

КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ НЕОДНОРІДНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ З ПРЯМОКУТНИМИ МАТРИЦЯМИ ТА ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ У ФІКСОВАНІ МОМЕНТИ ЧАСУ

Михайло Єлішевич

*Київський національний університет будівництва і архітектури
проспект Повітряних Сил, 31, 03037, Київ, Україна
e-mail: m-a-e@i.ua*

We determine the solvability conditions and construct a solution of the boundary-value problem for a system of linear inhomogeneous first-order differential equations with rectangular matrices and impulse action at fixed moments of time.

Визначено умови розв'язності та побудовано розв'язок крайової задачі для системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку з прямокутними матрицями та імпульсною дією у фіксовані моменти часу.

1. Постановка задачі. Для системи

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad t \in [a; b] \setminus \{t_i, i = \overline{1, d}\}, \quad (1)$$

$$x(t_i + 0) = S_i x(t_i - 0) + \eta_i, \quad i = \overline{1, d}, \quad (2)$$

розглядаємо крайову задачу з граничною умовою

$$\sum_{i=0}^d h_i x(\cdot) = \gamma, \quad (3)$$

де $t_i, i = \overline{1, d}$, — точки імпульсної дії, $a \leq t_1 < \dots < t_d \leq b$, $t_0 = a$, $t_{d+1} = b$, $A(t)$, $B(t)$ — прямокутні матриці-функції розмірності $m \times n$, $f(t)$ — вектор-функція розмірності m , $A(t), B(t), f(t) \in C^\infty[a; b] \setminus \{t_i, i = \overline{1, d}\}$ дійсні або комплексні, в точках $t_i, i = \overline{1, d}$, можуть мати розриви першого роду, $S_i, i = \overline{1, d}$, — сталі квадратні матриці порядку n , $\eta_i, i = \overline{1, d}$, — сталі вектори розмірності n , $h_i, i = \overline{0, d}: C_n^\infty[t_i; t_{i+1}] \rightarrow R^l$, а якщо $t_1 = a$ або $t_d = b$ (відрізок $[a; t_1]$ або $[t_d; b]$ вироджується в точку), то $R^n \rightarrow R^l$, — лінійні векторні функціонали, γ — сталий вектор розмірності l .

Вираз (2) для імпульсної дії відрізняється від класичного (див., наприклад, [1, с. 50]) $\Delta x(t_i) = S_i x(t_i - 0) + \eta_i$, де $\Delta x(t_i) = x(t_i + 0) - x(t_i - 0)$. Ці вирази еквівалентні, але для (2) наступні вирази більш компактні.

Задачу без імпульсної дії розглянуто в [2, 3]. У [2] матриці $A(t)$ і $B(t)$ квадратні, $B(t)$ вироджена, в [3] — прямокутні. У [4–11] розглянуто задачу з імпульсною дією. Там матриця $B(t)$ має сталий ранг на всьому відрізку $[a; b]$. У [4, с. 234–240; 5] матриця $B(t)$ одинична, в [6] квадратна вироджена, в [7–11] матриці $A(t)$ і $B(t)$ прямокутні. У [7, 8] припускалося, що система (1) розв’язна щодо $\frac{dx(t)}{dt}$ або $x(t)$. У [9–11] покладали, що $\dim \ker B^*(t) = 0$.

Загальний розв’язок системи (1), (2) побудовано в [12–14].

2. Основні визначення. Позначимо через I_i нільпотентний блок Жордана порядку i , через 0_i — нульовий вектор розмірності i , 0_{ij} — нульова матриця розмірності $i \times j$,

$$L(t) = A(t) - B(t) \frac{d}{dt}, \quad L^*(t) = A^*(t) + \frac{d}{dt} B^*(t)$$

— лінійні над полем скалярних сталих оператори, формально спряжені між собою.

Для зручності кожному з точок t_i , $i = \overline{1, d}$, будемо розглядати як дві різні точки $t_i - 0$ і $t_i + 0$. Похідні в цих точках розуміємо як праву й ліву відповідно. Якщо $t_1 > a$, то покладемо $t_0 + 0 = a$. Якщо $t_d < b$, то покладемо $t_{d+1} - 0 = b$.

Означення 1 [15, с. 54]. Елемент $\varphi^{(1)}(t) \in \ker B(t)$ має в точці $t \in [a; b]$ скінченний жорданів ланцюжок векторів матриці $B(t)$ щодо оператора $L(t)$ довжини p , $p \geq 1$, якщо існують вектори $\varphi^{(i)}(t)$, $i = \overline{1, p}$, що задовольняють співвідношення

$$B(t)\varphi^{(1)}(t) = 0,$$

$$B(t)\varphi^{(i)}(t) = L(t)\varphi^{(i-1)}(t), \quad i = \overline{2, p},$$

$$L(t)\varphi^{(p)}(t) \notin \operatorname{Im} B(t).$$

Означення 2. Елемент $\tilde{\varphi}^{(1)}(t) \in \ker B(t)$ має в точці $t \in [a; b]$ циклічний жорданів ланцюжок векторів матриці $B(t)$ щодо оператора $L(t)$ довжини $\tilde{p}$, $\tilde{p} \geq 1$, якщо існують вектори $\tilde{\varphi}^{(i)}(t)$, $i = \overline{1, \tilde{p}}$, що задовольняють співвідношення

$$B(t)\tilde{\varphi}^{(1)}(t) = 0,$$

$$B(t)\tilde{\varphi}^{(i)}(t) = L(t)\tilde{\varphi}^{(i-1)}(t), \quad i = \overline{2, \tilde{p}},$$

$$L(t)\tilde{\varphi}^{(\tilde{p})}(t) = 0.$$

Означення 3. Елемент $\hat{\varphi}^{(1)}(t)$ має в точці $t \in [a; b]$ допоміжний ланцюжок векторів матриці $B(t)$ щодо оператора $L(t)$ довжини $\hat{p}$, $\hat{p} \geq 1$, якщо існують вектори $\hat{\varphi}^{(i)}(t)$, $i = \overline{1, \hat{p}}$, що задовольняють співвідношення

$$B(t)\hat{\varphi}^{(i)}(t) = L(t)\hat{\varphi}^{(i-1)}(t), \quad i = \overline{2, \hat{p}},$$

$$B(t)\hat{\varphi}^{(1)}(t) \notin \operatorname{Im} L(t),$$

$$L(t)\hat{\varphi}^{(\hat{p})}(t) \notin \operatorname{Im} B(t).$$

Аналогічно визначимо ланцюжки векторів на відрізках $[t_i + 0; t_{i+1} - 0]$, $i = \overline{0, d}$.

У цій роботі розглядаємо випадок, коли можуть існувати скінченні, циклічні й допоміжні ланцюжки, але $\text{rank } B(t) = \text{const}$, $\text{rank } L(t) = \text{const}$ на кожному з відрізків $[t_i + 0; t_{i+1} - 0]$, $i = \overline{0, d}$, внаслідок чого кількості й довжини вказаних ланцюжків на кожному з цих відрізків сталі.

Деякі теореми наведено без доведень, оскільки вони аналогічні доведенням наведених раніше теорем.

3. Отриманий результат. Спочатку розглянемо випадок, коли $t_1 > a$, $t_d < b$.

Розглянемо окремо кожен із відрізків $[t_k + 0; t_{k+1} - 0]$, $k = \overline{0, d}$. Нехай k фіксоване, $t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0]$. Аналогічно [3, 13, 14, 16, 17] будемо вважати, що існують такі ланцюжки векторів:

- матриці $B(t)$ щодо оператора $L(t)$:
 $\check{r}_k$ циклічних одиничної довжини: $\check{\varphi}_{ki}(t)$, $i = \overline{1, \check{r}_k}$;
 $\tilde{r}_k$ циклічних довжин $(\tilde{s}_{ki} + 1)$: $\tilde{\varphi}_{ki}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \tilde{s}_{ki} + 1}$, $i = \overline{1, \tilde{r}_k}$;
 r_k скінченних довжин s_{ki} : $\varphi_{ki}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_{ki}}$, $i = \overline{1, r_k}$;
 $\hat{r}_k$ допоміжних довжин $\hat{s}_{ki}$: $\hat{\varphi}_{ki}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \hat{s}_{ki}}$, $i = \overline{1, \hat{r}_k}$;
- матриці $B^*(t)$ щодо оператора $L^*(t)$:
 $\check{r}_k$ циклічних одиничної довжини: $\check{\psi}_{ki}(t)$, $i = \overline{1, \check{r}_k}$;
 $\hat{r}_k$ циклічних довжин $(\hat{s}_{ki} + 1)$: $\hat{\psi}_{ki}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \hat{s}_{ki} + 1}$, $i = \overline{1, \hat{r}_k}$;
 r_k скінченних довжин s_{ki} : $\psi_{ki}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_{ki}}$, $i = \overline{1, r_k}$;
 $\tilde{r}_k$ допоміжних довжин $\tilde{s}_{ki}$: $\tilde{\psi}_{ki}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \tilde{s}_{ki}}$, $i = \overline{1, \tilde{r}_k}$.

Також існують:

- $\check{r}_k$ векторів $\check{\varphi}_{ki}(t) \notin \text{Im } B(t) \cup \text{Im } L(t)$, $i = \overline{1, \check{r}_k}$;
- $\check{r}_k$ векторів $\check{\psi}_{ki}(t) \notin \text{Im } B^*(t) \cup \text{Im } L^*(t)$, $i = \overline{1, \check{r}_k}$;
- α_k векторів $q_{ki}(t)$, $i = \overline{1, \alpha_k}$;
- α_k векторів $p_{ki}(t)$, $i = \overline{1, \alpha_k}$.

Тут

$$\begin{aligned} \check{r}_k &\geq 0, \quad \tilde{r}_k \geq 0, \quad r_k \geq 0, \quad \check{r}_k \geq 0, \quad \hat{r}_k \geq 0, \\ 0 &< \tilde{s}_{k1} \leq \dots \leq \tilde{s}_{k\tilde{r}_k}, \quad s_{k1} \geq \dots \geq s_{kr_k} > 0, \quad 0 < \hat{s}_{k1} \leq \dots \leq \hat{s}_{k\hat{r}_k}, \\ \alpha_k &= n - \check{r}_k - \tilde{r}_k - \tilde{s}_k - s_k - \hat{s}_k = m - \check{r}_k - \hat{r}_k - \hat{s}_k - s_k - \tilde{s}_k, \\ s_k &= \sum_{i=1}^r s_{ki}, \quad \tilde{s}_k = \sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} \tilde{s}_{ki}, \quad \hat{s}_k = \sum_{i=1}^{\hat{r}_k} \hat{s}_{ki}. \end{aligned}$$

Елементи кожної з наступних множин належать $C^\infty[t_k + 0; t_{k+1} - 0]$ і лінійно незалежні:

- 1) $q_{ki}(t)$, $i = \overline{1, \alpha_k}$, $\check{\varphi}_{ki}(t)$, $i = \overline{1, \check{r}_k}$, $\tilde{\varphi}_{ki}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \tilde{s}_{ki} + 1}$, $i = \overline{1, \tilde{r}_k}$, $\varphi_{ki}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_{ki}}$, $i = \overline{1, r_k}$, $\hat{\varphi}_{ki}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \hat{s}_{ki}}$, $i = \overline{1, \hat{r}_k}$;
- 2) $B(t)q_{ki}(t)$, $i = \overline{1, \alpha_k}$, $\check{\varphi}_{ki}(t)$, $i = \overline{1, \check{r}_k}$, $L(t)\tilde{\varphi}_{ki}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \tilde{s}_{ki}}$, $i = \overline{1, \tilde{r}_k}$, $L(t)\varphi_{ki}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_{ki}}$, $i = \overline{1, r_k}$, $B(t)\hat{\varphi}_{ki}^{(1)}(t)$, $i = \overline{1, \hat{r}_k}$, $L(t)\hat{\varphi}_{ki}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \hat{s}_{ki}}$, $i = \overline{1, \hat{r}_k}$;
- 3) $p_{ki}(t)$, $i = \overline{1, \alpha_k}$, $\check{\psi}_{ki}(t)$, $i = \overline{1, \check{r}_k}$, $\tilde{\psi}_{ki}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \tilde{s}_{ki} + 1}$, $i = \overline{1, \tilde{r}_k}$, $\psi_{ki}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_{ki}}$, $i = \overline{1, r_k}$, $\hat{\psi}_{ki}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \hat{s}_{ki}}$, $i = \overline{1, \hat{r}_k}$;

4) $B^*(t)p_{ki}(t)$, $i = \overline{1, \alpha_k}$, $\check{\psi}_{ki}(t)$, $i = \overline{1, \check{r}_k}$, $L^*(t)\check{\psi}_{ki}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \hat{s}_{ki}}$, $i = \overline{1, \hat{r}_k}$, $L^*(t)\psi_{ki}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_{ki}}$, $i = \overline{1, r_k}$, $B^*(t)\hat{\psi}_{ki}^{(1)}(t)$, $i = \overline{1, \tilde{r}_k}$, $L^*(t)\hat{\psi}_{ki}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \tilde{s}_{ki}}$, $i = \overline{1, \tilde{r}_k}$.

Пари множин 1), 4) та 2), 3) відповідно являють собою біортогональні системи

$$\begin{aligned} (B(t)q_{ki}(t), p_{ki}(t)) &= (q_{ki}(t), B^*(t)p_{ki}(t)) = 1, \quad i = \overline{1, \alpha_k}, \\ (\check{\varphi}_{ki}(t), \check{\psi}_{ki}(t)) &= 1, \quad i = \overline{1, \check{r}_k}, \\ (\check{\varphi}_{ki}(t), \check{\psi}_{ki}(t)) &= 1, \quad i = \overline{1, \tilde{r}_k}, \\ (\hat{\varphi}_{ki}^{(j)}(t), L^*(t)\hat{\psi}_{ki}^{(\tilde{s}_{ki}+1-j)}(t)) &= (L(t)\hat{\varphi}_{ki}^{(j)}(t), \hat{\psi}_{ki}^{(\tilde{s}_{ki}+1-j)}(t)) = 1, \quad j = \overline{1, \tilde{s}_{ki}}, \quad i = \overline{1, \tilde{r}_k}, \\ (\hat{\varphi}_{ki}^{(\tilde{s}_{ki}+1)}(t), B^*(t)\hat{\psi}_{ki}^{(1)}(t)) &= 1, \quad i = \overline{1, \tilde{r}_k}, \\ (\hat{\varphi}_{ki}^{(j)}(t), L^*(t)\check{\psi}_{ki}^{(\hat{s}_{ki}+1-j)}(t)) &= (L(t)\hat{\varphi}_{ki}^{(j)}(t), \check{\psi}_{ki}^{(\hat{s}_{ki}+1-j)}(t)) = 1, \quad j = \overline{1, \hat{s}_{ki}}, \quad i = \overline{1, \hat{r}_k}, \\ (B(t)\hat{\varphi}_{ki}^{(1)}(t), \check{\psi}_{ki}^{(\hat{s}_{ki}+1)}(t)) &= 1, \quad i = \overline{1, \hat{r}_k}, \\ (\varphi_{ki}^{(j)}(t), L^*(t)\psi_{ki}^{(s_{ki}+1-j)}(t)) &= (L(t)\varphi_{ki}^{(j)}(t), \psi_{ki}^{(s_{ki}+1-j)}(t)) = 1, \quad j = \overline{1, s_{ki}}, \quad i = \overline{1, r_k}. \end{aligned}$$

Усі інші скалярні добутки векторів із відповідних пар множин рівні 0.

