alpha = 0$ крайова задача має сім'ю розв'язків

$$z(t) = \Phi(t)P_{N(D)}P_{N(Q)} \int_a^b \Phi^*(s)\hat{z}(s) ds. \quad (23)$$

Неоднорідна крайова задача (1), (2) розв'язна для тих і лише тих $f(t) \in \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})$ і $\alpha \in \mathbf{H}_1$, які задовольняють систему умов

$$\begin{cases} P_{N(D^*)} \int_a^b \Phi^*(t)f(t) dt = 0, \\ P_{N(Q^*)} \left\{ \alpha - \ell\Phi(\cdot)D^+ \int_a^b \Phi^*(t)f(t) dt \right\} = 0, \end{cases} \quad (24)$$

і при цьому має сім'ю розв'язків

$$z(t) = \Phi(t)P_{N(D)}P_{N(Q)} \int_a^b \Phi^*(s)\hat{z}(s) ds + (Gf)(t) + \Phi(t)P_{N(D)}Q^+\alpha, \quad (25)$$

де $\hat{z}(t) \in \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})$ — довільний елемент, $(Gf)(t)$ — узагальнений оператор Гріна (21).

Зауваження 3. Якщо $\dim \ker Q^* = 0$, то ортопроектор $P_{N(Q^*)} = 0$. У цьому випадку друга умова системи (24) буде завжди виконуватись і при виконанні умови

$$P_{N(D^*)} \int_a^b \Phi^*(t)f(t) dt = 0$$

крайова задача (1), (2) буде мати сім'ю розв'язків (25).

Зауваження 4. Якщо $\dim \ker Q = 0$, то ортопроектор $P_{N(Q)} = 0$. У цьому випадку при виконанні системи умов (24) крайова задача (1), (2) буде мати єдиний розв'язок

$$z(t) = \Phi(t)P_{N(D)}Q^+\alpha + \Phi(t)[I - P_{N(D)}Q^+\ell\Phi(\cdot)]D^+ \int_a^b \Phi^*(t)f(t) dt.$$

Зауваження 5. Якщо $\dim \ker D = 0$, то ортопроектори $P_{N(D)} = 0$, $P_{N(D^*)} = 0$. У цьому випадку оператор $Q = \ell\Phi(\cdot)P_{N(D)}$ буде нульовим і як наслідок $P_{N(Q)} = I$, $P_{N(Q^*)} = I$.

Перша умова (24) буде виконуватися для будь-якої функції $f(t)$, а для розв'язності крайової задачі (1), (2) повинна виконуватися жорстка умова

$$\alpha - \ell\Phi(\cdot)D^{-1} \int_a^b \Phi^*(t)f(t) dt = 0,$$

при виконанні якої крайова задача (1), (2) буде мати єдиний розв'язок

$$z(t) = (L^{-1}f)(t) = \Phi(t)D^{-1} \int_a^b \Phi^*(s)f(s) ds.$$

Узагальнено обернений оператор до оператора крайової задачі. Розглянемо крайову задачу (1), (2) як операторне рівняння

$$\Lambda z = \begin{bmatrix} L \\ \ell \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} f \\ \alpha \end{bmatrix}.$$

Оператор Λ буде обмеженим, якщо його норму у просторі $L_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}) \times \mathbf{H}_1$ визначити таким чином:

$$\|(f, \alpha)\|_{L_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}) \times \mathbf{H}_1} = \|f\|_{L_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})} + \|\alpha\|_{\mathbf{H}_1}.$$

Розглянемо деякі властивості узагальненого оператора Гріна.

