

ЛІНІЙНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОСТОРОВОГО РУХУ ТОРОЇДАЛЬНОГО БАКА З РІДИНОЮ

Олександр Солодун

*Інститут математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна
e-mail: solodun@imath.kiev.ua*

Based on variational methods of solving main boundary-value problems of the linear theory of three-dimensional motions of solids with cavities partially filled with a liquid, we derive a modal system of equations of motion and give values of the hydrodynamic coefficients in the case of toroidal cavities. Formulas for the hydrodynamic forces and moments acting on walls of toroidal tanks are obtained. Implementation of the linear modal theory is illustrated for Sretenskii's problem and the eigenfrequency problem of joint vibrations of a water tower with a toroidal elevated tank.

На основі варіаційних методів розв'язування базових крайових задач лінійної теорії просторового руху твердих тіл із порожнинами, частково заповненими рідиною, одержано модальну систему рівнянь руху та наведено значення гідродинамічних коефіцієнтів для випадку порожнин тороїдальної форми. Отримано формули для визначення гідродинамічних сил і моментів взаємодії рідини зі стінками тороїдальних резервуарів. Застосування лінійної модальної моделі проілюстровано на прикладі задачі Сретенського та задачі про визначення власних частот сумісних коливань водонапірної вежі (башти) з тороїдальним баком.

Вступ. Дослідження коливань рідини в тороїдальних резервуарах становлять значний інтерес у зв'язку з необхідністю розв'язання комплексу проблем, пов'язаних зі створенням та експлуатацією конструкцій, що містять тороїдальні резервуари з рідиною. Ці дослідження також постійно стимулюють вимоги до авіаційної, морської, ракетної та космічної техніки, а також посилення вимог до проєктування таких цивільних об'єктів, як наземні сховища для екологічно небезпечних рідин, морські платформи та водонапірні башти, які будуються в сейсмонебезпечних районах.

Особливо підкреслимо суттєву роль експериментальних досліджень, які дають змогу побудувати загальні та спрощені (у вигляді механічних аналогів) математичні моделі, здатні адекватно описувати динаміку таких складних багатокomпонентних механічних систем. Це переконливо продемонстровано нещодавніми роботами Дутта та ін. [1, 2], Свідена [3], присвяченими проблемам динаміки рідини у сховищах форм фігур обертання, а також роботами Аслама та ін. [4], Мак Карті та ін. [5] для сховищ тороїдальних форм.

Загальну методологію математичного моделювання динаміки поведінки рідини у зазначених об'єктах при різноманітних зовнішніх впливах на сьогодні добре розроблено. Сформульовано необхідні задачі для визначення поля швидкостей і тиску в об'ємі рідини, а у випадку просторових безвихорових рухів ідеальної рідини добре вивчено спектральну

крайову задачу про власні коливання рідини та крайову задачу Неймана для визначення потенціалів Стокса – Жуковського. Розв’язки цих крайових задач дають змогу визначити повну сукупність гідродинамічних характеристик системи, включно з моментами інерції рідких мас. Для випадку тороїдальних резервуарів точних розв’язків наведених вище крайових задач немає, що потребує виведення спеціалізованих наближених методів їхнього розв’язання. Найпоширенішими методами є варіаційні методи, а також різні варіанти методів кінцевих і граничних елементів. Особливо варто підкреслити важливу роль варіаційних методів, які дають змогу отримувати наближені розв’язки в аналітичній формі, що не тільки спрощує аналіз розв’язків базових крайових задач, але також має важливе значення для подальшого розвитку модальних підходів у лінійній та нелінійній теорії сумісних рухів твердих тіл із рідинами. Розвиток варіаційних методів для тороїдальних резервуарів має ряд особливостей, пов’язаних із геометрією порожнини. Про подібні особливості йдеться у фундаментальних працях [6–8].

У цій статті на основі методу Луковського [9] виведено лінійні модальні рівняння, що описують коливання рідини в горизонтальному тороїдальному резервуарі, який здійснює малі поступальні та кутові переміщення, а також формули для гідродинамічних сил і моментів (перша задача динаміки). Доповнюючи роботи [10, 11], наведено у широкому діапазоні геометричних параметрів чисельні значення гідродинамічних коефіцієнтів, включаючи момент інерції рідини.