З використанням елементів множин 1), 3) складемо прямокутні матриці та вектори, що належать $C^\infty[t_k + 0; t_{k+1} - 0]$:

$$\begin{aligned} Q_k(t) &= [q_{k1}(t), \dots, q_{k\alpha_k}(t)], \\ \Phi_{ki}(t) &= [\varphi_{ki}^{(1)}(t), \dots, \varphi_{ki}^{(s_{ki})}(t)], \quad i = \overline{1, r_k}, \\ \tilde{\Phi}_{kij}(t) &= [\tilde{\varphi}_{ki}^{(j)}(t), \dots, \tilde{\varphi}_{ki}^{(1)}(t)], \quad j = \tilde{s}_{ki}, \tilde{s}_{ki} + 1, \quad i = \overline{1, \tilde{r}_k}, \\ \hat{\Phi}_{ki}(t) &= [\hat{\varphi}_{ki}^{(1)}(t), \dots, \hat{\varphi}_{ki}^{(\hat{s}_{ki})}(t)], \quad i = \overline{1, \hat{r}_k}, \\ P_k(t) &= [p_{k1}(t), \dots, p_{k\alpha_k}(t)], \\ \Psi_{ki}(t) &= [\psi_{ki}^{(s_{ki})}(t), \dots, \psi_{ki}^{(1)}(t)], \quad i = \overline{1, r_k}, \\ \tilde{\Psi}_{kij}(t) &= [\tilde{\psi}_{ki}^{(j)}(t), \dots, \tilde{\psi}_{ki}^{(1)}(t)], \quad j = \hat{s}_{ki}, \hat{s}_{ki} + 1, \quad i = \overline{1, \hat{r}_k}, \\ \hat{\Psi}_{ki}(t) &= [\hat{\psi}_{ki}^{(1)}(t), \dots, \hat{\psi}_{ki}^{(\hat{s}_{ki})}(t)], \quad i = \overline{1, \tilde{r}_k}, \end{aligned}$$

$X_k(t)$ — фундаментальна матриця однорідної системи

$$\frac{dx_k}{dt} = P_k^*(t)(L(t)Q_k(t))x_k,$$

$$\tilde{X}_k(t) = Q_k(t)X_k(t),$$

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_k(t) &= \tilde{X}_k(t) \int_{t_k+0}^t X_k^{-1}(\tau) P_k^*(\tau) f(\tau) d\tau - \sum_{i=1}^{r_k} \Phi_{ki}(t) \sum_{j=0}^{s_{ki}-1} I_{s_{ki}}^j \frac{d^j}{dt^j} (\Psi_{ki}^*(t) f(t)) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} \tilde{\Phi}_{ki\tilde{s}_{ki}}(t) \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{ki}-1} (I_{\tilde{s}_{ki}}^T)^j \frac{d^j}{dt^j} (\hat{\Psi}_{ki}^*(t) f(t)) - \sum_{i=1}^{\hat{r}_k} \hat{\Phi}_{ki}(t) \sum_{j=0}^{\hat{s}_{ki}-1} I_{\hat{s}_{ki}}^j \frac{d^j}{dt^j} (\tilde{\Psi}_{ki\hat{s}_{ki}}^*(t) f(t)), \\
\hat{X}_k &= \left[\tilde{X}_k(t_{k+1}-0), \tilde{\Phi}_{k1,\tilde{s}_{k1}+1}(t_{k+1}-0), \dots, \right. \\
&\quad \left. \tilde{\Phi}_{k\tilde{r}_k,\tilde{s}_{k\tilde{r}_k}+1}(t_{k+1}-0), \check{\varphi}_{k1}(t_{k+1}-0), \dots, \check{\varphi}_{k\check{r}_k}(t_{k+1}-0) \right], \quad k = \overline{0, d-1}, \\
\tilde{A}_k &= \text{col} \left[\sum_{i=0}^{s_{k1}-1} I_{s_{k1}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\Psi_{k1}^*(t) A(t)), \dots, \sum_{i=0}^{s_{kr_k}-1} I_{s_{kr_k}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\Psi_{kr_k}^*(t) A(t)), \right. \\
&\quad \left. \sum_{i=0}^{\hat{s}_{k1}-1} I_{\hat{s}_{k1}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\tilde{\Psi}_{k1\hat{s}_{k1}}^*(t) A(t)), \dots, \sum_{i=0}^{\hat{s}_{k\hat{r}_k}-1} I_{\hat{s}_{k\hat{r}_k}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\tilde{\Psi}_{k\hat{r}_k\hat{s}_{k\hat{r}_k}}^*(t) A(t)) \right] \Bigg|_{t=t_k+0}, \quad k = \overline{1, d}, \\
\tilde{f}_k &= \text{col} \left[\sum_{i=0}^{s_{k1}-1} I_{s_{k1}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\Psi_{k1}^*(t) f(t)), \dots, \sum_{i=0}^{s_{kr_k}-1} I_{s_{kr_k}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\Psi_{kr_k}^*(t) f(t)), \right. \\
&\quad \left. \sum_{i=0}^{\hat{s}_{k1}-1} I_{\hat{s}_{k1}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\tilde{\Psi}_{k1\hat{s}_{k1}}^*(t) f(t)), \dots, \sum_{i=0}^{\hat{s}_{k\hat{r}_k}-1} I_{\hat{s}_{k\hat{r}_k}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\tilde{\Psi}_{k\hat{r}_k\hat{s}_{k\hat{r}_k}}^*(t) f(t)) \right] \Bigg|_{t=t_k+0}, \quad k = \overline{1, d}, \\
\tilde{B}_k &= X_k^{-1}(t_k+0) P_k^*(t_k+0) B(t_k+0), \quad \hat{A}_k = \tilde{A}_k S_k \hat{X}_{k-1}, \quad \Xi_k = \hat{A}_k^-, \\
\hat{x}_k &= S_k \tilde{x}_{k-1}(t_k-0) + \eta_k, \quad k = \overline{1, d}.
\end{aligned}$$

Матриці Θ_k і Υ_k складемо з елементів базисів $\ker \hat{A}_k$ і $\ker \hat{A}_k^*$ відповідно, матриці Ξ_k і Θ_k подамо у вигляді

$$\Xi_k = \text{col} \left(\Xi_{k0}, \tilde{\Xi}_{k1}^{(0)}, \dots, \tilde{\Xi}_{k1}^{(\tilde{s}_{k-1,1})}, \dots, \tilde{\Xi}_{k\tilde{r}_{k-1}}^{(0)}, \dots, \tilde{\Xi}_{k\tilde{r}_{k-1}}^{(\tilde{s}_{k-1,\tilde{r}_{k-1}})}, \check{\Xi}_{k1}, \dots, \check{\Xi}_{k\check{r}_{k-1}} \right), \quad (4)$$

$$\Theta_k = \text{col} \left(\Theta_{k0}, \tilde{\Theta}_{k1}^{(0)}, \dots, \tilde{\Theta}_{k1}^{(\tilde{s}_{k-1,1})}, \dots, \tilde{\Theta}_{k\tilde{r}_{k-1}}^{(0)}, \dots, \tilde{\Theta}_{k\tilde{r}_{k-1}}^{(\tilde{s}_{k-1,\tilde{r}_{k-1}})}, \check{\Theta}_{k1}, \dots, \check{\Theta}_{k\check{r}_{k-1}} \right), \quad (5)$$

де Ξ_{k0} і Θ_{k0} — прямокутні матриці розмірності $\alpha_{k-1} \times (s_k + \hat{s}_k)$ і $\alpha_{k-1} \times \dim \ker \hat{A}_k$, всі інші компоненти матриць Ξ_k і Θ_k — матриці-рядки розмірності $(s_k + \hat{s}_k)$ і $\dim \ker \hat{A}_k$ відповідно,

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 S_1 \hat{X}_0 \Theta_1 & -\Theta_{20} & 0_{\alpha_1, \dim \ker \hat{A}_3} & \dots & 0_{\alpha_1, \dim \ker \hat{A}_{d-1}} & 0_{\alpha_1, \dim \ker \hat{A}_d} \\ 0_{\alpha_2, \dim \ker \hat{A}_1} & \tilde{B}_2 S_2 \hat{X}_1 \Theta_2 & -\Theta_{30} & \dots & 0_{\alpha_2, \dim \ker \hat{A}_{d-1}} & 0_{\alpha_2, \dim \ker \hat{A}_d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0_{\alpha_{d-1}, \dim \ker \hat{A}_1} & 0_{\alpha_{d-1}, \dim \ker \hat{A}_2} & 0_{\alpha_{d-1}, \dim \ker \hat{A}_3} & \dots & \tilde{B}_{d-1} S_{d-1} \hat{X}_{d-2} \Theta_{d-1} & -\Theta_{d0} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\bar{\Xi} = \bar{A}^-,$$

$$\begin{aligned} \bar{f} = \text{col} \Big(\tilde{B}_1 \Big(S_1 \hat{X}_0 \Xi_1 (\tilde{A}_1 \hat{x}_1 + \tilde{f}_1) - \hat{x}_1 \Big) - \Xi_{20} (\tilde{A}_2 \hat{x}_2 + \tilde{f}_2), \dots, \\ \tilde{B}_{d-1} \Big(S_{d-1} \hat{X}_{d-2} \Xi_{d-1} (\tilde{A}_{d-1} \hat{x}_{d-1} + \tilde{f}_{d-1}) - \hat{x}_{d-1} \Big) - \Xi_{d0} (\tilde{A}_d \hat{x}_d + \tilde{f}_d) \Big). \end{aligned} \quad (7)$$

Матриці $\bar{\Theta}$ і $\bar{\Upsilon}$ складемо з елементів базисів $\ker \bar{A}$ і $\ker \bar{A}^*$ відповідно. Матриці $\bar{\Xi}$ і $\bar{\Theta}$ подамо у вигляді

$$\bar{\Xi} = \text{col} (\bar{\Xi}_1, \dots, \bar{\Xi}_d), \quad \bar{\Theta} = \text{col} (\bar{\Theta}_1, \dots, \bar{\Theta}_d), \quad (8)$$

де $\bar{\Xi}_k$ і $\bar{\Theta}_k$, $k = \overline{1, d}$, — прямокутні матриці розмірності $\dim \ker \hat{A}_k \times \sum_{i=1}^{d-1} \alpha_i$ і $\dim \ker \hat{A}_k \times \dim \ker \bar{A}$ відповідно.

Згідно з [14] для розв'язності системи (1), (2) необхідно й достатньо виконання рівностей

$$\sum_{j=0}^{\hat{s}_{ki}} \frac{d^j}{dt^j} \left(f(t), \check{\psi}_{ki}^{(\hat{s}_{ki}-j+1)}(t) \right) = 0, \quad i = \overline{1, \hat{r}_k}, \quad t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k = \overline{0, d}, \quad (9)$$

$$\left(f(t), \check{\psi}_{ki}(t) \right) = 0, \quad i = \overline{1, \hat{r}_k}, \quad t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k = \overline{0, d}, \quad (10)$$

$$\Upsilon_k^* (\tilde{A}_k \hat{x}_k + \tilde{f}_k) = 0, \quad k = \overline{1, d}, \quad (11)$$

$$\bar{\Upsilon} \bar{f} = 0. \quad (12)$$

При їхньому виконанні вона має загальний розв'язок

$$\begin{aligned} x(t) = \tilde{X}_k(t) \Big[\Theta_{k+1,0} (\bar{\Theta}_{k+1} \bar{c} + \bar{\Xi}_{k+1} \bar{f}) - \Xi_{k+1,0} (\tilde{A}_{k+1} \hat{x}_{k+1} + \tilde{f}_{k+1}) \Big] \\ + \tilde{x}_k(t) + \sum_{i=1}^{\hat{r}_k} \sum_{j=0}^{\hat{s}_{ki}} \left(\frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{ki}(t) \right) \tilde{\varphi}_{ki}^{(\hat{s}_{ki}-j+1)}(t) \\ + \sum_{i=1}^{\check{r}_k} \check{\beta}_{ki}(t) \check{\varphi}_{ki}(t), \quad t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k = \overline{0, d-1}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} x(t) = \tilde{X}_k(t) \tilde{B}_k \Big\{ S_k \hat{X}_{k-1} \Big[\Theta_k (\bar{\Theta}_k \bar{c} + \bar{\Xi}_k \bar{f}) - \Xi_k (\tilde{A}_k \hat{x}_k + \tilde{f}_k) \Big] + \hat{x}_k \Big\} \\ + \tilde{x}_k(t) + \sum_{i=1}^{\hat{r}_k} \sum_{j=0}^{\hat{s}_{ki}} \left(\frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{ki}(t) \right) \tilde{\varphi}_{ki}^{(\hat{s}_{ki}-j+1)}(t) \\ + \sum_{i=1}^{\check{r}_k} \check{\beta}_{ki}(t) \check{\varphi}_{ki}(t), \quad t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k = \overline{1, d} \end{aligned} \quad (14)$$