1. Узагальнений оператор Гріна (21) задовольняє співвідношення

$$\Lambda G = \begin{bmatrix} I_{L_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})} - P_{N(L^*)} \\ P_{N(Q^*)}\ell L^+ \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Справді, підставивши у (26) вираз (21), одержимо

$$\begin{aligned} \Lambda G &= \begin{bmatrix} L \\ \ell \end{bmatrix} [(L^+ - \Phi(t)P_{N(D)}Q^+\ell L^+)] = \begin{bmatrix} LL^+ - L\Phi(t)P_{N(D)}Q^+\ell L^+ \\ \ell L^+ - \ell\Phi(\cdot)P_{N(D)}Q^+\ell L^+ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} LL^+ \\ (I - QQ^+)\ell L^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{L_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})} - P_{N(L^*)} \\ P_{N(Q^*)}\ell L^+ \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

оскільки $Q = \ell\Phi(\cdot)P_{N(D)}$, $P_{N(Q^*)} = I - QQ^+$ і, як показано у (13), $LL^+ = I_{L_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})} - P_{N(L^*)}$.

2. Для узагальненого оператора Гріна справедливе співвідношення

$$GP_{N(L^*)} = 0.$$

Дійсно,

$$GP_{N(L^*)} = (L^+ - \Phi(t)P_{N(D)}Q^+\ell L^+)P_{N(L^*)} = L^+P_{N(L^*)} - \Phi(t)P_{N(D)}Q^+\ell L^+P_{N(L^*)} = 0,$$

тому що $L^+P_{N(L^*)} = 0$.

Теорема 6. Нехай $D: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ і $Q: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}_1$ — нормально розв'язні оператори. Тоді оператор

$$\Lambda^- = \begin{bmatrix} G & \Phi(t)P_{N(D)}Q^+ \end{bmatrix}$$

є обмеженим узагальнено оберненим оператором до оператора Λ .

Для доведення теореми необхідно та достатньо показати, що оператор Λ^- задовольняє умови:

- 1) $\Lambda^- \Lambda \Lambda^- = \Lambda^-$;
- 2) $\Lambda \Lambda^- \Lambda = \Lambda$,

які визначають узагальнено оборотний оператор. Як показано у [18], друга властивість є наслідком першої. Тому достатньо довести першу умову.

Спочатку обчислимо суперпозиції $\Lambda \Lambda^-$ і $\Lambda^- \Lambda$:

$$\begin{aligned} \Lambda \Lambda^- &= \Lambda \begin{bmatrix} G & \Phi(t)P_{N(D)}Q^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \\ \ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G & \Phi(t)P_{N(D)}Q^+ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} LG & L\Phi(t)P_{N(D)}Q^+ \\ \ell G & \ell\Phi(\cdot)P_{N(D)}Q^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})} - P_{N(L^*)} & 0 \\ P_{N(Q^*)}\ell L^+ & QQ^+ \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (27)$$

оскільки, за першою властивістю узагальненого оператора Гріна

$$\Lambda G = \begin{bmatrix} I_{\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})} - P_{N(L^*)} \\ P_{N(Q^*)}\ell L^+ \end{bmatrix},$$

$z = \Phi(t)P_{N(D)}\bar{z}$ — розв'язок однорідного інтегрального рівняння $Lz = 0$, а $\ell\Phi(\cdot)P_{N(D)} = Q$.

Беручи до уваги, що $(LL^+z)(t) = z(t) - \Phi(t)P_{N(D)} \int_a^b \Phi^*(s)z(s) ds$, отримуємо

$$\begin{aligned} \Lambda^- \Lambda z &= \begin{bmatrix} G & \Phi(t)P_{N(D)}Q^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ \ell \end{bmatrix} z = GLz + \Phi(t)P_{N(D)}Q^+ \ell z(\cdot) \\ &= LL^+ - \Phi(t)P_{N(D)}Q^+ \ell LL^+ + \Phi(t)P_{N(D)}Q^+ \ell z(\cdot) \\ &= z(t) - \Phi(t)P_{N(D)} \int_a^b \Phi^*(s)z(s) ds - \Phi(t)P_{N(D)}Q^+ \ell z(\cdot) \\ &\quad + \Phi(t)P_{N(D)}Q^+ \ell \Phi(\cdot)P_{N(D)} \int_a^b \Phi^*(s)z(s) ds + \Phi(t)P_{N(D)}Q^+ \ell z(\cdot) \\ &= z(t) - \Phi(t)P_{N(D)} [I - Q^+Q] \int_a^b \Phi^*(s)z(s) ds \\ &= z(t) - \Phi(t)P_{N(D)}P_{N(Q)} \int_a^b \Phi^*(s)z(s) ds. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$(\Lambda^- \Lambda z)(t) = z(t) - \Phi(t) P_{N(D)} P_{N(Q)} \int_a^b \Phi^*(s) z(s) ds. \quad (28)$$

