

DOI: 10.3842/nosc.v28i1.1495

УДК 517.958; 517.956.4

ПАРАБОЛІЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ В НАПІВ ОБМЕЖЕНОМУ КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ КЛИНОВИДНОМУ СУЦІЛЬНОМУ ЦИЛІНДРІ

Андрій Громик

*Заклад вищої освіти “Подільський державний університет”
вул. Шевченка, 12, Кам’янець-Подільський, 32316, Україна
e-mail: garon74@gmail.com*

Іван Конет

*Волинський національний університет імені Лесі Українки
вул. Потапова, 9, Луцьк, 43025, Україна
e-mail: konet51@ukr.net*

Тетяна Пилипюк

*Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
вул. Огієнка, 61, Кам’янець-Подільський, 32300, Україна
e-mail: pylypyuk.tetiana@kpmu.edu.ua, відповідальна за листування*

By using the method of classic integral and hybrid integral transforms in combination with the method of main solutions (influence matrices and Green’s matrices), for the first time, we have constructed unique exact analytical solutions of parabolic boundary-value problems of mathematical physics in a semibounded piecewise homogeneous wedge-shaped solid cylinder.

За допомогою методу класичних інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв’язків (матриць впливу та матриць Гріна) вперше побудовано єдині точні аналітичні розв’язки параболічних крайових задач математичної фізики в напівобмеженому кусково-однорідному клиновидному суцільному циліндрі.

1. Вступ. Теорія крайових і мішаних (початково-крайових) задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними, зокрема рівнянь математичної фізики, — важливий розділ сучасної теорії диференціальних рівнянь, який інтенсивно розвивається. Актуальність теорії обумовлено як значущістю її результатів для розвитку багатьох розділів математики, так і численними застосуваннями її досягнень при дослідженні різноманітних математичних моделей різних процесів і явищ фізики, механіки, хімії, біології, медицини, економіки, екології, техніки, новітніх технологій тощо.

Вагомі результати з теорії задачі Коші та початково-крайових задач для параболічних рівнянь і їхніх систем одержано в [1 – 6] і працях інших відомих вітчизняних і зарубіжних математиків.

© Андрій Громик, Іван Конет, Тетяна Пилипюк, 2025

ISSN 1562-3076. Нелінійні коливання, 2025, т. 28, № 1

Відомо, що складність досліджуваних крайових задач суттєво залежить як від властивостей коефіцієнтів рівнянь (різні види виродженостей і особливостей коефіцієнтів), так і від геометричної структури області (гладкість межі, наявність кутових точок, обмеженість, необмеженість тощо), в якій розглядається задача. На сьогодні досить детально вивчено властивості розв'язків і розвинуто різноманітні методи побудови розв'язків (точні та наближені) крайових задач для лінійних, квазілінійних і деяких нелінійних рівнянь різних типів (еліптичних, параболічних, гіперболічних) в однозв'язних областях (однорідних середовищах), які обумовлені згаданими вище властивостями коефіцієнтів рівнянь і геометрії області, та побудовано функціональні простори коректності задач у розумінні Адамара.

Водночас багато важливих прикладних задач термомеханіки, теплофізики, дифузії, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливань, механіки деформівного твердого тіла приводять до крайових і мішаних задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними різних типів не тільки в однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними функціями, але й у неоднорідних і кусково-однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є кусково-неперервними функціями чи, зокрема, кусково-сталими [7–9].

Відомо, що крім *методу відокремлення змінних* (методу Фур'є) та його узагальнень, одним із важливих і ефективних методів вивчення лінійних крайових і мішаних задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними в однорідних середовищах є *метод інтегральних перетворень*, який дає змогу побудувати в аналітичному вигляді точні розв'язки розглянутих крайових задач за допомогою їхніх інтегральних зображень.

При цьому для досить широкого класу лінійних крайових задач у кусково-однорідних середовищах ефективним методом побудови їхніх розв'язків виявився *метод гібридних інтегральних перетворень*, породжених відповідними гібридними диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядати або різні диференціальні оператори, або диференціальні оператори того ж самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [10–15].

У цій статті, яка є логічним продовженням [16], за допомогою методу класичних інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з *методом головних розв'язків* (матриць впливу і матриць Гріна) вперше побудовано єдині точні аналітичні розв'язки параболічних початково-крайових задач математичної фізики в напівобмеженому кусково-однорідному клиновидному суцільному циліндрі.