(вирази (13) і (14) при $k = \overline{1, d-1}$ еквівалентні),

$$\left. \frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{ki}(t) \right|_{t=t_{k+1}-0} = \tilde{\Theta}_{k+1,i}^{(j)} (\bar{\Theta}_{k+1} \bar{c} + \bar{\Xi}_{k+1} \bar{f}) - \tilde{\Xi}_{k+1,i}^{(j)} (\tilde{A}_{k+1} \hat{x}_{k+1} + \tilde{f}_{k+1}), \quad (15)$$

$$j = \overline{0, \tilde{s}_{ki}}, \quad i = \overline{1, \tilde{r}_k}, \quad k = \overline{0, d-1},$$

$$\check{\beta}_{ki}(t_{k+1} - 0) = \check{\Theta}_{k+1,i} (\bar{\Theta}_{k+1} \bar{c} + \bar{\Xi}_{k+1} \bar{f}) - \check{\Xi}_{k+1,i} (\tilde{A}_{k+1} \hat{x}_{k+1} + \tilde{f}_{k+1}), \quad (16)$$

$$i = \overline{1, \check{r}_k}, \quad k = \overline{0, d-1},$$

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_{ki}(t_k + 0) = & \left(S_k \hat{X}_{k-1} \left[\Theta_k (\bar{\Theta}_k \bar{c} + \bar{\Xi}_k \bar{f}) - \Xi_k (\tilde{A}_k \hat{x}_k + \tilde{f}_k) \right] \right. \\ & \left. + \hat{x}_k, B^*(t_k + 0) \hat{\psi}_{ki}^{(1)}(t_k + 0) \right), \quad i = \overline{1, \tilde{r}_k}, \quad k = \overline{1, d}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{ki}(t) \right|_{t=t_k+0} = & \left[\left(S_k \hat{X}_{k-1} \left[\Theta_k (\bar{\Theta}_k \bar{c} + \bar{\Xi}_k \bar{f}) - \Xi_k (\tilde{A}_k \hat{x}_k + \tilde{f}_k) \right] + \hat{x}_k, L^*(t) \hat{\psi}_{ki}^{(j)}(t) \right) \right. \\ & \left. + \sum_{u=0}^{j-1} \frac{d^u}{dt^u} (f(t), \hat{\psi}_{ki}^{(j-u)}(t)) \right] \Big|_{t=t_k+0}, \quad j = \overline{1, \tilde{s}_{ki}}, \quad i = \overline{1, \tilde{r}_k}, \quad k = \overline{1, d}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \check{\beta}_{ki}(t_k + 0) = & \left(S_k \hat{X}_{k-1} \left[\Theta_k (\bar{\Theta}_k \bar{c} + \bar{\Xi}_k \bar{f}) \right. \right. \\ & \left. \left. - \Xi_k (\tilde{A}_k \hat{x}_k + \tilde{f}_k) \right] + \hat{x}_k, \check{\psi}_{ki}(t_k + 0) \right), \quad i = \overline{1, \check{r}_k}, \quad k = \overline{1, d}, \end{aligned} \quad (19)$$

де $\bar{c}$ — довільний сталий вектор розмірності $\dim \ker \bar{A}$, $\tilde{\beta}_{ki}(t) \in C^\infty[t_k+0; t_{k+1}-0]$, $i = \overline{1, \tilde{r}_k}$, $\check{\beta}_{ki}(t) \in C^\infty[t_k+0; t_{k+1}-0]$, $i = \overline{1, \check{r}_k}$, $k = \overline{0, d}$, — довільні скалярні функції.

З (15)–(19) одержуємо

$$h_k \left(\sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{ki}} \left(\frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{ki}(t) \right) \tilde{\varphi}_{ki}^{(\tilde{s}_{ki}-j+1)}(t) + \sum_{i=1}^{\check{r}_k} \check{\beta}_{ki}(t) \check{\varphi}_{ki}(t) \right) (\cdot) = \bar{U}_k \bar{c} + v_k, \quad k = \overline{0, d}, \quad (20)$$

де $\bar{U}_k$, $k = \overline{0, d}$, — сталі прямокутні матриці розмірності $l \times \dim \ker \bar{A}$, v_k , $k = \overline{0, d}$, — сталі вектори розмірності l , $\bar{U}_k$, v_k не залежать від $\bar{c}$.

Якщо взяти деякий фіксований відповідний вектору $\bar{c}$ набір функцій $\tilde{\beta}_{ki}(t)$, $i = \overline{1, \tilde{r}_k}$, $\check{\beta}_{ki}(t)$, $i = \overline{1, \check{r}_k}$, $k = \overline{0, d}$, то матриці $\bar{U}_k$, $k = \overline{0, d}$, і вектори v_k , $k = \overline{0, d}$, відомі, загальний розв'язок системи (1), (2) має вигляд (15)–(19),

$$\begin{aligned} x(t) = & \tilde{X}_k(t) \left[\Theta_{k+1,0} (\bar{\Theta}_{k+1} \bar{c} + \bar{\Xi}_{k+1} \bar{f}) - \Xi_{k+1,0} (\tilde{A}_{k+1} \hat{x}_{k+1} + \tilde{f}_{k+1}) \right] + \tilde{x}_k(t) \\ & + \sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{ki}} \left[\frac{d^j}{dt^j} (\tilde{\beta}_{ki}(t) + \check{\beta}_{ki}(t)) \right] \tilde{\varphi}_{ki}^{(\tilde{s}_{ki}-j+1)}(t) \\ & + \sum_{i=1}^{\check{r}_k} (\check{\beta}_{ki}(t) + \check{\zeta}_{ki}(t)) \check{\varphi}_{ki}(t), \quad t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k = \overline{0, d-1}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
x(t) = & \tilde{X}_k(t) \tilde{B}_k \left\{ S_k \hat{X}_{k-1} \left[\Theta_k (\bar{\Theta}_k \bar{c} + \bar{\Xi}_k \bar{f}) - \Xi_k (\tilde{A}_k \hat{x}_k + \tilde{f}_k) \right] + \hat{x}_k \right\} \\
& + \tilde{x}_k(t) + \sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{ki}} \left[\frac{d^j}{dt^j} \left(\tilde{\beta}_{ki}(t) + \tilde{\zeta}_{ki}(t) \right) \right] \tilde{\varphi}_{ki}^{(\tilde{s}_{ki}-j+1)}(t) \\
& + \sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} \left(\check{\beta}_{ki}(t) + \check{\zeta}_{ki}(t) \right) \check{\varphi}_{ki}(t), \quad t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k = \overline{1, d}, \quad (22)
\end{aligned}$$

$$\left. \frac{d^j}{dt^j} \tilde{\zeta}_{ki}(t) \right|_{t=t_{k+1}-0} = 0, \quad j = \overline{0, \tilde{s}_{ki}}, \quad i = \overline{1, \tilde{r}_k}, \quad k = \overline{0, d-1}, \quad (23)$$

$$\check{\zeta}_{ki}(t_{k+1} - 0) = 0, \quad i = \overline{1, \check{r}_k}, \quad k = \overline{0, d-1}, \quad (24)$$

$$\left. \frac{d^j}{dt^j} \tilde{\zeta}_{ki}(t) \right|_{t=t_k+0} = 0, \quad j = \overline{0, \tilde{s}_{ki}}, \quad i = \overline{1, \tilde{r}_k}, \quad k = \overline{1, d}, \quad (25)$$

$$\check{\zeta}_{ki}(t_k + 0) = 0, \quad i = \overline{1, \check{r}_k}, \quad k = \overline{1, d}, \quad (26)$$

де $\tilde{\zeta}_{ki}(t) \in C^\infty[t_k + 0; t_{k+1} - 0]$, $i = \overline{1, \tilde{r}_k}$, $\check{\zeta}_{ki}(t) \in C^\infty[t_k + 0; t_{k+1} - 0]$, $i = \overline{1, \check{r}_k}$, $k = \overline{0, d}$, — довільні скалярні функції.

Виберемо з векторів

$$h_k \left(\sum_{j=0}^{\tilde{s}_{ki}} \left(\frac{d^j}{dt^j} \xi_{ku}(t) \right) \tilde{\varphi}_{ki}^{(\tilde{s}_{ki}-j+1)}(t) \right) (\cdot), \quad i = \overline{1, \tilde{r}_k},$$

$$h_k(\xi_{ku}(t) \check{\varphi}_{ki}(t))(\cdot), \quad i = \overline{1, \check{r}_k}, \quad u = 1, 2, \dots, \quad k = \overline{0, d},$$

де $\xi_{ku}(t) \in C^\infty[t_k + 0; t_{k+1} - 0]$ — довільні скалярні функції, для яких виконуються рівності, аналогічні (23)–(26), максимальну кількість μ , $0 \leq \mu \leq l$, лінійно незалежних векторів і складемо з відповідних їм векторів

$$\sum_{j=0}^{\tilde{s}_{ki}} \left(\frac{d^j}{dt^j} \xi_{ku}(t) \right) \tilde{\varphi}_{ki}^{(\tilde{s}_{ki}-j+1)}(t), \quad \xi_{ku}(t) \check{\varphi}_{ki}(t)$$

матриці D_k , $k = \overline{0, d}$, розмірності $n \times \mu_k$, $0 \leq \mu_k \leq \mu$, $\sum_{k=0}^d \mu_k = \mu$. Завдяки довільності функцій $\tilde{\zeta}_{ki}(t)$, $i = \overline{1, \tilde{r}_k}$, $\check{\zeta}_{ki}(t)$, $i = \overline{1, \check{r}_k}$, $k = \overline{0, d}$, вирази (21), (22) можна замінити такими:

$$\begin{aligned}
x(t) = & \tilde{X}_k(t) \left[\Theta_{k+1,0} (\bar{\Theta}_{k+1} \bar{c} + \bar{\Xi}_{k+1} \bar{f}) - \Xi_{k+1,0} (\tilde{A}_{k+1} \hat{x}_{k+1} + \tilde{f}_{k+1}) \right] \\
& + \tilde{x}_k(t) + D_k(t) \tilde{c}_k + \sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{ki}} \left[\frac{d^j}{dt^j} \left(\tilde{\beta}_{ki}(t) + \tilde{\zeta}_{ki}(t) \right) \right] \tilde{\varphi}_{ki}^{(\tilde{s}_{ki}-j+1)}(t) \\
& + \sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} \left(\check{\beta}_{ki}(t) + \check{\zeta}_{ki}(t) \right) \check{\varphi}_{ki}(t), \quad t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k = \overline{0, d-1}, \quad (27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x(t) = & \tilde{X}_k(t) \tilde{B}_k \left\{ S_k \hat{X}_{k-1} \left[\Theta_k (\bar{\Theta}_k \bar{c} + \bar{\Xi}_k \bar{f}) - \Xi_k (\tilde{A}_k \hat{x}_k + \tilde{f}_k) \right] + \hat{x}_k \right\} \\
& + \tilde{x}_k(t) + D_k(t) \tilde{c}_k + \sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{ki}} \left[\frac{d^j}{dt^j} (\tilde{\beta}_{ki}(t) + \tilde{\zeta}_{ki}(t)) \right] \tilde{\varphi}_{ki}^{(\tilde{s}_{ki}-j+1)}(t) \\
& + \sum_{i=1}^{\check{r}_k} (\check{\beta}_{ki}(t) + \check{\zeta}_{ki}(t)) \check{\varphi}_{ki}(t), \quad t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k = \overline{1, d}, \quad (28)
\end{aligned}$$

де $\tilde{c}_k$, $k = \overline{0, d}$, — довільні сталі вектори розмірності μ_k .

Позначимо

$$\begin{aligned}
D = & \left[\sum_{k=0}^{d-1} \left(h_k \left(\tilde{X}_k(t) \Theta_{k+1,0} \bar{\Theta}_{k+1} \right) (\cdot) + \bar{U}_k \right) \right. \\
& \left. + h_d \left(\tilde{X}_d(t) \tilde{B}_d S_d \hat{X}_{d-1} \Theta_d \bar{\Theta}_d \right) (\cdot) + \bar{U}_d, h_0 D_0(\cdot), \dots, h_d D_d(\cdot) \right], \quad (29)
\end{aligned}$$

$F = D^-$, матриці G і H складемо з елементів базисів $\ker D$ і $\ker D^*$ відповідно, матриці F і G подамо у вигляді

$$F = \text{col}(\bar{F}, F_0, \dots, F_d), \quad G = \text{col}(\bar{G}, G_0, \dots, G_d), \quad (30)$$

їхні компоненти — прямокутні матриці розмірності: $\bar{F}$ — $\dim \ker \bar{A} \times l$, F_k , $k = \overline{0, d}$, — $\mu_k \times l$, $\bar{G}$ — $\dim \ker \bar{A} \times \dim \ker D$, G_k , $k = \overline{0, d}$, — $\mu_k \times \dim \ker D$, c — довільний сталий вектор розмірності $\dim \ker D$,

$$\tilde{c} = \text{col}(\bar{c}, \tilde{c}_0, \dots, \tilde{c}_d), \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
\check{x} = & \gamma - \sum_{k=0}^{d-1} \left\{ h_k \left[\tilde{X}_k(t) \left(\Theta_{k+1,0} \Xi_{k+1} \bar{f} - \Xi_{k+1,0} (\tilde{A}_{k+1} \hat{x}_{k+1} + \tilde{f}_{k+1}) \right) + \tilde{x}(t) \right] (\cdot) + v_k \right\} \\
& - \left\{ h_d \left[\tilde{X}_d(t) \tilde{B}_d \left(S_d \hat{X}_{d-1} \left(\Theta_d \bar{\Xi}_d \bar{f} - \Xi_d (\tilde{A}_d \hat{x}_d + \tilde{f}_d) \right) + \hat{x}_d \right) + \tilde{x}_d(t) \right] (\cdot) + v_d \right\}, \quad (32)
\end{aligned}$$

$$\bar{x} = \check{x} - \sum_{k=0}^d h_k \left(\sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{ki}} \left(\frac{d^j}{dt^j} \tilde{\zeta}_{ki}(t) \right) \tilde{\varphi}_{ki}^{(\tilde{s}_{ki}-j+1)}(t) + \sum_{i=1}^{\check{r}_k} \check{\zeta}_{ki}(t) \check{\varphi}_{ki}(t) \right) (\cdot). \quad (33)$$