Далі обчислимо суперпозицію $\Lambda^- \Lambda \Lambda^-$:

$$\begin{aligned} \Lambda^- \Lambda \Lambda^- &= \begin{bmatrix} G & \Phi(t) P_{N(D)} Q^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})} - P_{N(L^*)} & 0 \\ P_{N(Q^*)} \ell L^+ & Q Q^+ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} G(I_{\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})} - P_{N(L^*)}) + \Phi(t) P_{N(D)} Q^+ P_{N(Q^*)} \ell L^+ & \Phi(t) P_{N(D)} Q^+ Q Q^+ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} G - G P_{N(L^*)} & \Phi(t) P_{N(D)} Q^+ \end{bmatrix} = \Lambda^-, \end{aligned}$$

оскільки за другою властивістю узагальненого оператора Гріна $G P_{N(L^*)} = 0$, $P_{N(D)} Q^+ = 0$, а $Q^+ Q Q^+ = Q^+$.

Отже, оператор Λ^- є обмеженим узагальнено оборотним оператором до оператора $\Lambda = \begin{bmatrix} L \\ \ell \end{bmatrix}$, який визначає крайову задачу (1), (2).

Відомо [12, с. 49], що узагальнено обернений оператор Λ^- , проєктор $\mathcal{P}_{N(\Lambda)}$ на нуль-простір $N(\Lambda)$ оператора Λ і проєктор $\mathcal{P}_{Y_\Lambda}$ на підпростір $Y_\Lambda = \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}) \times \mathbf{H}_1 \ominus R(\Lambda)$ задовольняють співвідношення

$$\Lambda^- \Lambda = I_{\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}) \times \mathbf{H}_1} - \mathcal{P}_{N(\Lambda)}, \quad \Lambda \Lambda^- = I_{\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}) \times \mathbf{H}_1} - \mathcal{P}_{Y_\Lambda}.$$

Тоді з (27) маємо

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{Y_\Lambda} = I_{\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}) \times \mathbf{H}_1} - \Lambda \Lambda^- &= \begin{bmatrix} I_{\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})} & 0 \\ 0 & I_{\mathbf{H}_1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_{\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})} - P_{N(L^*)} & 0 \\ P_{N(Q^*)} \ell L^+ & Q Q^+ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{N(L^*)} & 0 \\ -P_{N(Q^*)} \ell L^+ & I_{\mathbf{H}_1} - Q Q^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{N(L^*)} & 0 \\ -P_{N(Q^*)} \ell L^+ & P_{N(Q^*)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Тобто умова

$$\mathcal{P}_{Y_\Lambda} \begin{bmatrix} f \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{N(L^*)} & 0 \\ -P_{N(Q^*)} \ell L^+ & P_{N(Q^*)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ \alpha \end{bmatrix} = 0$$

повністю співпадає з системою умов (24) розв'язності крайової задачі (1), (2).

Із (28) одержимо проєктор на нуль-простір $N(\Lambda)$ оператора Λ :

$$(\mathcal{P}_{N(\Lambda)} z)(t) = ([I_{\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})} - \Lambda^- \Lambda] z)(t) = \Phi(t) P_{N(D)} P_{N(Q)} \int_a^b \Phi^*(s) z(s) ds,$$

який співпадає з розв'язком (23) відповідної (1), (2) однорідної $f(t) = 0$, $\alpha = 0$ крайової задачі.