2. Постановка задачі. Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині

$$D = \left\{ (t, r, \varphi, z) \mid t > 0; r \in I_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} (R_{j-1}; R_j); \right. \\ \left. R_0 = 0; R_{n+1} \equiv R < +\infty; \varphi \in (0; \varphi_0); 0 < \varphi_0 < 2\pi; z \in (0; +\infty) \right\}$$

класичного розв'язку лінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними параболічного типу 2-го порядку [17]

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} - \left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{a_{\varphi j}^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j + \chi_j^2 u_j = f_j(t, r, \varphi, z), \quad (1)$$

$$r \in I_j, \quad j = \overline{1, n+1},$$

з початковими умовами

$$u_j(t, r, \varphi, z)|_{t=0} = g_j(r, \varphi, z), \quad r \in I_j, \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (2)$$

межевими умовами

$$\left(-\frac{\partial}{\partial z} + h\right)u_j \Big|_{z=0} = w_j(t, r, \varphi), \quad \frac{\partial^s u_j}{\partial z^s} \Big|_{z=+\infty} = 0, \quad s = 0, 1, \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^s u_1}{\partial r^s} \Big|_{r=0} = 0, \quad \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^{n+1}\right)u_{n+1} \Big|_{r=R} = g(t, \varphi, z), \quad s = 0, 1, \quad (4)$$

одними з межових умов на гранях клина [15]

$$u_j|_{\varphi=0} = g_{1j}(t, r, z), \quad u_j|_{\varphi=\varphi_0} = w_{1j}(t, r, z), \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (5)$$

$$u_j|_{\varphi=0} = g_{2j}(t, r, z), \quad \frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0} = -w_{2j}(t, r, z), \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = g_{3j}(t, r, z), \quad u_j|_{\varphi=\varphi_0} = w_{3j}(t, r, z), \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = g_{4j}(t, r, z), \quad \frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0} = -w_{4j}(t, r, z), \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (8)$$

та умовами спряження [12]

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k\right)u_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k\right)u_{k+1}\right] \Big|_{r=R_k} = 0, \quad j = 1, 2, \quad k = \overline{1, n}, \quad (9)$$

де a_{rj} , $a_{\varphi j}$, a_{zj} , χ_j , h , α_{jk}^s , β_{jk}^s — деякі сталі;

$$\alpha_{22}^{n+1} \geq 0, \quad \beta_{22}^{n+1} \geq 0, \quad \alpha_{22}^{n+1} + \beta_{22}^{n+1} \neq 0, \quad c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k \neq 0, \quad c_{1k} \cdot c_{2k} > 0,$$

$$f(t, r, \varphi, z) = (f_1(t, r, \varphi, z), f_2(t, r, \varphi, z), \dots, f_{n+1}(t, r, \varphi, z)),$$

$$g(r, \varphi, z) = (g_1(r, \varphi, z), g_2(r, \varphi, z), \dots, g_{n+1}(r, \varphi, z)),$$

$$w(t, r, \varphi) = (w_1(t, r, \varphi), w_2(t, r, \varphi), \dots, w_{n+1}(t, r, \varphi)),$$

$$g(t, \varphi, z), g_{pj}(t, r, z), \quad w_{pj}(t, r, z), \quad p = \overline{1, 4}, \quad j = \overline{1, n+1},$$

— задані дійсні обмежені неперервні функції;

$$u(t, r, \varphi, z) = (u_1(t, r, \varphi, z), u_2(t, r, \varphi, z), \dots, u_{n+1}(t, r, \varphi, z))$$

— шукана дійсна неперервно диференційовна за змінною t і двічі неперервно диференційовна за геометричними змінними (r, φ, z) функція.

Зауважимо, що:

1) у випадку $\chi_j \equiv 0$, $j = \overline{1, n+1}$, рівняння (1) є класичним тривимірним неоднорідним рівнянням теплопровідності (дифузії) для ортотропного середовища у циліндричній системі координат;

2) якщо $\alpha_{11}^k = 0$, $\beta_{11}^k = 1$, $\alpha_{12}^k = 0$, $\beta_{12}^k = 1$, $\alpha_{21}^k = \lambda_1^k$, $\beta_{21}^k = 0$, $\alpha_{22}^k = \lambda_2^k$, $\beta_{22}^k = 0$, де λ_1^k , λ_2^k — коефіцієнти теплопровідності, то умови спряження (9) збігаються з умовами ідеального теплового (термічного) контакту;

3) якщо $\alpha_{11}^k = b_k$, $\beta_{11}^k = 1$, $\alpha_{12}^k = 0$, $\beta_{12}^k = 1$, $\alpha_{21}^k = \lambda_1^k$, $\beta_{21}^k = 0$; $\alpha_{22}^k = \lambda_2^k$, $\beta_{22}^k = 0$, де b_k — коефіцієнти термоопору, то умови спряження (9) збігаються з умовами неідеального теплового контакту.

Отже, у зазначених випадках 1), 2) (або 1), 3)) розглянуті параболічні крайові задачі математичної фізики моделюють процеси теплопровідності в напівобмеженому кусково-однорідному клиновидному суцільному циліндрі [13].

3. Основна частина. Припустимо, що розв'язки параболічних початково-крайових задач (1)–(4), (5), (9); (1)–(4), (6), (9); (1)–(4), (7), (9); (1)–(4), (8), (9) існують, задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених далі прямих і обернених інтегральних і гібридних інтегральних перетворень [12, 14, 15].