Незважаючи на те що цю лінійну модальну теорію побудовано для розв’язку першої задачі динаміки, у статті наведено два ілюстративні приклади використання її результатів для опису сумісних (зчеплених) рухів конструкцій із тороїдальним резервуаром, частково заповненим рідиною (друга задача динаміки). Перший приклад присвячено задачі Сре-тенського, яка описує вимушені (без тертя) горизонтальні коливання твердого тіла (візка) з цистерною за наявності пружного зв’язку. У другому прикладі розглянуто власні частоти коливань системи, що складається з вертикальної балки і тороїдального бака з рідиною, жорстко закріпленого на вершині балки. Цю механічну систему використовують для моделювання водонапірних башт.

1. Постановка задачі. Розглянемо механічну систему, що складається з абсолютно жорсткої горизонтальної тороїдальної ємності, частково заповненої ідеальною нестисливою рідиною. У статичному положенні рівноваги вісь симетрії бака паралельна вектору прискорення сили тяжіння. Змочені стінки резервуара, як показано на рис. 1, будемо позначати через S , а незбурену вільну поверхню рідини — Σ_0 . Тут R позначає великий радіус директриси тора, а r — малий радіус твірної тора. За характерний лінійний розмір обрано радіус твірної тора r . Жорстко зв’яжемо рухому систему координат $Oxyz$ із центром кільцевої вільної поверхні Σ_0 , спрямовуючи вісь Ox вертикально вздовж осі симетрії резервуара.

Гідродинамічний аналіз передбачає, що рухи бака відомі і розглядається *перша задача* динаміки. Крім того, передбачаємо, що танк здійснює невеликі коливальні рухи щодо статичного положення рівноваги у полі тяжіння. Ці малі переміщення (разом із системою координат $Oxyz$, жорстко зв’язаною з баком) відбуваються щодо деякої інерціальної системи координат $O'x'y'z'$, пов’язаної із Землею, та повністю описуються вектором поступальної швидкості $\mathbf{v}_0(t) = (\dot{\eta}_1, \dot{\eta}_2, \dot{\eta}_3)$ і вектором миттєвої кутової швидкості $\boldsymbol{\omega}(t) = (\dot{\eta}_4, \dot{\eta}_5, \dot{\eta}_6)$. Шість функцій η_i , що описують малі поступальні та кутові рухи, визначають шість незалежних ступенів свободи. У зв’язаній системі координат $Oxyz$ лінеаризовані проєкції вектора прискорення сили тяжіння мають вигляд $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3) = (-g, g\eta_6, -g\eta_5)$.

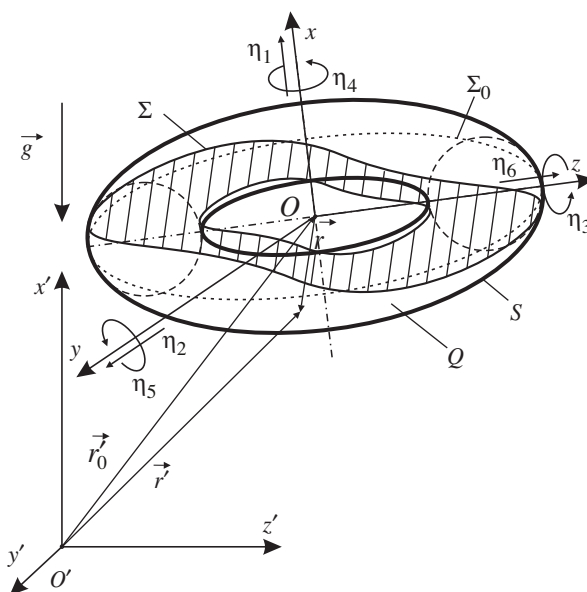


Рис. 1. Тороїдальний резервуар, частково заповнений рідиною, що здійснює задані малі коливальні рухи у просторі.