Інтегральні рівняння у скінченновимірних гільбертових просторах. Як приклад розглянемо крайові задачі для інтегральних рівнянь у скінченновимірних гільбертових просторах з урахуванням специфіки, притаманної цим просторам.

Розглянемо лінійну крайову задачу для інтегрального рівняння

$$z(t) - \int_a^b K(t, s) z(s) ds = f(t), \quad (29)$$

$$\ell z(\cdot) = \alpha, \quad (30)$$

де невироджене ядро $K(t, s)$ — сумовна з квадратом $(n \times n)$ -вимірна матриця, $f(t)$ — $(n \times 1)$ -вимірний вектор-стовпець, елементи яких належать простору $L_2(\mathcal{I}, \mathbf{R})$, $\ell: L_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{R}^m$ — лінійний обмежений вектор-функціонал, $\alpha \in \mathbf{R}^m$. Розв'язок будемо шукати у класі функцій $z(t) \in L_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$.

При розгляді інтегральних рівнянь у скінченновимірних гільбертових просторах запропоновану методику дослідження можна уточнити та конкретизувати.

Розглянемо умови існування та загальний вигляд розв'язку інтегрального рівняння (29).

Позначимо, як і раніше, $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^\infty$ — повний ортонормований базис простору $L_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$. Складемо з n -вимірних базисних векторів $\varphi_i(t) = \text{col}(\varphi_i^{(1)}(t), \varphi_i^{(2)}(t), \dots, \varphi_i^{(n)}(t))$, $i = \overline{1, \infty}$, $(n \times \infty)$ -вимірну матрицю

$$\Phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_i(t), \dots).$$

Так само введемо у розгляд величини

$$\bar{z} = \int_a^b \Phi^*(t) z(t) dt, \quad \bar{f} = \int_a^b \Phi^*(t) f(t) dt. \quad (31)$$

Далі утворимо коефіцієнти Фур'є ядра $K(t, s)$ як функцій змінної s , а потім як функцій змінної t :

$$K = \int_a^b \int_a^b \Phi^*(t) K(t, s) \Phi(s) dt ds. \quad (32)$$

Застосовуючи вирази (31), (32) до інтегрального рівняння (29), отримуємо зліченну систему алгебраїчних рівнянь

$$\bar{z} - K \bar{z} = \bar{f}$$

або

$$D \bar{z} = \bar{f}, \quad (33)$$

де оператор $D = \{d_{ij}\}_{i,j=1}^\infty = I - K$ — $(\infty \times \infty)$ — зліченновимірна матриця.

У цьому випадку оператор $K: l_2 \rightarrow l_2$ (32) є компактним оператором. Тоді за відомою теоремою С. М. Нікольського [19] оператор D фредгольмовий.

Нехай $\dimker D = \dimker D^* = r$. Позначимо через $P_{N_r(D)}$ $(\infty \times r)$ -вимірну матрицю, яку складено з r лінійно незалежних стовпців $(\infty \times \infty)$ -вимірної матриці-ортопроектора

$P_{N(D)}$, а через $P_{N_r(D^*)}$ — $(r \times \infty)$ -вимірну матрицю, яку складено з r лінійно незалежних рядків $(\infty \times \infty)$ -вимірної матриці-ортопроектора $P_{N(D^*)}$.

Тоді рівняння (33) має розв'язок для тих і лише тих правих частин, які задовольняють r лінійно незалежні умови

$$P_{N_r(D^*)}\bar{f} = 0, \quad (34)$$

при виконанні яких воно має r -параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків

$$\bar{z} = P_{N_r(D)}\bar{\bar{z}}_r + D^+\bar{f},$$

де $\bar{\bar{z}}_r$ — довільний елемент евклідового простору $\mathbf{R}^r$, D^+ — псевдообернена за Муром – Пенроузом матриця до матриці D [11, 12].

Справджується така теорема.