Згідно з [15] визначимо скінченні пряме $F_{m,ik}$ та обернене $F_{m,ik}^{-1}$ інтегральні перетворення Фур'є щодо кутової змінної φ за формулами

$$F_{m,ik}[f(\varphi)] = \int_0^{\varphi_0} f(\varphi) U_{m,ik}(\varphi) d\varphi \equiv f_{m,ik}, \quad (10)$$

$$F_{m,ik}^{-1}[f_{m,ik}] = \frac{2}{\varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m^{ik} f_{m,ik} U_{m,ik}(\varphi) \equiv f(\varphi), \quad (11)$$

де

$$U_{m,11}(\varphi) = \sin(\beta_{m,11}\varphi), \quad \beta_{m,11} = \frac{\pi m}{\varphi_0},$$

$$U_{m,12}(\varphi) = \sin(\beta_{m,12}\varphi), \quad \beta_{m,12} = \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0},$$

$$U_{m,21}(\varphi) = \cos(\beta_{m,21}\varphi), \quad \beta_{m,21} = \beta_{m,12},$$

$$U_{m,22}(\varphi) = \cos(\beta_{m,22}\varphi), \quad \beta_{m,22} = \beta_{m,11},$$

$$\varepsilon_0^{ik} = 0, \quad \varepsilon_m^{ik} = 1 \text{ при } ik = 11, 12, 21, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad \varepsilon_0^{22} = \frac{1}{2}, \quad \varepsilon_m^{22} = 1 \text{ при } m = 1, 2, 3, \dots$$

Безпосередньо перевіряємо, що для інтегрального оператора $F_{m,ik}$ виконується тотожність

$$F_{m,ik} \left[\frac{d^2 f}{d\varphi^2} \right] = -\beta_{m,ik}^2 f_{m,ik} + \Phi_{m,ik}(f), \quad i, k = 1, 2, \quad (12)$$

де

$$\Phi_{m,11} = \frac{\pi m}{\varphi_0} [f(0) + (-1)^{m+1} f(\varphi_0)], \quad \Phi_{m,12} = \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0} f(0) + (-1)^m \frac{df}{d\varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0},$$

$$\Phi_{m,21} = -\frac{df}{d\varphi}\Big|_{\varphi=0} + (-1)^m \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0} f(\varphi_0), \quad \Phi_{m,22} = -\frac{df}{d\varphi}\Big|_{\varphi=0} + (-1)^m \frac{df}{d\varphi}\Big|_{\varphi=\varphi_0}.$$

Інтегральний оператор $F_{m,ik}$, який діє за формулою (10), внаслідок тотожності (12) ставить у відповідність тривимірним крайовим задачам (1)–(4), (5), (9); (1)–(4), (6), (9); (1)–(4), (7), (9); (1)–(4), (8), (9) задачу побудови обмеженого на множині $D' = \{(t, r, z) \mid t > 0; r \in I_n^+; z \in (0; +\infty)\}$ класичного розв'язку двовимірних диференціальних рівнянь параболічного типу 2-го порядку

$$\frac{\partial u_{jm,ik}}{\partial t} - \left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\nu_{jm,ik}^2}{r^2} \right) + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_{jm,ik} + \chi_j^2 u_{jm,ik} = G_{jm,ik}(t, r, z), \quad (13)$$

$$r \in I_j, \quad j = \overline{1, n+1},$$

з початковими умовами

$$u_{jm,ik}(t, r, z)|_{t=0} = g_{jm,ik}(r, z), \quad r \in I_j, \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (14)$$

межевими умовами

$$\left(-\frac{\partial}{\partial z} + h \right) u_{jm,ik} \Big|_{z=0} = w_{jm,ik}(t, r), \quad \frac{\partial^s u_{jm,ik}}{\partial z^s} \Big|_{z=+\infty} = 0, \quad s = 0, 1, \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial^s u_{1m,ik}}{\partial r^s} \Big|_{r=0} = 0, \quad \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^{n+1} \right) u_{n+1} \Big|_{r=R} = g_{m,ik}(t, z) \quad (16)$$

і умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^p \right) u_{pm,ik} - \left(\alpha_{j2}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^p \right) u_{p+1,m,ik} \right] \Big|_{r=R_p} = 0, \quad j = 1, 2, \quad p = \overline{1, n}, \quad (17)$$

де $G_{jm,ik}(t, r, z) = f_{jm,ik}(t, r, z) + a_{\varphi j}^2 r^{-2} \Phi_{m,ik}(t, r, z)$, $\nu_{jm,ik} = a_{rj}^{-1} a_{\varphi j} \beta_{m,ik}$.