Теорема 1. Якщо $a < t_1$, $b > t_d$, існують множини векторів 1)–4), $\alpha_k > 0$, $k = \overline{0, d}$, то крайова задача (1)–(3) розв’язна в тому й тільки тому випадку, коли виконуються рівності (9)–(12),

$$H^* \check{x} = 0. \quad (34)$$

При їхньому виконанні вона має розв'язки (23)–(26),

$$\begin{aligned} x(t) = & \tilde{X}_k(t) \left[\Theta_{k+1,0} (\bar{\Theta}_{k+1} (\bar{G}c + \bar{F} \bar{x}) + \bar{\Xi}_{k+1} \bar{f}) - \Xi_{k+1,0} (\tilde{A}_{k+1} \hat{x}_{k+1} + \tilde{f}_{k+1}) \right] \\ & + \tilde{x}_k(t) + D_k(t) (G_k c + F_k \bar{x}) + \sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{ki}} \left[\frac{d^j}{dt^j} (\tilde{\beta}_{ki}(t) + \tilde{\zeta}_{ki}(t)) \right] \tilde{\varphi}_{ki}^{(\tilde{s}_{ki}-j+1)}(t) \\ & + \sum_{i=1}^{\check{r}_k} \left(\check{\beta}_{ki}(t) + \check{\zeta}_{ki}(t) \right) \check{\varphi}_{ki}(t), \quad t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k = \overline{0, d-1}, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} x(t) = & \tilde{X}_k(t) \tilde{B}_k \left\{ S_k \hat{X}_{k-1} \left[\Theta_k (\bar{\Theta}_k (\bar{G}c + \bar{F} \bar{x}) + \bar{\Xi}_k \bar{f}) - \Xi_k (\tilde{A}_k \hat{x}_k + \tilde{f}_k) \right] + \hat{x}_k \right\} \\ & + \tilde{x}_k(t) + D_k(t) (G_k c + F_k \bar{x}) + \sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{ki}} \left[\frac{d^j}{dt^j} (\tilde{\beta}_{ki}(t) + \tilde{\zeta}_{ki}(t)) \right] \tilde{\varphi}_{ki}^{(\tilde{s}_{ki}-j+1)}(t) \\ & + \sum_{i=1}^{\check{r}_k} \left(\check{\beta}_{ki}(t) + \check{\zeta}_{ki}(t) \right) \check{\varphi}_{ki}(t), \quad t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k = \overline{1, d}, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{ki}(t) \right|_{t=t_{k+1}-0} = & \tilde{\Theta}_{k+1,i}^{(j)} (\bar{\Theta}_{k+1} (\bar{G}c + \bar{F} \bar{x}) + \bar{\Xi}_{k+1} \bar{f}) \\ & - \tilde{\Xi}_{k+1,i}^{(j)} (\tilde{A}_{k+1} \hat{x}_{k+1} + \tilde{f}_{k+1}), \quad j = \overline{0, \tilde{s}_{ki}}, \quad i = \overline{1, \tilde{r}_k}, \quad k = \overline{0, d-1}, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \check{\beta}_{ki}(t_{k+1} - 0) = & \check{\Theta}_{k+1,i} (\bar{\Theta}_{k+1} (\bar{G}c + \bar{F} \bar{x}) + \bar{\Xi}_{k+1} \bar{f}) \\ & - \check{\Xi}_{k+1,i} (\tilde{A}_{k+1} \hat{x}_{k+1} + \tilde{f}_{k+1}), \quad i = \overline{1, \check{r}_k}, \quad k = \overline{0, d-1}, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_{ki}(t_k + 0) = & \left(S_k \hat{X}_{k-1} \left[\Theta_k (\bar{\Theta}_k (\bar{G}c + \bar{F} \bar{x}) + \bar{\Xi}_k \bar{f}) - \Xi_k (\tilde{A}_k \hat{x}_k + \tilde{f}_k) \right] \right. \\ & \left. + \hat{x}_k, B^*(t_k + 0) \hat{\psi}_{ki}^{(1)}(t_k + 0) \right), \quad i = \overline{1, \tilde{r}_k}, \quad k = \overline{1, d}, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{ki}(t) \right|_{t=t_k+0} = & \left[\left(S_k \hat{X}_{k-1} \left[\Theta_k (\bar{\Theta}_k (\bar{G}c + \bar{F} \bar{x}) + \bar{\Xi}_k \bar{f}) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - \Xi_k (\tilde{A}_k \hat{x}_k + \tilde{f}_k) \right] + \hat{x}_k, L^*(t) \hat{\psi}_{ki}^{(j)}(t) \right) \\ & \left. + \sum_{u=0}^{j-1} \frac{d^u}{dt^u} \left(f(t), \hat{\psi}_{ki}^{(j-u)}(t) \right) \right] \Big|_{t=t_k+0}, \end{aligned} \quad (40)$$

$$j = \overline{1, \tilde{s}_{ki}}, \quad i = \overline{1, \tilde{r}_k}, \quad k = \overline{1, d},$$

$$\begin{aligned} \check{\beta}_{ki}(t_k + 0) = & \left(S_k \hat{X}_{k-1} \left[\Theta_k (\bar{G} c + \bar{F} \bar{x}) + \bar{\Xi}_k \bar{f} \right. \right. \\ & \left. \left. - \Xi_k (\tilde{A}_k \hat{x}_k + \tilde{f}_k) \right] + \hat{x}_k, \check{\psi}_{ki}(t_k + 0) \right), \quad i = \overline{1, \check{r}_k}, \quad k = \overline{1, \bar{d}}. \end{aligned} \quad (41)$$

Доведення. Підставивши (27), (28) до (3), з урахуванням (20), (29), (31)–(33) отримаємо

$$D\tilde{c} = \bar{x}.$$

Звідси при виконанні умови (34) маємо

$$\tilde{c} = Gc + F\bar{x}. \quad (42)$$

Підставивши (42) до (15)–(19), (27), (28), з урахуванням (20), (23)–(26), (29)–(33) одержуємо (35)–(41).

Теорему доведено.

Зауваження 1. Якщо при деякому k

(*) $r_k = \hat{r}_k = 0$, то умова (11) відсутня, треба покласти в (6)

$$\Theta_k = E_{\alpha_{k-1} + \tilde{s}_{k-1} + \tilde{r}_{k-1} + \check{r}_{k-1}}, \quad \Theta_{k0} = [E_{\alpha_{k-1}}, 0_{\alpha_{k-1}, \tilde{s}_{k-1} + \tilde{r}_{k-1} + \check{r}_{k-1}}],$$

у (7)

$$\Xi_k (\tilde{A}_k \hat{x}_k + \tilde{f}_k) = 0_{\alpha_{k-1} + \tilde{s}_{k-1} + \tilde{r}_{k-1} + \check{r}_{k-1}}, \quad \Xi_{k0} (\tilde{A}_k \hat{x}_k + \tilde{f}_k) = 0_{\alpha_{k-1}},$$

у (8)

$$\begin{aligned} \bar{\Xi}_k = \text{col} \left(\bar{\Xi}_{k0}, \bar{\Xi}_{k1}^{(0)}, \dots, \bar{\Xi}_{k1}^{(\tilde{s}_{k-1}, 1)}, \dots, \bar{\Xi}_{k\tilde{r}_{k-1}}^{(0)}, \dots, \bar{\Xi}_{k\tilde{r}_{k-1}}^{(\tilde{s}_{k-1}, \tilde{r}_{k-1})}, \check{\Xi}_{k1}, \dots, \check{\Xi}_{k\check{r}_{k-1}} \right), \\ \bar{\Theta}_k = \text{col} \left(\bar{\Theta}_{k0}, \bar{\Theta}_{k1}^{(0)}, \dots, \bar{\Theta}_{k1}^{(\tilde{s}_{k-1}, 1)}, \dots, \bar{\Theta}_{k\tilde{r}_{k-1}}^{(0)}, \dots, \bar{\Theta}_{k\tilde{r}_{k-1}}^{(\tilde{s}_{k-1}, \tilde{r}_{k-1})}, \check{\Theta}_{k1}, \dots, \check{\Theta}_{k\check{r}_{k-1}} \right), \end{aligned}$$

рівності (35)–(41) замінити такими:

$$\begin{aligned} x(t) = & \tilde{X}_k(t) (\bar{\Theta}_{k+1,0} (\bar{G} c + \bar{F} \bar{x}) + \bar{\Xi}_{k+1,0} \bar{f}) + \tilde{x}_k(t) \\ & + D_k(t) (G_k c + F_k \bar{x}) + \sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{ki}} \left[\frac{d^j}{dt^j} (\tilde{\beta}_{ki}(t) + \tilde{\zeta}_{ki}(t)) \right] \tilde{\varphi}_{ki}^{(\tilde{s}_{ki}-j+1)}(t) \\ & + \sum_{i=1}^{\check{r}_k} \left(\check{\beta}_{ki}(t) + \check{\zeta}_{ki}(t) \right) \check{\varphi}_{ki}(t), \quad t \in [t_{k-1} + 0; t_k - 0], \\ x(t) = & \tilde{X}_k(t) \tilde{B}_k \left[S_k \hat{X}_{k-1} (\bar{\Theta}_k (\bar{G} c + \bar{F} \bar{x}) + \bar{\Xi}_k \bar{f}) + \hat{x}_k \right] + \tilde{x}_k(t) \\ & + D_k(t) (G_k c + F_k \bar{x}) + \sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{ki}} \left[\frac{d^j}{dt^j} (\tilde{\beta}_{ki}(t) + \tilde{\zeta}_{ki}(t)) \right] \tilde{\varphi}_{ki}^{(\tilde{s}_{ki}-j+1)}(t) \\ & + \sum_{i=1}^{\check{r}_k} \left(\check{\beta}_{ki}(t) + \check{\zeta}_{ki}(t) \right) \check{\varphi}_{ki}(t), \quad t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{k-1,i}(t) \right|_{t=t_k-0} &= \tilde{\Theta}_k^{(j)} (\bar{G} c + \bar{F} \bar{x}) + \tilde{\Xi}_k^{(j)} \bar{f}, \quad j = \overline{0, \tilde{s}_{k-1,i}}, \quad i = \overline{1, \tilde{r}_{k-1}}, \\
 \check{\beta}_{k-1,i}(t_k - 0) &= \check{\Theta}_k (\bar{G} c + \bar{F} \bar{x}) + \check{\Xi}_k \bar{f}, \quad i = \overline{1, \check{r}_{k-1}}, \\
 \tilde{\beta}_{ki}(t_k + 0) &= \left(S_k \hat{X}_{k-1} (\bar{\Theta}_k (\bar{G} c + \bar{F} \bar{x}) + \bar{\Xi}_k \bar{f}) + \hat{x}_k, B^*(t_k + 0) \hat{\psi}_{ki}^{(1)}(t_k + 0) \right), \quad i = \overline{1, \tilde{r}_k}, \\
 \left. \frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{ki}(t) \right|_{t=t_k+0} &= \left[\left(S_k \hat{X}_{k-1} (\bar{\Theta}_k (\bar{G} c + \bar{F} \bar{x}) + \bar{\Xi}_k \bar{f}) + \hat{x}_k, L^*(t) \hat{\psi}_{ki}^{(j)}(t) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{u=0}^{j-1} \frac{d^u}{dt^u} \left(f(t), \hat{\psi}_{ki}^{(j-u)}(t) \right) \right] \Big|_{t=t_k+0}, \quad j = \overline{1, \tilde{s}_{ki}}, \quad i = \overline{1, \tilde{r}_k}, \\
 \check{\beta}_{ki}(t_k + 0) &= \left(S_k \hat{X}_{k-1} (\bar{\Theta}_k (\bar{G} c + \bar{F} \bar{x}) + \bar{\Xi}_k \bar{f}) + \hat{x}_k, \check{\psi}_{ki}(t_k + 0) \right), \quad i = \overline{1, \check{r}_k}; \\
 (**) \quad \alpha_k = \tilde{r}_k = \check{r}_k = 0, &\text{ то в (11) треба покласти } \Upsilon_{k+1} = E_{s_{k+1} + \tilde{s}_{k+1}}; \\
 (***) \quad \alpha_k = 0, &\text{ то в (6), (7) відсутні відповідні блокові рядки, при цьому для деяких } u \\
 \text{рівності (15), (16) відсутні, значення } \left. \frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{u-1,i}(t) \right|_{t=t_u-0}, &j = \overline{0, \tilde{s}_{u-1,i}}, \quad i = \overline{1, \tilde{r}_{u-1}}, \quad \check{\beta}_{u-1,i}(t_u - \\
 0), \quad i = \overline{1, \check{r}_{u-1}}, &\text{ визначаються довільно, вирази (20), (29) – (31) треба замінити виразами} \\
 h_{u-1} \left(\sum_{i=1}^{\tilde{r}_{u-1}} \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{u-1,i}} \left(\frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{u-1,i}(t) \right) \tilde{\varphi}_{u-1,i}^{(\tilde{s}_{u-1,i}-j+1)}(t) + \sum_{i=1}^{\check{r}_{u-1}} \check{\beta}_{u-1,i}(t) \check{\varphi}_{u-1,i}(t) \right) (\cdot) \\
 = \bar{U}_{u-1} \bar{c} + \sum_{i=1}^{\tilde{r}_{u-1}} \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{u-1,i}} \tilde{U}_{u-1,u-1,i}^{(j)} \left. \frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{u-1,i}(t) \right|_{t=t_u-0} + \sum_{i=1}^{\check{r}_{u-1}} \check{U}_{u-1,u-1,i} \check{\beta}_{u-1,i}(t_k - 0) + v_{u-1}, \\
 h_u \left(\sum_{i=1}^{\tilde{r}_u} \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{ui}} \left(\frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{ui}(t) \right) \tilde{\varphi}_{ui}^{(\tilde{s}_{ui}-j+1)}(t) + \sum_{i=1}^{\check{r}_u} \check{\beta}_{ui}(t) \check{\varphi}_{ui}(t) \right) (\cdot) \\
 = \bar{U}_u \bar{c} + \sum_{i=1}^{\tilde{r}_{u-1}} \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{u-1,i}} \tilde{U}_{u,u-1,i}^{(j)} \left. \frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{u-1,i}(t) \right|_{t=t_u-0} + \sum_{i=1}^{\check{r}_{u-1}} \check{U}_{u,u-1,i} \check{\beta}_{u-1,i}(t_k - 0) + v_u, \\
 D = \left[\sum_{k=0}^{d-1} \left(h_k \left(\tilde{X}_k(t) \Theta_{k+1,0} \bar{\Theta}_{k+1} \right) (\cdot) + \bar{U}_k \right) + h_d \left(\tilde{X}_d(t) \tilde{B}_d S_d \hat{X}_{d-1} \Theta_d \bar{\Theta}_d \right) (\cdot) + \bar{U}_d, \right. \\
 \tilde{U}_{u-1,u-1,1}^{(0)} + \tilde{U}_{u,u-1,1}^{(0)}, \dots, U_{u-1,u-1,1}^{(\tilde{s}_{u-1,1})} + \tilde{U}_{u,u-1,1}^{(\tilde{s}_{u-1,1})}, \dots, \tilde{U}_{u-1,u-1,\tilde{r}_{u-1}}^{(0)} \\
 + \tilde{U}_{u,u-1,\tilde{r}_{u-1}}^{(0)}, \dots, U_{u-1,u-1,\tilde{r}_{u-1}}^{(\tilde{s}_{u-1,\tilde{r}_{u-1}})} + \tilde{U}_{u,u-1,\tilde{r}_{u-1}}^{(\tilde{s}_{u-1,\tilde{r}_{u-1}})}, \check{U}_{u-1,u-1,1} \\
 \left. + \check{U}_{u,u-1,1}, \dots, \check{U}_{u-1,u-1,\check{r}_{u-1}} + \check{U}_{u,u-1,\check{r}_{u-1}}, h_0 D_0(\cdot), \dots, h_d D_d(\cdot) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F &= \text{col}\left(\bar{F}, \tilde{F}_{u-1,1}^{(0)}, \dots, \tilde{F}_{u-1,1}^{(\tilde{s}_{u-1,1})}, \dots, \tilde{F}_{u-1,\tilde{r}_{u-1}}^{(0)}, \dots, \right. \\
&\quad \left. \tilde{F}_{u-1,\tilde{r}_{u-1}}^{(\tilde{s}_{u-1,\tilde{r}_{u-1}})}, \check{F}_{u-1,1}, \dots, \check{F}_{u-1,\check{r}_{u-1}}, F_0, \dots, F_d\right), \\
G &= \text{col}\left(\bar{G}, \tilde{G}_{u-1,1}^{(0)}, \dots, \tilde{G}_{u-1,1}^{(\tilde{s}_{u-1,1})}, \dots, \tilde{G}_{u-1,\tilde{r}_{u-1}}^{(0)}, \dots, \right. \\
&\quad \left. \tilde{G}_{u-1,\tilde{r}_{u-1}}^{(\tilde{s}_{u-1,\tilde{r}_{u-1}})}, \check{G}_{u-1,1}, \dots, \check{G}_{u-1,\check{r}_{u-1}}, G_0, \dots, G_d\right),
\end{aligned}$$