Теорема 7. Нехай $\dimker D = \dimker D^* = r$. Тоді відповідне (33) однорідне рівняння ($\bar{f} = 0$) має r -параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків

$$\bar{z} = P_{N_r(D)}\bar{\bar{z}}_r,$$

де $\bar{\bar{z}}_r \in \mathbf{R}^r$ — довільна стала.

Неоднорідне рівняння (33) має розв'язки для тих і лише тих $\bar{f}$, які задовольняють r -лінійно незалежні умови (34), і має r -параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків

$$\bar{z} = P_{N_r(D)}\bar{\bar{z}}_r + D^+\bar{f}.$$

За теоремою Ріса – Фішера [16, с. 113] існує елемент $z(t) \in L_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ такий, що координати вектора $\bar{z}$ є його коефіцієнтами Фур'є і має місце зображення

$$z(t) = \Phi(t)\bar{z} = \Phi(t)P_{N_r(D)}\bar{\bar{z}}_r + \Phi(t)D^+\bar{f}. \quad (35)$$

Використовуючи методику з [12, с. 266], можна показати, що множина елементів $z(t)$, визначених співвідношенням (35), є шуканою сім'єю розв'язків інтегрального рівняння (29).

Таким чином, для інтегрального рівняння (29) справджується така теорема.

Теорема 8. Нехай $\dimker D = \dimker D^* = r$. Тоді відповідне (29) однорідне інтегральне рівняння має сім'ю розв'язків

$$z(t) = \Phi(t)P_{N_r(D)}\bar{\bar{z}}_r.$$

Неоднорідне інтегральне рівняння (29) розв'язне для тих і лише тих $f(t) \in L_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$, які задовольняють r -лінійно незалежні умови

$$P_{N_r(D^*)} \int_a^b \Phi^*(t)f(t) dt = 0,$$

і при цьому має сім'ю r -лінійно незалежних розв'язків

$$z(t) = \Phi(t)P_{N_r(D)}\bar{\bar{z}}_r + (L^+f)(t), \quad (36)$$

де $\bar{\bar{z}} \in \mathbf{R}^r$ — довільна стала, $(L^+f)(t) = \Phi(t)D^+ \int_a^b \Phi^*(t)f(t) dt$ — псевдообернений оператор.

Лінійні крайові задачі для інтегральних рівнянь у скінченновимірних гільбертових просторах. Далі знайдемо умови існування та загальний вигляд розв'язків крайової задачі (29), (30).

Підставимо розв'язок (36) інтегрального рівняння (29) у крайову умову (30):

$$\ell z(\cdot) = \ell \Phi(\cdot) P_{N_r(D)} \bar{\bar{z}}_r + \ell L^+ f(\cdot) = \alpha. \quad (37)$$

Позначивши $Q = \ell \Phi(\cdot) P_{N_r(D)}$ ($m \times r$)-вимірну матрицю, отримаємо операторне рівняння щодо $\bar{\bar{z}}_r \in \mathbf{R}^r$:

$$Q \bar{\bar{z}}_r = \alpha - \ell L^+ f(\cdot). \quad (38)$$

Нехай $\dim_{\text{ker}} Q = s$, а $\dim_{\text{ker}} Q^* = d$. Позначимо через $P_{N_s(Q)}$ ($r \times s$)-вимірну матрицю-ортопроектор, складену з s лінійно незалежних стовпців ($r \times r$)-вимірної матриці-ортопроектора $P_{N(Q)}$, через $P_{N_d(Q^*)}$ — ($d \times m$)-вимірну матрицю, складену з d лінійно незалежних рядків ($m \times m$)-вимірної матриці-ортопроектора $P_{N(Q^*)}$, а через Q^+ — псевдообернену матрицю до матриці Q .