До двовимірної початково-крайової задачі (13)–(17) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій півосі $(0; +\infty)$ щодо змінної z [14]:

$$F_+[g(z)] = \int_0^{+\infty} g(z) K(z, \sigma) dz \equiv \tilde{g}(\sigma), \quad (18)$$

$$F_+^{-1}[\tilde{g}(\sigma)] = \int_0^{+\infty} \tilde{g}(\sigma) K(z, \sigma) d\sigma \equiv g(z), \quad (19)$$

$$F_+ \left[\frac{d^2 g}{dz^2} \right] = -\sigma^2 \tilde{g}(\sigma) + K(0, \sigma) \left(-\frac{dg}{dz} + hg \right) \Big|_{z=0}, \quad (20)$$

де ядро перетворення має вигляд

$$K(z, \sigma) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sigma \cos(\sigma z) + h \sin(\sigma z)}{\sqrt{\sigma^2 + h^2}}.$$

Інтегральний оператор F_+ , який діє за формулою (18), внаслідок тотожності (20) ставить у відповідність початково-крайовій задачі (13)–(17) задачу побудови обмеженого на множині $D'' = \{(t, r) \mid t > 0; r \in I_n^+\}$ класичного розв'язку одновимірних диференціальних рівнянь B -параболічного типу 2-го порядку

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}_{jm,ik}}{\partial t} - a_{rj}^2 B_{\nu_{jm,ik}}[\tilde{u}_{jm,ik}] \\ + (a_{zj}^2 \sigma^2 + \chi_j^2) \tilde{u}_{jm,ik} = \tilde{P}_{jm,ik}(t, r, \sigma), \quad r \in I_j, \quad j = \overline{1, n+1}, \end{aligned} \quad (21)$$

з початковими умовами

$$\tilde{u}_{jm,ik}(t, r, \sigma)|_{t=0} = \tilde{g}_{jm,ik}(r, \sigma), \quad r \in I_j, \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (22)$$

крайовими умовами

$$\left. \frac{\partial^s \tilde{u}_{1m,ik}}{\partial r^s} \right|_{r=0} = 0, \quad \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^{n+1} \right) \tilde{u}_{n+1,m,ik} \Big|_{r=R} = \tilde{g}_{m,ik}(t, z), \quad (23)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^p \right) \tilde{u}_{pm,ik} - \left(\alpha_{j2}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^p \right) \tilde{u}_{p+1,m,ik} \right] \Big|_{r=R_p} = 0, \quad j = 1, 2, \quad p = \overline{1, n}, \quad (24)$$

де $B_{\nu_{jm,ik}} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\nu_{jm,ik}^2}{r^2}$ — класичний диференціальний оператор Бесселя [5],

$$\tilde{P}_{jm,ik}(t, r, \sigma) = \tilde{G}_{jm,ik}(t, r, \sigma) + a_{zj}^2 K(0, \sigma) w_{jm,ik}(t, r).$$

До одновимірної початково-крайової задачі спряження (21)–(24) застосуємо скінченне гібридне інтегральне перетворення типу Ганкеля 1-го роду на кусково-однорідному сегменті I_n^+ з n точками спряження щодо радіальної змінної r [12]:

$$H_{sn}[f(r)] = \int_0^R f(r) V(r, \lambda_s) \sigma(r) r dr \equiv \tilde{f}(\lambda_s), \quad (25)$$

$$H_{sn}^{-1}[\tilde{f}(\lambda_s)] = \sum_{s=1}^{\infty} \tilde{f}(\lambda_s) \frac{V(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2} \equiv f(r), \quad (26)$$

$$\begin{aligned} H_{sn}[B_{(m,ik)}[f(r)]] = -\lambda_s^2 \tilde{f}(\lambda_s) - \sum_{k=1}^{n+1} \gamma_k^2 \int_{R_{k-1}}^{R_k} f(r) V_k(r, \lambda_s) \sigma_k r dr \\ + a_{n+1}^2 R \sigma_{n+1} (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} V_{n+1}(R, \lambda_s) \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{df}{dr} + \beta_{22}^{n+1} f \right) \Big|_{r=R}. \end{aligned} \quad (27)$$

У формулах (25)–(27) використано спектральну функцію $V(r, \lambda_s)$, вагову функцію $\sigma(r)$ і гібридний диференціальний оператор Бесселя, одержані в [12]:

$$B_{(m,ik)} = \sum_{j=1}^{n+1} a_j^2 \Theta(r - R_{j-1}) \Theta(R_j - r) B_{\nu_{jm,ik}},$$

де $\Theta(x)$ — одинична функція Гевісайда, $a_k^2 \equiv a_{rk}^2$, γ_k^2 — деякі сталі.