де $\tilde{U}_{u-1,u-1,i}^{(j)}$, $\tilde{U}_{u,u-1,i}^{(j)}$, $j = \overline{0, \tilde{s}_{u-1,i}}$, $i = \overline{1, \tilde{r}_{u-1}}$, $\check{U}_{u-1,u-1,i}$, $\check{U}_{u,u-1,i}$, $i = \overline{1, \check{r}_{u-1}}$, — вектори розмірності l , $\tilde{F}_{u-1,i}^{(j)}$, $\tilde{G}_{u-1,i}^{(j)}$, $j = \overline{0, \tilde{s}_{u-1,i}}$, $i = \overline{1, \tilde{r}_{u-1}}$, $\check{F}_{u-1,i}$, $\check{G}_{u-1,i}$, $i = \overline{1, \check{r}_{u-1}}$, — матриці-рядки розмірності l ,

$$\begin{aligned}
\tilde{c} &= \text{col}\left(\bar{c}, \tilde{\beta}_{u-1,1}(t_u - 0), \dots, \left.\frac{d\tilde{s}_{u-1,1}}{dt\tilde{s}_{u-1,1}} \tilde{\beta}_{u-1,1}(t)\right|_{t=t_u-0}, \dots, \tilde{\beta}_{u-1,\tilde{r}_{u-1}}(t_u - 0), \dots, \right. \\
&\quad \left. \frac{d\tilde{s}_{u-1,\tilde{r}_{u-1}}}{dt\tilde{s}_{u-1,\tilde{r}_{u-1}}} \tilde{\beta}_{u-1,\tilde{r}_{u-1}}(t)\right|_{t=t_u-0}, \check{\beta}_{u-1,1}(t_u - 0), \dots, \check{\beta}_{u-1,\check{r}_{u-1}}(t_u - 0), \tilde{c}_0, \dots, \tilde{c}_d\right).
\end{aligned}$$

Зауваження 2. Якщо $\dim \ker \bar{A} = \tilde{r}_0 = \dots = \tilde{r}_d = \check{r}_0 = \dots = \check{r}_d = 0$, то рівність (29) відсутня, в (34) слід покласти $H = E_l$.

Якщо $t_1 = a$ (відрізок $[t_0 + 0; t_1 - 0]$ вироджується в точку), то покладемо $\hat{A}_0 = [A(t_1 - 0), -B(t_1 - 0)]$, $\hat{\Xi}_0 = \hat{A}_0^-$, матриці $\hat{\Theta}_0$ і Υ_0 складемо з елементів базисів $\ker \hat{A}_0$ і $\ker \hat{A}_0^*$, $\hat{\Xi}_0$, $\hat{\Theta}_0$ подамо у вигляді $\hat{\Xi}_0 = \text{col}(\Xi_{00}, \Xi_{01})$, $\hat{\Theta}_0 = \text{col}(\Theta_{00}, \Theta_{01})$, де Ξ_{00} і Ξ_{01} — прямокутні матриці розмірності $n \times m$, Θ_{00} і Θ_{01} — $n \times \dim \ker \hat{A}_0$ відповідно, $\hat{X}_0 = \Theta_{00}$, $\tilde{x}(t_1 - 0) = -\Xi_{00}f(t_1 - 0)$.

Якщо $a = t_1$, $b > t_d$, то покладемо

$$D = \left[h_0(\Theta_{00}\Theta_1\bar{\Theta}_1) + \sum_{k=1}^d \left(h_k \left(\tilde{X}_k(t) \tilde{B}_k S_k \hat{X}_{k-1} \Theta_k \bar{\Theta}_k \right) (\cdot) + U_k \right), h_1 D_1(\cdot), \dots, h_d D_d(\cdot) \right],$$

$$F = \text{col}(\bar{F}, F_1, \dots, F_d), \quad G = \text{col}(\bar{G}, G_1, \dots, G_d), \quad \tilde{c} = \text{col}(\bar{c}, \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_d),$$

$$\begin{aligned}
\tilde{x} &= \gamma - h_0 \left[\Theta_{00} \left(\Theta_1 \bar{\Xi}_1 \bar{f} - \Xi_1 \left(\tilde{A}_1 \hat{x}_1 + \tilde{f}_1 \right) \right) - \Xi_{00} f(t_1 - 0) \right] \\
&\quad - \sum_{k=1}^d \left\{ h_k \left[\tilde{X}_k(t) \tilde{B}_k \left(S_k \hat{X}_{k-1} \left(\Theta_k \bar{\Xi}_k \bar{f} - \Xi_k \left(\tilde{A}_k \hat{x}_k + \tilde{f}_k \right) \right) + \hat{x}_k \right) + \tilde{x}_k(t) \right] (\cdot) + v_k \right\}, \\
\bar{x} &= \tilde{x} - \sum_{k=1}^d h_k \left(\sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{ki}} \left(\frac{d^j}{dt^j} \tilde{\zeta}_{ki}(t) \right) \tilde{\varphi}_{ki}^{(\tilde{s}_{ki}-j+1)}(t) + \sum_{i=1}^{\check{r}_k} \check{\zeta}_{ki}(t) \check{\varphi}_{ki}(t) \right) (\cdot).
\end{aligned}$$

Згідно з [14] для розв'язності системи (1), (2) необхідно й достатньо виконання рівностей (9), (10), $k = \overline{1, d}$, (11), (12),

$$\Upsilon_0^* f(t_1 - 0) = 0. \quad (43)$$

При їхньому виконанні вона має загальний розв'язок (13)–(19), $k = \overline{1, d}$,

$$\left. \frac{d^j}{dt^j} x(t) \right|_{t=t_1-0} = \Theta_{0j} \left[\Theta_1 (\bar{\Theta}_1 \bar{c} + \bar{\Xi}_1 \bar{f}) - \Xi_1 (\tilde{A}_1 \hat{x}_1 + \tilde{f}_1) \right] - \Xi_{0j} f(t_1 - 0), \quad j = 0, 1. \quad (44)$$

Теорема 2. Якщо $a = t_1$, $b > t_d$, існують множини векторів 1)–4), $\alpha_k > 0$, $k = \overline{1, d}$, то крайова задача (1)–(3) розв'язна в тому й тільки тому випадку, коли виконуються рівності (9), (10), $k = \overline{1, d}$, (11), (12), (34), (43). При їхньому виконанні вона має розв'язки (23)–(26), (35)–(41), $k = \overline{1, d}$,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^j}{dt^j} x(t) \right|_{t=t_1-0} &= \Theta_{0j} \left[\Theta_1 (\bar{\Theta}_1 (\bar{G} c + \bar{F} \bar{x}) + \bar{\Xi}_1 \bar{f}) \right. \\ &\quad \left. - \Xi_1 (\tilde{A}_1 \hat{x}_1 + \tilde{f}_1) \right] - \Xi_{0j} f(t_1 - 0), \quad j = 0, 1. \end{aligned} \quad (45)$$

Якщо $t_d = b$ (відрізок $[t_d + 0; t_{d+1} - 0]$ вироджується в точку), то покладемо $\tilde{A}_d = A(t_d + 0)$, $\tilde{f}_d = f(t_d + 0)$, $\hat{A}_d = [\tilde{A}_d S_d \hat{X}_{d-1}, -B(t_d + 0)]$, $\hat{\Xi}_d = \hat{A}_d^-$, матриці $\hat{\Theta}_d$ і Υ_d складемо з елементів базисів $\ker \hat{A}_d$ і $\ker \hat{A}_d^*$, $\hat{\Xi}_d$ і $\hat{\Theta}_d$ подамо у вигляді $\hat{\Xi}_d = \text{col}(\Xi_d, \Xi_{d1})$, $\hat{\Theta}_d = \text{col}(\Theta_d, \Theta_{d1})$, де Ξ_d і Θ_d — матриці (4) і (5), Ξ_{d1} і Θ_{d1} — прямокутні матриці розмірності $n \times m$ і $n \times \dim \ker \hat{A}_d$ відповідно.

Якщо $a < t_1$, $b = t_d$, то покладемо

$$D = \left[\sum_{k=0}^{d-1} \left(h_k \left(\tilde{X}_k(t) \Theta_{k+1,0} \bar{\Theta}_{k+1} \right) (\cdot) + U_k \right) + h_d \left(S_d \hat{X}_{d-1} \Theta_d \bar{\Theta}_d \right), h_0 D_0(\cdot), \dots, h_{d-1} D_{d-1}(\cdot) \right],$$

$$F = \text{col}(\bar{F}, F_0, \dots, F_{d-1}), \quad G = \text{col}(\bar{G}, G_0, \dots, G_{d-1}), \quad \tilde{c} = \text{col}(\bar{c}, \tilde{c}_0, \dots, \tilde{c}_{d-1}),$$

$$\begin{aligned} \tilde{x} = \gamma - \sum_{k=0}^{d-1} \left\{ h_k \left[\tilde{X}_k(t) \left(\Theta_{k+1,0} \bar{\Xi}_{k+1} \bar{f} - \Xi_{k+1,0} (\tilde{A}_{k+1} \hat{x}_{k+1} + \tilde{f}_{k+1}) \right) + \tilde{x}_k(t) \right] (\cdot) + v_k \right\} \\ - h_d \left[S_d \hat{X}_{d-1} \left(\Theta_d \bar{\Xi}_d \bar{f} - \Xi_d (\tilde{A}_d \hat{x}_d + \tilde{f}_d) \right) + \hat{x}_d \right], \end{aligned}$$

$$\bar{x} = \tilde{x} - \sum_{k=0}^{d-1} h_k \left(\sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{ki}} \left(\frac{d^j}{dt^j} \tilde{\zeta}_{ki}(t) \right) \tilde{\varphi}_{ki}^{(\tilde{s}_{ki}-j+1)}(t) + \sum_{i=1}^{\check{r}_k} \check{\zeta}_{ki}(t) \check{\varphi}_{ki}(t) \right) (\cdot).$$

Згідно з [14] для розв'язності системи (1), (2) необхідно й достатньо виконання рівностей (9), (10), $k = \overline{0, d-1}$, (11), (12). При їхньому виконанні вона має загальний розв'язок (13)–(19), $k = \overline{0, d-1}$,

$$x(t_d + 0) = S_d \hat{X}_{d-1} \left[\Theta_d (\bar{\Theta}_d \bar{c} + \bar{\Xi}_d \bar{f}) - \Xi_d (\tilde{A}_d \hat{x}_d + \tilde{f}_d) \right] + \hat{x}_d, \quad (46)$$

$$\left. \frac{d}{dt} x(t) \right|_{t=t_d+0} = \Theta_{d1} (\bar{\Theta}_d \bar{c} + \bar{\Xi}_d \bar{f}) - \Xi_{d1} (\tilde{A}_d \hat{x}_d + \tilde{f}_d). \quad (47)$$

Теорема 3. Якщо $a < t_1$, $b = t_d$, існують множини векторів 1)–4), $\alpha_k > 0$, $k = \overline{0, d-1}$, то крайова задача (1)–(3) розв'язна в тому й тільки тому випадку, коли виконуються

рівності (9), (10), $k = \overline{0, d-1}$, (11), (12), (34). При їхньому виконанні вона має розв'язки (23) – (26), (35) – (41), $k = \overline{0, d-1}$,

$$x(t_d + 0) = S_d \hat{X}_{d-1} \left[\Theta_d (\bar{\Theta}_d (\bar{G} c + \bar{F} \bar{x}) + \bar{\Xi}_d \bar{f}) - \Xi_d (\tilde{A}_d \hat{x}_d + \tilde{f}_d) \right] + \hat{x}_d, \quad (48)$$

$$\left. \frac{d}{dt} x(t) \right|_{t=t_d+0} = \Theta_{d1} (\bar{\Theta}_d (\bar{G} c + \bar{F} \bar{x}) + \bar{\Xi}_d \bar{f}) - \Xi_{d1} (\tilde{A}_d \hat{x}_d + \tilde{f}_d). \quad (49)$$

Якщо $a = t_1$, $b = t_d$, то покладемо

$$D = \left[h_0 (\Theta_{00} \Theta_1 \bar{\Theta}_1) + \sum_{k=1}^{d-1} \left(h_k \left(\tilde{X}_k(t) \Theta_{k+1,0} \bar{\Theta}_{k+1} \right) (\cdot) + U_k \right) \right. \\ \left. + h_d \left(S_d \hat{X}_{d-1} \Theta_d \bar{\Theta}_d \right), h_1 D_1(\cdot), \dots, h_{d-1} D_{d-1}(\cdot) \right],$$

$$F = \text{col}(\bar{F}, F_1, \dots, F_{d-1}), \quad G = \text{col}(\bar{G}, G_1, \dots, G_{d-1}), \quad \tilde{c} = \text{col}(\bar{c}, \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_{d-1}),$$

$$\begin{aligned} \check{x} = \gamma - h_0 \left\{ \Theta_{00} \left[\Theta_1 \bar{\Xi}_1 \bar{f} - \Xi_1 (\tilde{A}_1 \hat{x}_1 + \tilde{f}_1) \right] - \Xi_{00} f(t_1 - 0) \right\} \\ - \sum_{k=1}^{d-1} \left\{ h_k \left[\tilde{X}_k(t) \left(\Theta_{k+1,0} \bar{\Xi}_{k+1} \bar{f} - \Xi_{k+1,0} (\tilde{A}_{k+1} \hat{x}_{k+1} + \tilde{f}_{k+1}) \right) + \tilde{x}_k(t) \right] (\cdot) + v_k \right\} \\ - h_d \left\{ S_d \hat{X}_{d-1} \left[\Theta_d \bar{\Xi}_d \bar{f} - \Xi_d (\tilde{A}_d \hat{x}_d + \tilde{f}_d) \right] + \hat{x}_d \right\}, \\ \bar{x} = \check{x} - \sum_{k=1}^{d-1} h_k \left(\sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{ki}} \left(\frac{d^j}{dt^j} \tilde{\zeta}_{ki}(t) \right) \tilde{\varphi}_{ki}^{(\tilde{s}_{ki}-j+1)}(t) + \sum_{i=1}^{\check{r}_k} \check{\zeta}_{ki}(t) \check{\varphi}_{ki}(t) \right) (\cdot). \end{aligned}$$

Згідно з [14] для розв'язності системи (1), (2) необхідно й достатньо виконання рівностей (9), (10), $k = \overline{1, d-1}$, (11), (12), (43). При їхньому виконанні вона має загальний розв'язок (13) – (19), $k = \overline{1, d-1}$, (44), (46), (47).