Рівняння (38) має розв'язок тоді й лише тоді, коли виконується умова

$$P_{N_d(Q^*)} \{ \alpha - \ell L^+ f(\cdot) \} = 0. \quad (39)$$

При виконанні цієї умови рівняння (39) має сім'ю розв'язків

$$\bar{\bar{z}}_r = P_{N_s(Q)} \bar{\bar{z}}_s + Q^+ \{ \alpha - \ell L^+ f(\cdot) \}. \quad (40)$$

Підставимо знайдене $\bar{\bar{z}}_r$ у (36):

$$z(t) = \Phi(t) P_{N_r(D)} [P_{N_s(Q)} \bar{\bar{z}}_s + Q^+ \{ \alpha - \ell L^+ f(\cdot) \}] + (L^+ f)(t). \quad (41)$$

Після перетворень отримаємо загальний розв'язок крайової задачі (29), (30):

$$z(t) = \Phi(t) P_{N_r(D)} P_{N_s(Q)} \hat{z} + (Gf)(t) + \Phi(t) P_{N_r(D)} Q^+ \alpha, \quad (42)$$

де

$$(Gf)(t) = \Phi(t) [I - P_{N_r(D)} Q^+ \ell \Phi(\cdot)] D^+ \int_a^b \Phi^*(t) f(t) dt \quad (43)$$

— узагальнений оператор Гріна.

Оскільки матриці $P_{N_r(D)}$, $P_{N_s(Q)}$ мають повні ранги: $\text{rank } P_{N_r(D)} = r$, $\text{rank } P_{N_s(Q)} = s$ і $s \leq r$, то з нерівності Сільвестра [20, с. 31] будемо мати

$$\text{rank } P_{N_r(D)} + \text{rank } P_{N_s(Q)} - r \leq \text{rank } (P_{N_r(D)} P_{N_s(Q)}) \leq \min(\text{rank } P_{N_r(D)}, \text{rank } P_{N_s(Q)})$$

або

$$s + r - r \leq \text{rank } (P_{N_d(S^*)} P_{N_r(D^*)}) \leq s.$$

Отже, $\text{rank } (P_{N_r(D)} P_{N_d(S)}) = s$, а це означає, що крайова задача (29), (37) має s лінійно незалежних розв'язків.

Таким чином, для крайової задачі (29), (30) справджується така теорема.

Теорема 9. Нехай $\dimker D = r$, $\dimker Q = s$, $\dimker Q^* = d$. Тоді відповідна (29), (30) однорідна крайова задача має s -параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків

$$z(t) = \Phi(t)P_{N_r(D)}P_{N_s(Q)}\bar{\bar{z}}_s,$$

де $\bar{\bar{z}}_s \in \mathbf{R}^s$ — довільний вектор.

Неоднорідна крайова задача (29), (30) розв'язна для тих і лише тих $f(t) \in L_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ і $\alpha \in \mathbf{R}^m$, які задовольняють систему $r + d$ умов

$$\begin{cases} P_{N_r(D^*)} \int_a^b \Phi^*(t)f(t) dt = 0, \\ P_{N_d(Q^*)} \left\{ \alpha - \ell\Phi(\cdot)D^+ \int_a^b \Phi^*(t)f(t) dt \right\} = 0, \end{cases} \quad (44)$$

і при цьому має s -параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків (42).

Зауваження 6. Якщо $\dimker Q^* = 0$, то ортопроектор $P_{N(Q^*)} = 0$. У цьому випадку друга умова (44) буде завжди виконуватись і при виконанні r лінійно незалежних умов

$$P_{N_r(D^*)} \int_a^b \Phi^*(t)f(t) dt = 0$$

крайова задача (1), (2) буде мати s -параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків

$$z(t) = \Phi(t)P_{N_r(D)}P_{N_s(Q)}\bar{\bar{z}}_s + (Gf)(t),$$

де $\bar{\bar{z}}_s \in \mathbf{R}^s$ — довільна стала.