Запишемо диференціальні рівняння (21) і початкові умови (22) у матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_1^2 B_{\nu_{1m,ik}} + q_1^2(\sigma)\right) \tilde{u}_{1m,ik}(t, r, \sigma) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_2^2 B_{\nu_{2m,ik}} + q_2^2(\sigma)\right) \tilde{u}_{2m,ik}(t, r, \sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_{n+1}^2 B_{\nu_{n+1,m,ik}} + q_{n+1}^2(\sigma)\right) \tilde{u}_{n+1,m,ik}(t, r, \sigma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_{1m,ik}(t, r, \sigma) \\ \tilde{P}_{2m,ik}(t, r, \sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{P}_{n+1,m,ik}(t, r, \sigma) \end{bmatrix}, \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_{1m,ik}(t, r, \sigma) \\ \tilde{u}_{2m,ik}(t, r, \sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{u}_{n+1,m,ik}(t, r, \sigma) \end{bmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{1m,ik}(r, \sigma) \\ \tilde{g}_{2m,ik}(r, \sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{g}_{n+1,m,ik}(r, \sigma) \end{bmatrix}, \quad (29)$$

де $q_j^2 = a_{zj}^2 \sigma^2 + \chi_j^2$, $j = \overline{1, n+1}$.

Інтегральний оператор H_{sn} , який діє за формулою (25), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$H_{sn}[\dots] = \begin{bmatrix} \int_0^{R_1} \dots V_1(r, \lambda_s) \sigma_1 r dr \int_{R_1}^{R_2} \dots V_2(r, \lambda_s) \sigma_2 r dr \\ \dots\dots\dots \\ \int_{R_{n-1}}^{R_n} \dots V_n(r, \lambda_s) \sigma_n r dr \int_{R_n}^R \dots V_{n+1}(r, \lambda_s) \sigma_{n+1} r dr \end{bmatrix} \quad (30)$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (28), (29). Внаслідок тотожності (27) одержуємо задачу Коші для звичайного неоднорідного диференціального рівняння 1-го порядку

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n+1} \left(\frac{d}{dt} + \lambda_s^2 + \gamma_j^2 + q_j^2(\sigma) \right) \tilde{u}_{jm,ik}(t, \lambda_s, \sigma) \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{P}_{jm,ik}(t, \lambda_s, \sigma) + a_{n+1}^2 R \sigma_{n+1}^2 (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} V_{n+1}(R, \lambda_s) \tilde{g}_{m,ik}(t, \sigma), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{jm,ik}(t, \lambda_s, \sigma) \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{jm,ik}(\lambda_s, \sigma), \quad (32)$$

де

$$\tilde{u}_{jm,ik}(t, \lambda_s, \sigma) = \int_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{u}_{jm,ik}(t, r, \sigma) V_j(r, \lambda_s) \sigma_j r dr, \quad j = \overline{1, n+1},$$

$$\tilde{P}_{jm,ik}(t, \lambda_s, \sigma) = \int_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{P}_{jm,ik}(t, r, \sigma) V_j(r, \lambda_s) \sigma_j r dr, \quad j = \overline{1, n+1},$$

$$\tilde{g}_{jm,ik}(\lambda_s, \sigma) = \int_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{g}_{jm,ik}(r, \sigma) V_j(r, \lambda_s) \sigma_j r dr, \quad j = \overline{1, n+1}.$$

Припустимо, не зменшуючи загальності розв'язку задачі, що

$$\max\{q_1^2(\sigma), q_2^2(\sigma), \dots, q_{n+1}^2(\sigma)\} = q_1^2(\sigma)$$

і покладемо всюди $\gamma_j^2 = q_1^2(\sigma) - q_j^2(\sigma)$, $j = \overline{1, n+1}$. Задача Коші (31), (32) набирає вигляду

$$\frac{d\tilde{u}_{m,ik}}{dt} + \Delta(\lambda_s, \sigma)\tilde{u}_{m,ik} = \tilde{P}_{m,ik}(t, \lambda_s, \sigma) + a_{n+1}^2 R \sigma_{n+1}^2 (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} V_{n+1}(R, \lambda_s) \tilde{g}_{m,ik}(t, \sigma), \quad (33)$$

$$\tilde{u}_{m,ik}(t, \lambda_s, \sigma)|_{t=0} = \tilde{g}_{m,ik}(\lambda_s, \sigma), \quad (34)$$

де

$$\tilde{u}_{m,ik}(t, \lambda_s, \sigma) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{jm,ik}(t, \lambda_s, \sigma), \quad \tilde{P}_{m,ik}(t, \lambda_s, \sigma) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{P}_{jm,ik}(t, \lambda_s, \sigma),$$

$$\tilde{g}_{m,ik}(\lambda_s, \sigma) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{jm,ik}(\lambda_s, \sigma), \quad \Delta(\lambda_s, \sigma) = \lambda_s^2 + a_{z1}^2 \sigma^2 + \chi_1^2.$$