У припущенні безвихорового потенційного потоку рідини потенціал абсолютної швидкості $\Phi(x, y, z, t)$ та функція, що описує збурену поверхню рідини $\zeta(x, y, z, t) = x - \xi(y, z, t)$, є розв'язками такої крайової задачі (див., наприклад, [12 – 14]):

$$\Delta \Phi = 0 \quad \text{в} \quad Q_0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \mathbf{v}_0 \mathbf{n} + \omega(\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \quad \text{на} \quad S_0, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \mathbf{v}_0 \mathbf{n} + \omega(\mathbf{r} \times \mathbf{n}) - \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad \text{на} \quad \Sigma_0, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \mathbf{g} \mathbf{r} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma_0, \quad (1.4)$$

$$\int_{\Sigma_0} \xi dS = 0, \quad (1.5)$$

де S_0 — змочена поверхня резервуара у положенні рівноваги, $\mathbf{n}$ — орт зовнішньої нормалі до границі об'єму Q_0 і $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

Крайову задачу необхідно доповнити початковими умовами, які задають початкове положення поверхні рідини та початковий нормальний розподіл швидкостей (при $t = t_0$):

$$\xi(y, z, t_0) = \xi_0(y, z), \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{\Sigma(t_0)} = \Phi_0(x, y, z). \quad (2)$$

Якщо розглядаємо вимушені коливання рідини під впливом гармонійних збурень із періодом T , то початкові умови (2) можна замінити умовами періодичності

$$\xi(y, z, t + T) = \xi(y, z, t), \quad \nabla \Phi(x, y, z, t + T) = \nabla \Phi(x, y, z, t). \quad (3)$$

Розв'язки задачі (1), які підпорядковані умовам періодичності (3), описують так звані стаціонарні режими руху рідини.

Розв'язок крайової задачі (1) дозволяє отримати розподіл абсолютних швидкостей частинок рідини $\mathbf{v}_a = \nabla \Phi$ і, використовуючи лінеаризований інтеграл Лагранжа – Коші у зв'язаній системі координат

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \mathbf{g}\mathbf{r} + \frac{p - p_0}{\rho} = 0 \quad (4)$$

(ρ — густина рідини, p_0 — атмосферний тиск), поле тиску p . Розглядаючи відповідні інтеграли тиску вздовж змочених стінок бака, можна отримати основні гідродинамічні характеристики, тобто імпульс і кутовий момент рідини щодо O , а також результуючі гідродинамічні силу і момент, а отже, розв'язати першу задачу динаміки.

2. Лінійна модальна теорія. 2.1. Загальні модальні рівняння. Наведемо розв'язок задачі (1) у вигляді [12, 14]

$$\xi(y, z, t) = \sum_N \beta_N(t) \phi_N|_{\Sigma_0} = \sum_N \beta_N(t) \xi_N(y, z), \quad (5)$$

$$\Phi(x, y, z, t) = \mathbf{v}_0(t) \mathbf{r} + \omega(t) \mathbf{\Omega}_0(x, y, z) + \sum_N R_N(t) \phi_N(x, y, z), \quad (6)$$

де $\phi_N(x, y, z)$ — система власних форм коливання рідини, визначеної розв'язками крайової задачі на власні значення $\xi_N(y, z) = \phi_N(0, y, z)$:

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= 0, \quad \mathbf{r} \in Q_0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{r} \in S_0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} &= \kappa \phi, \quad \mathbf{r} \in \Sigma_0, \quad \int_{\Sigma_0} \phi dS = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

і гармонічна вектор-функція $\mathbf{\Omega}_0(x, y, z) = (\Omega_{01}, \Omega_{02}, \Omega_{03})$ (три потенціали Стокса – Жуковського) є розв'язком крайової задачі Неймана

$$\Delta \mathbf{\Omega}_0 = 0, \quad \mathbf{r} \in Q_0, \quad \frac{\partial \mathbf{\Omega}_0}{\partial n} = \mathbf{r} \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{r} \in S_0 + \Sigma_0. \quad (8)$$