Теорема 4. Якщо $a = t_1$, $b = t_d$, існують множини векторів 1)–4), $\alpha_k > 0$, $k = \overline{1, d-1}$, то крайова задача (1)–(3) розв'язна в тому й тільки тому випадку, коли виконуються рівності (9), (10), $k = \overline{1, d-1}$, (11), (12), (34), (43). При їхньому виконанні вона має розв'язки (23) – (26), (35) – (41), $k = \overline{1, d-1}$, (45), (48), (49).

Наслідок 1. Відповідна (1), (2) однорідна крайова задача

$$B(t) \frac{dx}{dt} = A(t), \quad t \in [a; b] \setminus \{t_i, i = \overline{1, d}\},$$

$$x(t_i + 0) = S_i x(t_i - 0), \quad i = \overline{1, d},$$

$$\sum_{i=0}^d h_i x(\cdot) = 0_l$$

розв'язна при будь-якому розташуванні точок t_1 і t_d на відрізку $[a; b]$ і має розв'язки:

– якщо $a < t_1$, $b > t_d$, то (23)–(26), $k = \overline{0, d}$,

$$\begin{aligned}\bar{x} &= - \sum_{k=0}^d h_k \left(\sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{ki}} \left(\frac{d^j}{dt^j} \tilde{\zeta}_{ki}(t) \right) \tilde{\varphi}_{ki}^{(\tilde{s}_{ki}-j+1)}(t) + \sum_{i=1}^{\check{r}_k} \check{\zeta}_{ki}(t) \check{\varphi}_{ki}(t) \right) (\cdot), \\ x(t) &= \tilde{X}_k(t) \Theta_{k+1,0} \bar{\Theta}_{k+1} (\bar{G}c + \bar{F}\bar{x}) + D_k(t) (G_k c + F_k \bar{x}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{ki}} \left[\frac{d^j}{dt^j} \left(\tilde{\beta}_{ki}(t) + \tilde{\zeta}_{ki}(t) \right) \right] \tilde{\varphi}_{ki}^{(\tilde{s}_{ki}-j+1)}(t) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\check{r}_k} \left(\check{\beta}_{ki}(t) + \check{\zeta}_{ki}(t) \right) \check{\varphi}_{ki}(t), \quad t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k = \overline{0, d-1},\end{aligned}\quad (50)$$

$$\begin{aligned}x(t) &= \tilde{X}_k(t) \tilde{B}_k S_k \hat{X}_{k-1} \Theta_k \bar{\Theta}_k (\bar{G}c + \bar{F}\bar{x}) + D_k(t) (G_k c + F_k \bar{x}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{ki}} \left[\frac{d^j}{dt^j} \left(\tilde{\beta}_{ki}(t) + \tilde{\zeta}_{ki}(t) \right) \right] \tilde{\varphi}_{ki}^{(\tilde{s}_{ki}-j+1)}(t) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\check{r}_k} \left(\check{\beta}_{ki}(t) + \check{\zeta}_{ki}(t) \right) \check{\varphi}_{ki}(t), \quad t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k = \overline{1, d},\end{aligned}\quad (51)$$

$$\left. \frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{ki}(t) \right|_{t=t_{k+1}-0} = \tilde{\Theta}_{k+1,i}^{(j)} \bar{\Theta}_{k+1} (\bar{G}c + \bar{F}\bar{x}), \quad j = \overline{0, \tilde{s}_{ki}}, \quad i = \overline{1, \tilde{r}_k}, \quad k = \overline{0, d-1}, \quad (52)$$

$$\check{\beta}_{ki}(t_{k+1} - 0) = \check{\Theta}_{k+1,i} \bar{\Theta}_{k+1} (\bar{G}c + \bar{F}\bar{x}), \quad i = \overline{1, \check{r}_k}, \quad k = \overline{0, d-1}, \quad (53)$$

$$\tilde{\beta}_{ki}(t_k + 0) = \left(S_k \hat{X}_{k-1} \Theta_k \bar{\Theta}_k (\bar{G}c + \bar{F}\bar{x}), B^*(t_k + 0) \hat{\psi}_{ki}^{(1)}(t_k + 0) \right), \quad i = \overline{1, \tilde{r}_k}, \quad k = \overline{1, d}, \quad (54)$$

$$\begin{aligned}\left. \frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{ki}(t) \right|_{t=t_k+0} &= \left(S_k \hat{X}_{k-1} \Theta_k \bar{\Theta}_k (\bar{G}c + \bar{F}\bar{x}), L^*(t) \hat{\psi}_{ki}^{(j)}(t) \right) \Big|_{t=t_k+0}, \\ j &= \overline{1, \tilde{s}_{ki}}, \quad i = \overline{1, \tilde{r}_k}, \quad k = \overline{1, d},\end{aligned}\quad (55)$$

$$\check{\beta}_{ki}(t_k + 0) = \left(S_k \hat{X}_{k-1} \Theta_k \bar{\Theta}_k (\bar{G}c + \bar{F}\bar{x}), \check{\psi}_{ki}(t_k + 0) \right), \quad i = \overline{1, \check{r}_k}, \quad k = \overline{1, d}, \quad (56)$$

– якщо $a = t_1$, $b > t_d$, то (23)–(26), (50)–(56), $k = \overline{1, d}$,

$$\begin{aligned}\bar{x} &= - \sum_{k=1}^d h_k \left(\sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{ki}} \left(\frac{d^j}{dt^j} \tilde{\zeta}_{ki}(t) \right) \tilde{\varphi}_{ki}^{(\tilde{s}_{ki}-j+1)}(t) + \sum_{i=1}^{\check{r}_k} \check{\zeta}_{ki}(t) \check{\varphi}_{ki}(t) \right) (\cdot), \\ \left. \frac{d^j}{dt^j} x(t) \right|_{t=t_1-0} &= \Theta_{0j} \Theta_1 \bar{\Theta}_1 (\bar{G}c + \bar{F}\bar{x}), \quad j = \overline{0, 1};\end{aligned}\quad (57)$$

– якщо $a < t_1$, $b = t_d$, то (23)–(26), (50)–(56), $k = \overline{0, d-1}$,

$$\bar{x} = - \sum_{k=0}^{d-1} h_k \left(\sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{ki}} \left(\frac{d^j}{dt^j} \tilde{\zeta}_{ki}(t) \right) \tilde{\varphi}_{ki}^{(\tilde{s}_{ki}-j+1)}(t) + \sum_{i=1}^{\check{r}_k} \check{\zeta}_{ki}(t) \check{\varphi}_{ki}(t) \right) (\cdot),$$

$$x(t_d + 0) = S_d \hat{X}_{d-1} \Theta_d \bar{\Theta}_d (\bar{G}c + \bar{F}\bar{x}), \quad (58)$$

$$\left. \frac{d}{dt} x(t) \right|_{t=t_d+0} = \Theta_{d1} \bar{\Theta}_d (\bar{G}c + \bar{F}\bar{x}); \quad (59)$$

– якщо $a = t_1$, $b = t_d$, то (23)–(26), (50)–(56), $k = \overline{1, d-1}$, (57)–(59),

$$\bar{x} = - \sum_{k=1}^{d-1} h_k \left(\sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{ki}} \left(\frac{d^j}{dt^j} \tilde{\zeta}_{ki}(t) \right) \tilde{\varphi}_{ki}^{(\tilde{s}_{ki}-j+1)}(t) + \sum_{i=1}^{\check{r}_k} \check{\zeta}_{ki}(t) \check{\varphi}_{ki}(t) \right) (\cdot).$$

4. Приклад. Нехай в (1)–(3) $m = n = 2$, $d = 2$, $a < t_1 < t_2 < b$, $h_0 x(\cdot) = -x(t_0 + 0)$, $h_1 x(\cdot)$ відсутній, $h_2 x(\cdot) = x(t_2 - 0)$,

$$B(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix},$$

$$S_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \eta_k = \begin{bmatrix} \eta_{k1} \\ \eta_{k2} \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \quad \gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix},$$

$a_{ij}(t), f_i(t) \in C^\infty[a; b] \setminus t_k$ — дійсні скалярні функції, η_{ki}, γ_i — дійсні числа, $i, j, k = 1, 2$, жорданова структура одна й та ж на відрізках $[t_k - 0; t_{k+1} + 0]$, $k = \overline{0, 2}$.

Розглянемо такі випадки [3, 13, 14, 16, 17].

Випадок I. $a_{22}(t) \neq 0 \forall t \in [a; b]$. Маємо: $r_k = 1$, $s_{k1} = 1$, $\check{r}_k = \check{r}_k = \tilde{r}_k = \hat{r}_k = 0$, $\alpha_k = 1$,

$$\varphi_{k1}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \psi_{k1}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix}, \quad q_{k1}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix}, \quad p_{k1}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{12}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix},$$

$$X_k(t) = \exp \left(\int_{t_k+0}^t \lambda(z) dz \right), \quad \tilde{X}_k(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix} \exp \left(\int_{t_k+0}^t \lambda(z) dz \right),$$

$$\tilde{x}_k(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix} \int_{t_k+0}^t \exp \left(\int_{\tau}^t \lambda(z) dz \right) \times (f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)) d\tau - \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22}^{-1}(t)f_2(t) \end{bmatrix}, \quad k = \overline{0, 2},$$

де $\lambda(t) = a_{11}(t) - a_{12}(t)a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t)$ — скалярна функція,

$$\hat{X}_k = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t_{k+1}-0)a_{22}^{-1}(t_{k+1}-0) \end{bmatrix} \exp \left(\int_{t_k+0}^{t_{k+1}-0} \lambda(z) dz \right), \quad k = 0, 1,$$

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_k &= [a_{21}(t_k + 0)a_{22}^{-1}(t_k + 0) \quad 1], \quad \tilde{f}_k = a_{22}^{-1}(t_k + 0)f_2(t_k + 0), \quad \tilde{B}_k = [1 \quad 0], \\
\hat{A}_k &= \exp\left(\int_{t_{k-1}+0}^{t_k-0} \lambda(z)dz\right), \quad \Xi_k = \exp\left(-\int_{t_{k-1}+0}^{t_k-0} \lambda(z)dz\right), \quad \Theta_k = \Upsilon_k = 0, \\
\hat{x}_k &= \begin{bmatrix} \eta_{k1} \\ \int_{t_{k-1}+0}^{t_k-0} \exp\left(\int_{\tau}^{t_k-0} \lambda(z)dz\right)(f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau))d\tau + \eta_{k2} \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \\
\bar{A} &= [0 \quad 0], \quad \bar{\Xi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\Theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\Upsilon} = 1, \\
\bar{f} &= -\eta_{11} - \exp\left(-\int_{t_1+0}^{t_2-0} \lambda(z)dz\right)(a_{21}(t_2 + 0)a_{22}^{-1}(t_2 + 0)\eta_{21} + \eta_{22} + a_{22}^{-1}(t_2 + 0)f(t_2 + 0)) \\
&\quad - \int_{t_1+0}^{t_2-0} \exp\left(-\int_{t_1+0}^{\tau} \lambda(z)dz\right)(f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau))d\tau, \\
D = F &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \\
\bar{x} = \tilde{x} &= \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t_0 + 0)a_{22}^{-1}(t_0 + 0) \end{bmatrix} \exp\left(-\int_{t_0+0}^{t_1-0} \lambda(z)dz\right) \\
&\quad \times (a_{21}(t_1 + 0)a_{22}^{-1}(t_1 + 0)\eta_{11} + \eta_{12} + a_{22}^{-1}(t_1 + 0)f_2(t_1 + 0)) \\
&\quad - \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t_0 + 0)a_{22}^{-1}(t_0 + 0) \end{bmatrix} \int_{t_0+0}^{t_1-0} \exp\left(-\int_{t_0+0}^{\tau} \lambda(z)dz\right)(f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau))d\tau \\
&\quad - \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22}^{-1}(t_0 + 0)f_2(t_0 + 0) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t_3 - 0)a_{22}^{-1}(t_3 - 0) \end{bmatrix} \exp\left(\int_{t_2+0}^{t_3-0} \lambda(z)dz\right)\eta_{21} \\
&\quad - \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t_3 - 0)a_{22}^{-1}(t_3 - 0) \end{bmatrix} \int_{t_2+0}^{t_3-0} \exp\left(\int_{\tau}^{t_3-0} \lambda(z)dz\right)(f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau))d\tau \\
&\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22}^{-1}(t_3 - 0)f_2(t_3 - 0) \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