Зауваження 7. Якщо $\dimker Q = 0$, то ортопроектор $P_{N(Q)} = 0$. У цьому випадку при виконанні системи $r + d$ умов (44) крайова задача (1), (2) буде мати єдиний розв'язок

$$z(t) = \Phi(t)P_{N(D)}Q^+\alpha + (Gf)(t).$$

Аналогічну теорію дослідження лінійних крайових задач для інтегральних рівнянь із невідродженим ядром можна також побудувати для випадку, коли оператор має незамкнену множину значень.

Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів. Усі необхідні дані містяться в статті. Всі автори зробили рівномірний внесок у цю роботу, а також заявляють про відсутність спеціального фінансування для її виконання.

Література

1. A. A. Boichuk, V. F. Zhuravlev, *Solvability criterion of integro-differential equations with degenerate kernel in Banach spaces*, Nonlinear Dyn. Syst. Theory, **18**, № 4, 331–341 (2018).
2. V. F. Zhuravlev, *Weakly nonlinear boundary-value problems for the Fredholm integral equations with degenerate kernels in Banach spaces*, J. Math. Sci. (N.Y.), **243**, № 3, 409–419 (2019).
3. V. F. Zhuravlev, N. P. Fomin, *Weakly perturbed boundary-value problems for the Fredholm integral equations with degenerate Kernel in Banach spaces*, J. Math. Sci. (N.Y.), **238**, № 3, 248–262 (2019).

4. В. П. Журавльов, *Псевдообернений оператор до інтегрального оператора Фредгольма з виродженим ядром у гільбертовому просторі*, Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. математика і інформатика, вип. 25, № 1, 57–69 (2014).
5. V. P. Zhuravl'ov, *Generalized inversion of Fredholm integral operators with degenerate kernels in Banach spaces*, J. Math. Sci. (N.Y.), **212**, № 3, 275–289 (2016).
6. N. O. Kozlova, V. A. Feruk, *Noetherian boundary-value problems for integral equations. Noetherian boundary-value problems for integral equations*, J. Math. Sci. (N.Y.), **222**, № 3, 266–275 (2016).
7. О. А. Бойчук, Н. О. Козлова, В. А. Ферук, *Слабкозбурені інтегральні рівняння*, Нелін. коливання, **19**, № 2, 151–160 (2016); **English translation:** J. Math. Sci. (N.Y.), **223**, 199–209 (2017).
8. A. A. Boichuk, N. O. Kozlova, V. A. Feruk, *Weakly nonlinear integral equations of the Hammerstein type*, Nonlinear Dyn. Syst. Theory, **19**, № 2, 289–301 (2019).
9. С. Г. Крейн, *Линейные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, Москва (1971).
10. A. M. Samoilenko, A. A. Boichuk, V. F. Zhuravlev, *Linear boundary-value problems for normally solvable operator equations in a Banach space*, Differ. Equat., **50**, № 3, 1–11 (2014).
11. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, 2nd ed., De Gruyter, Berlin (2016).
12. А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко, *Нормально разрешимые краевые задачи*, Наук. думка, Киев (2019).
13. О. А. Бойчук, О. О. Покутний, В. П. Журавльов, *Обмежені розв'язки еволюційних рівнянь*, Укр. мат. журн., **70**, № 1, 7–28 (2018); **English translation:** Ukr. Math. J., **70**, № 1, 5–29 (2018).
14. Д. Гильберт, *Избранные труды*, т. 2, Факториал, Москва (1998).
15. Б. З. Вулих, *Введение в функциональный анализ*, Наука, Москва (1967).
16. С. А. Ус, *Функціональний аналіз: навч. посіб.*, Нац. гірн. ун-т, Дніпропетровськ (2013).
17. M. Z. Nashed, G. F. Votruba, *A unified approach to generalized inverses of linear operators. I. Algebraic, topological and projectional properties*, Bull. Amer. Math. Soc., **80**, № 5, 825–830 (1974).
18. И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, *Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов*, Штиинца, Кишинев (1973).
19. В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Наука, Москва (1980).
20. В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов, *Матрицы и вычисления*, Наука, Москва (1984).

Одержано 01.02.25