У найзагальнішому випадку N — це один або кілька цілих індексів, які перенумеровують власні форми $\phi_N(x, y, z)$ з урахуванням їхньої кратності. Підставляючи (5) і (6) у вихідну крайову задачу (1) та враховуючи умову ортогональності $\int_{\Sigma_0} \xi_{N_1} \xi_{N_2} dS = 0$, $N_1 \neq N_2$, отримуємо співвідношення $\dot{\beta}_N = \kappa_N R_N$ і таку лінійну (модальну) систему звичайних диференціальних рівнянь щодо модальних функцій (узагальнених координат) $\beta_N(t)$:

$$\ddot{\beta}_N + \sigma_N^2 \beta_N = K_N(t), \quad (9)$$

де $\sigma_N^2 = g\kappa_N$ і

$$K_N(t) = -\frac{\lambda_{2N}}{\mu_N} (\ddot{\eta}_2 - g\eta_6) - \frac{\lambda_{3N}}{\mu_N} (\ddot{\eta}_3 + g\eta_5) - \frac{1}{\mu_N} \sum_{k=4}^6 \lambda_{0(k-3)N} \ddot{\eta}_k. \quad (10)$$

Гідродинамічні коефіцієнти, що входять до (10), визначаємо інтегралами

$$\begin{aligned}\mu_N &= \frac{\rho}{\kappa_N} \int_{\Sigma_0} \xi_N^2 dS, & \lambda_{2N} &= \rho \int_{\Sigma_0} y \xi_N dS, \\ \lambda_{3N} &= \rho \int_{\Sigma_0} z \xi_N dS, & \lambda_{0kN} &= \rho \int_{\Sigma_0} \xi_N \Omega_{0k} dS.\end{aligned}\quad (11)$$

Таким чином, якщо відомі функції $\eta_k(t)$, $k = 1, \dots, 6$, що описують коливання бака з шістьма ступенями свободи, а також гідродинамічні коефіцієнти (11), то ми можемо знайти модальні функції $\beta_N(t)$ із системи лінійних звичайних диференціальних рівнянь (9), а отже, вивести потенціал швидкостей (6) і відповідне поле тиску за формулою (4). Використання модальної теорії усуває потребу у просторовій і часовій дискретизації початкової граничної задачі (1).

Явні формули для гідродинамічної сили і моменту у термінах функцій β_M і η_j , $j = 1, \dots, 6$, отримав Луковський [13] для найбільш загального нелінійного випадку. Незалежне виведення формул Луковського для лінійних і нелінійних коливань рідини наведено також у [14]. Модальні рівняння (9) і згадані формули Луковського для сили і моменту значно спрощуються для випадку осесиметричних резервуарів.

2.2. Модальна система для осесиметричних баків. Для осесиметричних резервуарів природним є перехід до циліндричної системи координат $x = x$, $y = r \cos \theta$, $z = r \sin \theta$ і відокремлення кутової змінної в основних крайових задачах (7) і (8). У цьому випадку індекси $N = m, i, 1$ і $N = m, i, 2$, $m = 0, 1, \dots$, $i = 1, 2, \dots$ і власні функції мають такий вигляд:

$$\phi_{m,i,1} = \phi_i^{(m)}(r, x) \cos(m\theta), \quad \phi_{m,i,2} = \phi_i^{(m)}(r, x) \sin(m\theta). \quad (12)$$

Обидві власні функції $\phi_{m,i,1}$ і $\phi_{m,i,2}$ (для $m \neq 0$) відповідають одному власному значенню $\kappa_{m,i}$, яке визначається із задачі (7).

Задача про потенціал Стокса – Жуковського також допускає відділення кутової змінної

$$\Omega_{01} = 0, \quad \Omega_{02} = -\chi(r, x) \sin \theta, \quad \Omega_{03} = \chi(r, x) \cos \theta, \quad (13)$$

де $\chi(r, x)$ — розв'язок відповідної крайової задачі у меридіональному перерізі резервуара.

Структура розв'язків (12) і (13) вказує на те, що ненульові праві частини (10) у модальній системі (9) пов'язані з гідродинамічними коефіцієнтами

$$\kappa_i = \kappa_{1,i}, \quad \sigma_i^2 = g\kappa_i = \sigma_{1,i}^2, \quad (14.1)$$

$$\mu_{1,i,1} = \mu_{1,i,2} = \mu_i = \frac{\pi\rho}{\kappa_{1,i}} \int_{L_0} r (\phi_i^{(1)})^2 dr, \quad (14.2)$$

$$\lambda_{2(1,i,1)} = \lambda_{3(1,i,2)} = \lambda_i = \pi\rho \int_{L_0} r^2 \phi_i^{(1)} dr, \quad (14.3)$$

$$\lambda_{03(1,i,1)} = -\lambda_{02(1,i,2)} = \lambda_{0i} = \rho\pi \int_{L_0} r^2 \chi \phi_i^{(1)} dr, \quad (14.4)$$

де L_0 — перетин незбуреної вільної границі з меридіональним перерізом резервуара.