умови (9), (10) відсутні, (11) виконується, з (12), (34) випливає

$$\begin{aligned}
 & \eta_{11} + \exp\left(-\int_{t_1+0}^{t_2-0} \lambda(z) dz\right) (a_{21}(t_2+0)a_{22}^{-1}(t_2+0)\eta_{21} + \eta_{22} + a_{22}^{-1}(t_2+0)f(t_2+0)) \\
 & + \int_{t_1+0}^{t_2-0} \exp\left(-\int_{t_1+0}^{\tau} \lambda(z) dz\right) (f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)) d\tau = 0, \\
 & \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t_0+0)a_{22}^{-1}(t_0+0) \end{bmatrix} \exp\left(-\int_{t_0+0}^{t_1-0} \lambda(z) dz\right) \\
 & \times (a_{21}(t_1+0)a_{22}^{-1}(t_1+0)\eta_{11} + \eta_{12} + a_{22}^{-1}(t_1+0)f_2(t_1+0)) \\
 & + \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t_0+0)a_{22}^{-1}(t_0+0) \end{bmatrix} \int_{t_0+0}^{t_1-0} \exp\left(-\int_{t_0+0}^{\tau} \lambda(z) dz\right) (f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)) d\tau \\
 & + \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22}^{-1}(t_0+0)f_2(t_0+0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t_3-0)a_{22}^{-1}(t_3-0) \end{bmatrix} \exp\left(-\int_{t_2+0}^{t_3-0} \lambda(z) dz\right) \eta_{21} \\
 & + \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t_3-0)a_{22}^{-1}(t_3-0) \end{bmatrix} \int_{t_2+0}^{t_3-0} \exp\left(-\int_{\tau}^{t_3-0} \lambda(z) dz\right) (f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)) d\tau \\
 & - \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22}^{-1}(t_3-0)f_2(t_3-0) \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

При їхньому виконанні крайова задача (1)–(3) має єдиний розв'язок (35), (36):

$$\begin{aligned}
 x(t) = & -\begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix} \exp\left(-\int_t^{t_1-0} \lambda(z) dz\right) \\
 & \times (a_{21}(t_1+0)a_{22}^{-1}(t_1+0)\eta_{11} + \eta_{12} + a_{22}^{-1}(t_1+0)f_2(t_1+0)) \\
 & - \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix} \int_t^{t_1-0} \exp\left(-\int_t^{\tau} \lambda(z) dz\right) (f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)) d\tau \\
 & - \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22}^{-1}(t)f_2(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [t_0+0; t_1-0],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x(t) = & \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix} \exp\left(\int_{t_k+0}^t \lambda(z) dz\right) \eta_{k1} + \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix} \\
& \times \int_{t_k+0}^t \exp\left(\int_{\tau}^t \lambda(z) dz\right) (f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)) d\tau - \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22}^{-1}(t)f_2(t) \end{bmatrix}, \\
& t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k = 1, 2.
\end{aligned}$$

Випадок 2. $a_{22}(t) \equiv 0$, $a_{12}(t) \neq 0$, $a_{21}(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a; b]$. **Маємо:** $r_k = 1$, $s_{k1} = 2$, $\check{r}_k = \check{r}_k = \check{r}_k = \hat{r}_k = 0$, $\alpha_k = 0$,

$$\begin{aligned}
\varphi_{k1}^{(1)}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \varphi_{k1}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} a_{12}(t) \\ a_{12}^{-1}(t) \frac{d}{dt} a_{12}(t) - a_{11}(t) \end{bmatrix}, \\
\psi_{k1}^{(1)}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ a_{12}^{-1}(t)a_{21}^{-1}(t) \end{bmatrix}, \quad \psi_{k1}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} a_{12}^{-1}(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \\
\tilde{x}_k(t) &= \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(t)f_2(t) \\ a_{12}^{-1}(t) \left(a_{11}(t)a_{21}^{-1}(t)f_2(t) - f_1(t) - \frac{d}{dt} (a_{21}^{-1}(t)f_2(t)) \right) \end{bmatrix}, \quad k = \overline{0, 2}, \\
\tilde{A}_k &= \begin{bmatrix} a_{11}(t_k + 0)a_{12}^{-1}(t_k + 0) + \frac{d}{dt} a_{12}^{-1}(t) \Big|_{t=t_k+0} & 1 \\ a_{12}^{-1}(t_k + 0) & 0 \end{bmatrix}, \\
\tilde{f}_k &= \begin{bmatrix} a_{12}^{-1}(t_k + 0)f_1(t_k + 0) + \frac{d}{dt} (a_{12}^{-1}(t)a_{21}^{-1}(t)f_2(t)) \Big|_{t=t_k+0} \\ a_{12}^{-1}(t_k + 0)a_{21}^{-1}(t_k + 0)f_2(t_k + 0) \end{bmatrix}, \quad \Upsilon_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
\hat{x}_k &= \begin{bmatrix} \eta_{k1} \\ -a_{21}^{-1}(t_k - 0)f_2(t_k - 0) + \eta_{k2} \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
\bar{x} = \tilde{x} &= \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(t_0 + 0)f_2(t_0 + 0) \\ a_{12}^{-1}(t_0 + 0) \left(a_{11}(t_0 + 0)a_{21}^{-1}(t_0 + 0)f_2(t_0 + 0) - f_1(t_0 + 0) - \frac{d}{dt} (a_{21}^{-1}(t)f_2(t)) \Big|_{t=t_0+0} \right) \end{bmatrix} \\
&- \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(t_3 - 0)f_2(t_3 - 0) \\ a_{12}^{-1}(t_3 - 0) \left(a_{11}(t_3 - 0)a_{21}^{-1}(t_3 - 0)f_2(t_3 - 0) - f_1(t_3 - 0) - \frac{d}{dt} (a_{21}^{-1}(t)f_2(t)) \Big|_{t=t_3-0} \right) \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

умови (9), (10), (12) не виконуються, (11) з урахуванням зауваження 1 має вигляд

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c} \left(a_{11}(t_k + 0)a_{12}^{-1}(t_k + 0) + \frac{d}{dt} a_{12}^{-1}(t) \Big|_{t=t_k+0} \right) \eta_{k1} - a_{21}^{-1}(t_k - 0)f_2(t_k - 0) + \eta_{k2} \\ a_{12}^{-1}(t_k + 0)\eta_{k1} \end{array} \right] \\ & + \left[\begin{array}{c} a_{12}^{-1}(t_k + 0)f_1(t_k + 0) + \frac{d}{dt} (a_{12}^{-1}(t)a_{21}^{-1}(t)f_2(t)) \Big|_{t=t_k+0} \\ a_{12}^{-1}(t_k + 0)a_{21}^{-1}(t_k + 0)f_2(t_k + 0) \end{array} \right] = 0, \quad k = 1, 2, \end{aligned}$$

з (34) з урахуванням зауваження 2 випливає

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \\ & = - \left[\begin{array}{c} -a_{21}^{-1}(t_0 + 0)f_2(t_0 + 0) \\ a_{12}^{-1}(t_0 + 0) \left(a_{11}(t_0 + 0)a_{21}^{-1}(t_0 + 0)f_2(t_0 + 0) - f_1(t_0 + 0) - \frac{d}{dt} (a_{21}^{-1}(t)f_2(t)) \Big|_{t=t_0+0} \right) \end{array} \right] \\ & + \left[\begin{array}{c} -a_{21}^{-1}(t_3 - 0)f_2(t_3 - 0) \\ a_{12}^{-1}(t_3 - 0) \left(a_{11}(t_3 - 0)a_{21}^{-1}(t_3 - 0)f_2(t_3 - 0) - f_1(t_3 - 0) - \frac{d}{dt} (a_{21}^{-1}(t)f_2(t)) \Big|_{t=t_3-0} \right) \end{array} \right]. \end{aligned}$$

При їхньому виконанні крайова задача (1)–(3) має єдиний розв’язок (35), (36):

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(t)f_2(t) \\ a_{12}^{-1}(t) \left(a_{11}(t)a_{21}^{-1}(t)f_2(t) - f_1(t) - \frac{d}{dt} (a_{21}^{-1}(t)f_2(t)) \right) \end{bmatrix}, \\ & t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k = \overline{0, 2}. \end{aligned}$$

Випадок 3. $a_{22}(t) \equiv 0$, $a_{12}(t) \neq 0$, $a_{21}(t) \equiv 0 \quad \forall t \in [a; b]$. Маємо: $\tilde{r}_k = 1$, $\tilde{s}_{k1} = 1$, $\check{r}_k = 1$, $\check{r}_k = r_k = \hat{r}_k = 0$, $\alpha_k = 0$,

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{k1}^{(1)}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\varphi}_{k1}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} a_{12}(t) \\ a_{12}^{-1}(t) \frac{d}{dt} a_{12}(t) - a_{11}(t) \end{bmatrix}, \quad \check{\psi}_{k1}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \hat{\psi}_{k1}^{(1)}(t) &= \begin{bmatrix} a_{12}^{-1}(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \check{\varphi}_{k1}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}_k(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -a_{12}^{-1}(t)f_1(t) \end{bmatrix}, \quad k = \overline{0, 2}, \\ \hat{X}_k &= \begin{bmatrix} a_{12}(t_{k+1} - 0) & 0 \\ a_{12}^{-1}(t_{k+1} - 0) \frac{d}{dt} a_{12}(t) \Big|_{t=t_{k+1}-0} & -a_{11}(t_{k+1} - 0) & 1 \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1, \end{aligned}$$

$$\hat{x}_k = \begin{bmatrix} \eta_{k1} \\ \eta_{k2} \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2,$$

$\mu = 2$, функції $\tilde{\beta}_{k1}(t)$, $k = \overline{0, 2}$, $\xi_{01}(t)$, $\xi_{21}(t)$ візьмемо такі, щоб виконувалися рівності

$$\left. \frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{01}(t) \right|_{t=t_0+0} = \left. \frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{21}(t) \right|_{t=t_3-0} = 0, \quad j = 0, 1,$$

$$\xi_{01}(t_0 + 0) = -a_{12}^{-1}(t_0 + 0),$$

$$\left. \frac{d}{dt} \xi_{01}(t) \right|_{t=t_0+0} = a_{12}^{-1}(t_0 + 0) \left(a_{12}^{-1}(t_0 + 0) \left. \frac{d}{dt} a_{12}(t) \right|_{t=t_0+0} - a_{11}(t_0 + 0) \right),$$

$$\xi_{21}(t_3 - 0) = 0, \quad \left. \frac{d}{dt} \xi_{21}(t) \right|_{t=t_3-0} = 1.$$

Тоді

$$\tilde{U}_{001}^{(j)} = \tilde{U}_{211}^{(j)} = \tilde{U}_{221}^{(j)} = v_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$D_k = \begin{bmatrix} a_{12}(t)\xi_{k1}(t) \\ \left(a_{12}^{-1}(t) \frac{d}{dt} a_{12}(t) - a_{11}(t) \right) \xi_{k1}(t) + \frac{d}{dt} \xi_{k1}(t) \end{bmatrix}, \quad k = 0, 2,$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix},$$

$$\check{x} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 - a_{12}^{-1}(t_0 + 0)f_1(t_0 + 0) + a_{12}^{-1}(t_3 - 0)f_1(t_3 - 0) \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \bar{x} = & \left[\begin{array}{c} \gamma_1 \\ \gamma_2 - a_{12}^{-1}(t_0 + 0)f_1(t_0 + 0) + a_{12}^{-1}(t_3 - 0)f_1(t_3 - 0) \end{array} \right] \\ & + \left[\begin{array}{c} a_{12}(t_0 + 0)\tilde{\zeta}_{01}(t_0 + 0) \\ \left(a_{12}^{-1}(t_0 + 0) \frac{d}{dt} a_{12}(t) \Big|_{t=t_0+0} - a_{11}(t_0 + 0) \right) \tilde{\zeta}_{01}(t_0 + 0) + \frac{d}{dt} \tilde{\zeta}_{01}(t) \Big|_{t=t_0+0} \end{array} \right] \\ & - \left[\begin{array}{c} a_{12}(t_3 - 0)\tilde{\zeta}_{21}(t_3 - 0) \\ \left(a_{12}^{-1}(t_3 - 0) \frac{d}{dt} a_{12}(t) \Big|_{t=t_3-0} - a_{11}(t_3 - 0) \right) \tilde{\zeta}_{21}(t_3 - 0) + \frac{d}{dt} \tilde{\zeta}_{21}(t) \Big|_{t=t_3-0} \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Умови (9), (11), (12) відсутні, (34) виконується, (10) має вигляд

$$f_2(t) \equiv 0. \quad (60)$$

При її виконанні крайова задача (1)–(3) має розв’язки (23), (25), (35)–(37), (39), (40) з урахуванням зауваження 1:

$$\begin{aligned} x(t) = & \left[\begin{array}{c} a_{12}(t)\varkappa_k(t) \\ a_{12}^{-1}(t)\varkappa_k(t) \frac{d}{dt} a_{12}(t) - a_{11}(t)\varkappa_k(t) - a_{12}^{-1}(t)f_1(t) + \frac{d}{dt} \varkappa_k(t) \end{array} \right], \\ & t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k = \overline{0, 2}, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \varkappa_0(t) = & \tilde{\beta}_{01}(t) + \tilde{\zeta}_{01}(t) + \xi_{01}(t) \\ & \times \left(\gamma_1 + a_{12}(t_0 + 0)\tilde{\zeta}_{01}(t_0 + 0) - a_{12}(t_3 - 0)\tilde{\zeta}_{21}(t_3 - 0) \right), \quad t \in [t_0 + 0; t_1 - 0], \\ \varkappa_1(t) = & \tilde{\beta}_{11}(t) + \tilde{\zeta}_{11}(t), \quad t \in [t_1 + 0; t_2 - 0], \\ \varkappa_2(t) = & \tilde{\beta}_{21}(t) + \tilde{\zeta}_{21}(t) + \xi_{21}(t) \left(\gamma_2 - a_{12}^{-1}(t_0 + 0)f_1(t_0 + 0) + a_{12}^{-1}(t_3 - 0)f_1(t_3 - 0) \right. \\ & + \left(a_{12}^{-1}(t_0 + 0) \frac{d}{dt} a_{12}(t) \Big|_{t=t_0+0} - a_{11}(t_0 + 0) \right) \tilde{\zeta}_{01}(t_0 + 0) + \frac{d}{dt} \tilde{\zeta}_{01}(t) \Big|_{t=t_0+0} \\ & \left. - \left(a_{12}^{-1}(t_3 - 0) \frac{d}{dt} a_{12}(t) \Big|_{t=t_3-0} - a_{11}(t_3 - 0) \right) \tilde{\zeta}_{21}(t_3 - 0) - \frac{d}{dt} \tilde{\zeta}_{21}(t) \Big|_{t=t_3-0} \right), \\ & t \in [t_2 + 0; t_3 - 0], \end{aligned}$$