Безпосередньо перевіряємо, що єдиним розв'язком задачі Коші (33), (34) є функція

$$\tilde{u}_{m,ik}(t, \lambda_s, \sigma) = N(t, \lambda_s, \sigma) \tilde{g}_{m,ik}(\lambda_s, \sigma) + \int_0^t N(t - \tau, \lambda_s, \sigma) \tilde{T}_{m,ik}(\tau, \lambda_s, \sigma) d\tau, \quad (35)$$

де розв'язуюча функція (функція Коші) має вигляд

$$N(t, \lambda_s, \sigma) = \exp(-\Delta(\lambda_s, \sigma)t),$$

$$\tilde{T}_{m,ik}(\tau, \lambda_s, \sigma) = \tilde{P}_{m,ik}(\tau, \lambda_s, \sigma) + a_{n+1}^2 R \sigma_{n+1}^2 (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} V_{n+1}(R, \lambda_s) \tilde{g}_{m,ik}(\tau, \lambda_s, \sigma).$$

Оскільки суперпозиція операторів H_{sn} і H_{sn}^{-1} є одиничним оператором ($H_{sn} \circ H_{sn}^{-1} = H_{sn}^{-1} \circ H_{sn} = I$), то оператор H_{sn}^{-1} як обернений до оператора (30) зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$H_{sn}^{-1}[\dots] = \begin{bmatrix} \sum_{s=1}^{\infty} \dots \frac{V_1(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2} \\ \sum_{s=1}^{\infty} \dots \frac{V_2(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2} \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{s=1}^{\infty} \dots \frac{V_{n+1}(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2} \end{bmatrix} \quad (36)$$

і застосуємо за правилом множення матриць до матриці-елемента $[\tilde{u}_{m,ik}(t, \lambda_s, \sigma)]$, де функцію $\tilde{u}_{m,ik}(t, \lambda_s, \sigma)$ визначено за формулою (35). Одержимо єдиний розв'язок одновимірної параболічної початково-крайової задачі (21)–(24):

$$\tilde{u}_{jm,ik}(t, r, \sigma) = \sum_{s=1}^{\infty} \tilde{u}_{m,ik}(t, \lambda_s, \sigma) \frac{V_j(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2}, \quad j = \overline{1, n+1}. \quad (37)$$

Застосовуючи послідовно до функцій $\tilde{u}_{jm,ik}(t, r, \sigma)$, визначених формулами (37), обернені оператори F_+^{-1} і $F_{m,ik}^{-1}$, і виконуючи нескладні перетворення, одержуємо функції

$$\begin{aligned} u_{j,ik}(t, r, \varphi, z) = & \sum_{p=1}^{n+1} \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} \int_0^{+\infty} E_{jp}^{ik}(t - \tau, r, \rho, \varphi, \alpha, z, \xi) f_p(\tau, \rho, \alpha, \xi) \sigma_p \rho \, d\xi \, d\alpha \, d\rho \, d\tau \\ & + \sum_{p=1}^{n+1} \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} \int_0^{+\infty} E_{jp}^{ik}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z, \xi) g_p(\rho, \alpha, \xi) \sigma_p \rho \, d\xi \, d\alpha \, d\rho \\ & + \sum_{p=1}^{n+1} a_{\varphi p}^2 \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{+\infty} Q_{jp}^{ik}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) \sigma_p \rho^{-1} \, d\xi \, d\rho \, d\tau \\ & + \sum_{p=1}^{n+1} a_{zp}^2 \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} W_{jp}^{ik}(t - \tau, r, \rho, \varphi, \alpha, z) w_p(\tau, \rho, \alpha) \sigma_p \rho \, d\alpha \, d\rho \, d\tau \\ & + \int_0^t \int_0^{\varphi_0} \int_0^{+\infty} W_{jr}^{ik}(t - \tau, r, \varphi, \alpha, z, \xi) g(\tau, \alpha, \xi) \, d\xi \, d\alpha \, d\tau, \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (38) \end{aligned}$$

які визначають єдині розв'язки параболічних початково-крайових задач (1)–(4), (5), (9); (1)–(4), (6), (9); (1)–(4), (7), (9); (1)–(4), (8), (9) при відповідних значеннях ik (11), (12), (21), (22).

У формулах (38) застосовано компоненти

$$E_{jp}^{ik}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z, \xi) = \frac{2}{\varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m^{ik} K_{jp}^{m,ik}(t, r, \rho, z, \xi) U_{m,ik}(\varphi) U_{m,ik}(\alpha)$$

матриці впливу (функції впливу), функції Гріна

$$Q_{jp}^{ik}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) = \frac{2}{\varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m^{ik} K_{jp}^{m,ik}(t - \tau, r, \rho, z, \xi) \Phi_{m,ik}(\tau, \rho, \xi) U_{m,ik}(\varphi)$$

компоненти

$$W_{jp}^{ik}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z) = E_{jp}^{ik}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z, 0)$$