— скалярні функції,

$$\frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{k1}(t) \Big|_{t=t_{k+1}-0} = c_{2k+j+1}, \quad j = 0, 1, \quad k = 0, 1,$$

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_{k1}(t_k + 0) &= a_{12}^{-1}(t_k + 0)\eta_{k1}, \quad k = 1, 2, \\ \frac{d}{dt} \tilde{\beta}_{k1}(t) \Big|_{t=t_k+0} &= \left(a_{11}(t_k + 0)a_{12}^{-1}(t_k + 0) - a_{12}^{-2}(t_k + 0) \frac{d}{dt} a_{12}(t) \Big|_{t=t_k+0} \right) \eta_{k1} \\ &\quad + a_{12}(t_k - 0)c_{2k-1} + \eta_{k2} + a_{12}^{-1}(t_1 + 0)f_1(t_k + 0), \quad k = 1, 2.\end{aligned}$$

Випадок 4. $a_{22}(t) \equiv 0$, $a_{12}(t) \equiv 0$, $a_{21}(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a; b]$. Маємо: $\check{r}_k = 1$, $\hat{r}_k = 1$, $\hat{s}_{k1} = 1$, $\tilde{r}_k = r_k = \check{r}_k = 0$, $\alpha_k = 0$,

$$\begin{aligned}\check{\varphi}_{k1}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\psi}_{k1}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\psi}_{k1}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} a_{21}(t) \\ -a_{11}(t) - a_{21}^{-1}(t) \frac{d}{dt} a_{21}(t) \end{bmatrix}, \quad \hat{\varphi}_{k1}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} a_{21}^{-1}(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \check{\psi}_{k1}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}_k(t) = \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(t)f_2(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k = \overline{0, 2}, \quad \hat{X}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1, \\ \tilde{A}_k &= [a_{21}(t_k + 0) \quad 0], \quad \tilde{f}_k = f_2(t_k + 0), \quad \hat{A}_k = \Xi_k = 0, \quad \Theta_k = \Upsilon_k = 1, \\ \hat{x}_k &= \begin{bmatrix} \eta_{k1} \\ -a_{21}^{-1}(t_k - 0)f_2(t_k - 0) + \eta_{k2} \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2,\end{aligned}$$

$\mu = 1$, функції $\check{\beta}_{k1}(t)$, $k = \overline{0, 2}$, $\xi_{21}(t)$ візьмемо такі, щоб виконувалися рівності

$$\check{\beta}_{01}(t_0 + 0) = \check{\beta}_{21}(t_3 - 0) = 0, \quad \xi_{21}(t_3 - 0) = 1. \quad (61)$$

Тоді

$$\begin{aligned}\check{U}_{001} = \check{U}_{211} = \check{U}_{221} &= v_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k = 0, 2, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_{21}(t) \end{bmatrix}, \quad (62) \\ D &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \\ \check{x} &= \begin{bmatrix} \gamma_1 - a_{21}^{-1}(t_0 + 0)f_2(t_0 + 0) + a_{21}^{-1}(t_3 - 0)f_2(t_3 - 0) \\ \gamma_2 \end{bmatrix}, \\ \bar{x} &= \begin{bmatrix} \gamma_1 - a_{21}^{-1}(t_0 + 0)f_2(t_0 + 0) + a_{21}^{-1}(t_3 - 0)f_2(t_3 - 0) \\ \gamma_2 + \check{\zeta}_{01}(t_0 + 0) - \check{\zeta}_{21}(t_3 - 0) \end{bmatrix},\end{aligned}$$

умови (10), (12) відсутні, з (9), (11), (34) випливає

$$\begin{aligned}a_{21}(t)f_1(t) - a_{11}(t)f_2(t) - a_{21}^{-1}(t)f_2(t) \frac{d}{dt} a_{21}(t) + \frac{d}{dt} f_2(t) &\equiv 0, \\ a_{21}(t_k + 0)\eta_{k1} + f_2(t_k + 0) &= 0, \quad k = 1, 2,\end{aligned}$$

$$\gamma_1 = a_{21}^{-1}(t_0 + 0)f_2(t_0 + 0) - a_{21}^{-1}(t_3 - 0)f_2(t_3 - 0).$$

При їхньому виконанні крайова задача (1) – (3) має розв’язки (24), (26), (35), (36), (38), (41) з урахуванням зауваження 1:

$$x(t) = \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(t)f_2(t) \\ \check{\beta}_{k1}(t) + \check{\zeta}_{k1}(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k = \overline{0, 1},$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(t)f_2(t) \\ \check{\beta}_{21}(t) + \check{\zeta}_{21}(t) + \xi_{21}(t)(\gamma_2 + \zeta_{01}(t_0 + 0) - \zeta_{21}(t_3 - 0)) \end{bmatrix}, \quad t \in [t_2 + 0; t_3 - 0],$$

$$\check{\beta}_{k1}(t_{k+1} - 0) = c_{k+1}, \quad k = 0, 1,$$

$$\check{\beta}_{k1}(t_k + 0) = -a_{21}^{-1}(t_k - 0)f_2(t_k - 0) + \eta_{k2}, \quad k = 1, 2.$$

Випадок 5. $a_{22}(t) \equiv 0$, $a_{12}(t) \equiv 0$, $a_{21}(t) \equiv 0 \quad \forall t \in [a; b]$. **Маємо:** $\check{r}_k = 1$, $\check{r}_k = 1$, $\tilde{r}_k = r = \hat{r}_k = 0$, $\alpha_k = 1$,

$$\check{\varphi}_{k1}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \check{\psi}_{k1}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \check{\varphi}_{k1}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \check{\psi}_{k1}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad q_{k1}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_{k1}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$X_k(t) = \exp \left(\int_{t_k+0}^t a_{11}(z) dz \right), \quad \tilde{X}_k(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \exp \left(\int_{t_k+0}^t a_{11}(z) dz \right),$$

$$\tilde{x}_k(t) = \begin{bmatrix} \int_{t_k+0}^t \exp \left(\int_{\tau}^t a_{11}(z) dz \right) f_1(\tau) d\tau \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k = \overline{0, 2},$$

$$\hat{X}_k = \begin{bmatrix} \exp \left(\int_{t_k+0}^{t_{k+1}-0} a_{11}(z) dz \right) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1,$$

$$\tilde{B}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Theta_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{x}_k = \begin{bmatrix} \eta_{k1} \\ \int_{t_{k-1}+0}^{t_k-0} \exp \left(\int_{\tau}^{t_k-0} a_{11}(z) dz \right) f_1(\tau) d\tau + \eta_{k2} \end{bmatrix},$$

$$\Xi_k(\tilde{A}_k \hat{x}_k + \tilde{f}_k) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2,$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f} = -\eta_{11}, \quad \bar{\Xi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\Theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\Upsilon} = 0,$$

$\mu = 1$, функції $\check{\beta}_{k1}(t)$, $k = \overline{0, 2}$, $\xi_{21}(t)$ візьмемо такі, щоб виконувалися рівності (61), (62).

Тоді

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix},$$

$$\check{x} = \begin{bmatrix} \gamma_1 - \varkappa \\ \gamma_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} \gamma_1 - \varkappa \\ \gamma_2 + \check{\zeta}_{01}(t_0 + 0) - \check{\zeta}_{21}(t_3 - 0) \end{bmatrix},$$

де

$$\varkappa = \exp\left(\int_{t_2+0}^{t_3-0} a_{11}(z) dz\right) \eta_{21} + \int_{t_2+0}^{t_3-0} \exp\left(\int_{\tau}^{t_3-0} a_{11}(z) dz\right) f_1(\tau) d\tau$$

— скалярна стала, умови (9), (11) відсутні, (12), (34) виконуються, (10) співпадає з (60). При її виконанні крайова задача (1)–(3) має розв'язки (24), (26), (35), (36), (38), (41) з урахуванням зауваження 1:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \exp\left(\int_{t_0+0}^t a_{11}(z) dz\right) (-\gamma_1 + \varkappa) + \int_{t_0+0}^t \exp\left(\int_{\tau}^t a_{11}(z) dz\right) f_1(\tau) d\tau \\ \check{\beta}_{01}(t) + \check{\zeta}_{01}(t) \end{bmatrix},$$

$$t \in [t_0 + 0; t_1 - 0],$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} \exp\left(\int_{t_1+0}^t a_{11}(z) dz\right) \eta_{11} + \int_{t_1+0}^t \exp\left(\int_{\tau}^t a_{11}(z) dz\right) f_1(\tau) d\tau \\ \check{\beta}_{11}(t) + \check{\zeta}_{11}(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [t_1 + 0; t_2 - 0],$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} \exp\left(\int_{t_2+0}^t a_{11}(z) dz\right) \eta_{21} + \int_{t_2+0}^t \exp\left(\int_{\tau}^t a_{11}(z) dz\right) f_1(\tau) d\tau \\ \check{\beta}_{21}(t) + \check{\zeta}_{21}(t) + \xi_{21}(t)(\gamma_2 + \zeta_{01}(t_0 + 0) - \zeta_{21}(t_3 - 0)) \end{bmatrix}, \quad t \in [t_2 + 0; t_3 - 0],$$

$$\check{\beta}_{k1}(t_{k+1} - 0) = c_{k+1}, \quad k = 0, 1,$$

$$\check{\beta}_{11}(t_1 + 0) = \exp\left(\int_{t_0+0}^{t_1-0} a_{11}(z) dz\right) (-\gamma_1 + \varkappa) + \int_{t_0+0}^{t_1-0} \exp\left(\int_{\tau}^{t_1-0} a_{11}(z) dz\right) f_1(\tau) d\tau + \eta_{12},$$

$$\check{\beta}_{21}(t_2 + 0) = \exp\left(\int_{t_1+0}^{t_2-0} a_{11}(z) dz\right) \eta_{11} + \int_{t_1+0}^{t_2-0} \exp\left(\int_{\tau}^{t_2-0} a_{11}(z) dz\right) f_1(\tau) d\tau + \eta_{22}.$$

Автор заявляє про відсутність конфлікту інтересів і спеціального фінансування цієї роботи. Всі необхідні дані містяться в статті.

Література

1. А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк, *Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием*, Вища шк., Київ (1987).
2. О. А. Бойчук, Л. М. Шегда, *Вироджені нетерові крайові задачі*, Нелін. коливання, **10**, № 3, 303–312 (2007); **English translation:** *Nonlinear Oscil.*, **10**, № 3, 306–314 (2007).
3. М. А. Єлишевич, *Краевая задача для системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка с прямоугольными матрицами*, Нелін. коливання, **19**, № 4, 476–492 (2016); **English translation:** *J. Math. Sci. (N.Y.)*, **228**, № 3, 226–244 (2018).
4. А. М. Самойленко, А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, *Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи*, Ін-т математики НАН України, Київ (1995).
5. А. А. Бойчук, Е. В. Чуйко, С. М. Чуйко, *Обобщенный оператор Грина краевой задачи с вырожденным импульсным воздействием*, Укр. мат. журн., **48**, № 5, 588–594 (1996); **English translation:** *Ukr. Math. J.*, **48**, № 5, 652–660 (1996).
6. І. І. Король, *Інтегрування вироджених диференціальних систем з виродженням в імпульсних умовах*, Наук. вісн. Ужгород. ун-ту, вип. 19, 42–52 (2009).
7. С. М. Чуйко, *Нетеровы краевые задачи для вырожденных дифференциально-алгебраических систем с линейным импульсным воздействием*, Динам. системы, **4(32)**, № 1–2, 89–100 (2014).
8. С. М. Чуйко, Е. В. Чуйко, *Линейные нетеровы краевые задачи для вырожденных дифференциально-алгебраических систем с импульсным воздействием*, Доп. НАН України, № 4, 20–29 (2016).
9. С. М. Чуйко, О. В. Несмелова, К. С. Шевцова, *Диференціально-алгебраїчні крайові задачі з імпульсним впливом*, Нелін. коливання, **24**, № 4, 560–573 (2021); **English translation:** *J. Math. Sci. (N.Y.)*, **24**, № 4, 316–331 (2021).
10. С. М. Чуйко, Е. В. Чуйко, *Лінійна диференціально-алгебраїчна крайова задача з невиродженим імпульсним впливом*, Праці Ін-ту прикл. математики і механіки НАН України, **35**, № 1, 79–93 (2021).
11. С. М. Чуйко, Е. В. Чуйко, К. С. Шевцова, *Лінійна диференціально-алгебраїчна крайова задача з виродженим імпульсним впливом*, Вісн. Харк. нац. ун-ту ім. В. Н. Каразіна. Сер. “Математика, прикладна математика і механіка”, **94**, 60–76 (2021).
12. М. А. Єлішевич, *Задача Коші для системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку з виродженою матрицею при похідних і імпульсною дією у фіксовані моменти часу*, Нелін. коливання, **25**, № 4, 325–340 (2022); **English translation:** *J. Math. Sci. (N.Y.)*, **277**, № 2, 240–257 (2023).
13. М. А. Єлішевич, *Задача Коші для системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку з прямокутними матрицями і однією імпульсною дією у фіксований момент часу*, Нелін. коливання, **27**, № 1, 64–81 (2024).
14. М. А. Єлішевич, *Задача Коші для системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку з прямокутними матрицями і імпульсною дією у фіксовані моменти часу*, Нелін. коливання, **27**, № 2, 180–202 (2024).
15. А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець, *Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями*, Вища шк., Київ (2000).
16. М. А. Єлишевич, *Некоторые свойства жордановых наборов векторов матрицы относительно оператора, содержащего дифференцирование*, Журн. обчисл. та прикл. математики, № 2(108), 119–134 (2012).
17. М. А. Єлишевич, *Задача Коши для системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка с прямоугольными матрицами*, Нелін. коливання, **16**, № 2, 173–190 (2013); **English translation:** *J. Math. Sci. (N.Y.)*, **198**, № 3, 260–278 (2014).

Одержано 20.01.25,
після доопрацювання — 21.02.25