аплікатної матриці Гріна (аплікатні функції Гріна) та компоненти

$$W_{jr}^{ik}(t, r, \varphi, \alpha, z, \xi) = a_{n+1}^2 R \sigma_{n+1}^2 (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} E_{jp}^{ik}(t, r, R, \varphi, \alpha, z, \xi)$$

радіальної матриці Гріна (радіальні функції Гріна) відповідних початково-крайових задач, де

$$K_{jp}^{m,ik}(t, r, \rho, z, \xi) = \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} N(t, \lambda_s, \sigma) K(z, \sigma) K(\xi, \sigma) \frac{V_j(r, \lambda_s) V_p(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2} d\sigma.$$

Проаналізуємо формули (38) залежно від типу межових умов на гранях напівобмеженого кусково-однорідного клиновидного суцільного циліндра. Розглянемо, наприклад, випадок межових умов (5) (умови Діріхле). У цьому випадку функції Гріна мають вигляд

$$Q_{jp}^{11}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) = \frac{2\pi}{\varphi_0^2} \sum_{m=1}^{\infty} m K_{jp}^{m,11}(t - \tau, r, \rho, z, \xi) \times [g_{1p}(\tau, \rho, \xi) + (-1)^{m+1} w_{jp}(\tau, \rho, \xi)] \sin \frac{\pi m \varphi}{\varphi_0}.$$

Якщо визначити тангенціальні функції Гріна

$$W_{jp,1}^{11}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) = \frac{2\pi}{\varphi_0^2} \sum_{m=1}^{\infty} m K_{jp}^{m,11}(t - \tau, r, \rho, z, \xi) \sin \frac{\pi m \varphi}{\varphi_0},$$

$$W_{jp,2}^{11}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) = \frac{2\pi}{\varphi_0^2} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} m K_{jp}^{m,11}(t - \tau, r, \rho, z, \xi) \sin \frac{\pi m \varphi}{\varphi_0},$$

то розв'язок задачі (1) – (4), (5), (9) можемо записати у вигляді

$$\begin{aligned} u_{j,11}(t, r, \varphi, z) = & \sum_{p=1}^{n+1} \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} \int_0^{+\infty} E_{jp}^{11}(t - \tau, r, \rho, \varphi, \alpha, z, \xi) f_p(\tau, \rho, \alpha, \xi) \sigma_p \rho d\xi d\alpha d\rho d\tau \\ & + \sum_{p=1}^{n+1} \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} \int_0^{+\infty} E_{jp}^{11}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z, \xi) g_p(\rho, \alpha, \xi) \sigma_p \rho d\xi d\alpha d\rho \\ & + \sum_{p=1}^{n+1} a_{\varphi p}^2 \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{+\infty} [W_{jp,1}^{11}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) g_{1p}(\tau, \rho, \xi) \\ & + W_{jp,2}^{11}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) w_{1p}^2(\tau, \rho, \xi)] \sigma_p \rho^{-1} d\xi d\rho d\tau \\ & + \sum_{p=1}^{n+1} a_{zp}^2 \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} W_{jp}^{11}(t - \tau, r, \rho, \varphi, \alpha, z) w_p(\tau, \rho, \alpha) \sigma_p \rho d\alpha d\rho d\tau \\ & + \int_0^t \int_0^{\varphi_0} \int_0^{+\infty} W_{jr}^{11}(t - \tau, r, \varphi, \alpha, z, \xi) g(\tau, \alpha, \xi) d\xi d\alpha d\tau, \quad j = \overline{1, n+1}. \quad (39) \end{aligned}$$

З використанням властивостей функцій впливу $E_{jp}^{11}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z, \xi)$ і функцій Гріна $W_{jp,s}^{11}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi)$, $s = 1, 2$, $W_{jp}^{11}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z)$, $W_{jr}^{11}(t, r, \varphi, \alpha, z, \xi)$ безпосередньо перевіряємо, що функції $u_{j,11}(t, r, \varphi, z)$, визначені формулами (39), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), межові умови (3)–(5) та умови спряження (9) у сенсі теорії узагальнених функцій.

Єдиність розв'язку (39) випливає із його структури (інтегрального зображення) та єдиності головних розв'язків (функцій впливу і функцій Гріна) параболічної початково-крайової задачі спряження (1)–(4), (5), (9).

Можна довести, що при відповідних умовах на вихідні дані формули (39) визначають обмежений класичний розв'язок розглянутої задачі.

Підсумком викладеного вище є така теорема.

Теорема. Якщо функції $f_j(t, r, \varphi, z)$, $g_j(r, \varphi, z)$, $w_j(t, r, \varphi)$, $g_{1j}(t, r, z)$, $w_{1j}(t, r, z)$, $j = \overline{1, n+1}$, задовольняють умови:

- 1) неперервно диференційовні за змінною t і двічі неперервно диференційовні за геометричними змінними;
- 2) мають обмежену варіацію за геометричними змінними;
- 3) абсолютно сумовні за змінною z на півосі $(0; +\infty)$;
- 4) задовольняють умови спряження; а функція $g(t, \varphi, z)$ також задовольняє умови 1)–3), то параболічна початково-крайова задача (1)–(4), (5), (9) має єдиний обмежений класичний розв'язок, який визначається за формулами (39).

Випадки межових умов (6)–(8) на гранях клина можна проаналізувати аналогічно.

Зауваження. 1. У випадку $a_{rj} = a_{\varphi j} = a_{zj} \equiv a_j > 0$ формули (38) визначають структури розв'язків розглянутих задач в ізотропному напівобмеженому кусково-однорідному клиновидному суцільному циліндрі.

2. Випадок зміни φ в межах $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ можна звести до розглянутого заміною $\varphi' = \varphi - \varphi_1$, $\varphi_0 \equiv \varphi_2 - \varphi_1$.

3. Параметр h дозволяє виділяти з формул (38) розв'язки крайових задач у випадках задання на площині $z = 0$ межових умов 1-го роду ($h \rightarrow +\infty$) та 2-го роду ($h \rightarrow 0$).

4. Параметри α_{22}^{n+1} , β_{22}^{n+1} дозволяють виділяти з формул (38) розв'язки початково-крайових задач спряження у випадку задання на радіальній поверхні $r = R$ межових умов 1-го роду ($\alpha_{22}^{n+1} = 0, \beta_{22}^{n+1} = 1$), 2-го роду ($\alpha_{22}^{n+1} = 1, \beta_{22}^{n+1} = 0$) та 3-го роду ($\alpha_{22}^{n+1} = 1, \beta_{22}^{n+1} = \beta > 0$).

5. Аналіз розв'язків (38) залежно від аналітичного виразу функцій $f_j(t, r, \varphi, z)$, $g_j(r, \varphi, z)$, $w_j(t, r, \varphi)$, $g_{pj}(t, r, z)$, $w_{pj}(t, r, z)$, $p = \overline{1, 4}$, $j = \overline{1, n+1}$, $g(t, \varphi, z)$ проводиться безпосередньо із загальних структур.

4. Висновки. Методом класичних інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) вперше побудовано єдині точні аналітичні розв'язки параболічних крайових задач у напівобмеженому кусково-однорідному клиновидному суцільному циліндрі. Одержані інтегральні зображення розв'язків мають алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів і даних задачі та можуть бути використані як у теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків математичних моделей еволюційних процесів у кусково-однорідних середовищах, описаних циліндричною системою координат.

Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів. Усі необхідні дані містяться в статті. Всі автори зробили рівномірний внесок у цю роботу, а також заявляють про відсутність спеціального фінансування для її виконання.

Література

1. В. В. Городецький, *Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу*, Рута, Чернівці (1998).
2. Н. В. Житарашу, С. Д. Эйдельман, *Параболические граничные задачи*, Штиинца, Кишинев (1992).
3. Т. Я. Загорский, *Смешанные задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа*, Изд-во Львов. ун-та, Львов (1961).
4. С. Д. Ивасишен, *Матрица Грина параболических задач*, Вища шк., Киев (1990).
5. М. І. Матійчук, *Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями*, Прут, Чернівці (2003).
6. І. Д. Пукальський, *Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженостями і особливостями*, Рута, Чернівці (2008).
7. В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, *Модели и методы решения задач в неоднородных средах*, Наук. думка, Киев (2001).
8. В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, *Модели и методы решения задач с условиями сопряжения*, Наук. думка, Киев (1998).
9. И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека, *Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах*, Наук. думка, Киев (1991).
10. А. П. Громик, І. М. Конет, М. П. Ленюк, *Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах*, Абетка-Світ, Кам'янець-Подільський (2001).
11. І. М. Конет, *Гіперболічні крайові задачі математичної фізики в кусково-однорідних просторових середовищах*, Абетка-Світ, Кам'янець-Подільський (2013).
12. І. М. Конет, Т. М. Пилипюк, *Параболічні крайові задачі в кусково-однорідних середовищах*, Абетка-Світ, Кам'янець-Подільський (2016).
13. І. М. Конет, М. П. Ленюк, *Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях*, Прут, Чернівці (2001).
14. І. М. Конет, Т. М. Пилипюк, *Крайові задачі в кусково-однорідних циліндрично-кругових середовищах*, Технодрук, Чернівці (2019).
15. А. П. Громик, І. М. Конет, *Гіперболічні крайові задачі математичної фізики в кусково-однорідних циліндричних середовищах*, Абетка світ, Кам'янець-Подільський (2020).
16. А. П. Громик, І. М. Конет, Т. М. Пилипюк, *Параболічні крайові задачі математичної фізики в кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому півпросторі*, Нелін. коливання, **27**, № 2, 168 – 179 (2024).
17. М. О. Перестюк, В. В. Маринець, *Теорія рівнянь математичної фізики*, Либідь, Київ (2006).

Одержано 30.12.24