Таким чином, для осесиметричних резервуарів існують тільки дві незалежні лінійні модальні системи з ненульовими правими частинами. Ці системи відповідають за коливання рідини у площинах Oxy і Oxz :

$$\mu_i \left(\ddot{\beta}_i^c + \sigma_i^2 \beta_i^c \right) = -\lambda_i (\ddot{\eta}_2 - g\eta_6) - \lambda_{0i} \ddot{\eta}_6, \quad (15.1)$$

$$\mu_i \left(\ddot{\beta}_i^s + \sigma_i^2 \beta_i^s \right) = -\lambda_i (\ddot{\eta}_3 + g\eta_5) + \lambda_{0i} \ddot{\eta}_5, \quad (15.2)$$

де індекс $i = 1, 2, \dots$ перенумеровує власні значення κ_i у порядку зростання та, відповідно, перенумеровує функції $\phi_i^{(1)}$ у (12).

2.3. Гідродинамічна сила та момент для осесиметричних баків. Згідно з формулами Луковського [13, 14] лінійні компоненти гідродинамічної сили у системі координат, пов'язаній із резервуаром, використовують положення центра тяжіння незбуреної рідини:

$$\mathbf{r}_{lC_0} = (x_{lC_0}, y_{lC_0}, z_{lC_0}) = \rho \int_{Q_0} \mathbf{r} dQ / M_l, \quad (16)$$

M_l — маса рідини у системі координат $Oxyz$. Для осесиметричного випадку $y_{lC_0} = z_{lC_0} = 0$. Звідси маємо такі вирази для проєкцій гідродинамічної сили на осі системи координат $Oxyz$:

$$F_1(t) = F_x(t) = M_l(-g - \ddot{\eta}_1), \quad (17.1)$$

$$F_2(t) = F_y(t) = M_l(-\ddot{\eta}_6 x_{lC_0} + [g\eta_6] - \ddot{\eta}_2) - \sum_{k=1}^{\infty} \ddot{\beta}_k^c \lambda_k, \quad (17.2)$$

$$F_3(t) = F_z(t) = M_l(\ddot{\eta}_5 x_{lC_0} - [g\eta_5] - \ddot{\eta}_3) - \sum_{k=1}^{\infty} \ddot{\beta}_k^s \lambda_k. \quad (17.3)$$

У цьому випадку лінійні складові $[g\eta_6]$, $[g\eta_5]$ зникають із виразів для $F_2(t)$, $F_3(t)$ при проєктуванні лінійної гідродинамічної сили на інерційну систему координат, пов'язану із Землею.

Лінеаризована формула Луковського для гідродинамічного моменту (щодо O) також включає елементи тензора інерції рідини $\mathbf{J}_0^1$, визначеного через потенціали Стокса–Жуковського

$$J_{0ij}^1 = \rho \int_{S_0 + \Sigma_0} \Omega_{0i} \frac{\partial \Omega_{0j}}{\partial n} dS. \quad (18)$$

Для осесиметричного резервуара цей тензор містить лише два ненульові елементи

$$J_{022}^1 = J_{033}^1 = J_0 = \pi \rho \int_L \chi \frac{\partial \chi}{\partial n} ds, \quad (19)$$

де L — перетин бічної поверхні S із меридіональним перерізом резервуара [10, 11].

Використовуючи лінеаризовані формули Луковського [9, 14], для осесиметричного резервуара можна показати, що $F_4 = M_{Ox} = 0$, а дві інші компоненти обчислюються за формулами

$$F_5(t) = M_{Oy}(t) = M_{Ix_{IC_0}}(g\eta_5 + \ddot{\eta}_3) - J_0\ddot{\eta}_5 - \sum_{j=1}^{\infty} \left(-\lambda_{0j}\ddot{\beta}_j^s + g\lambda_j\beta_j^s \right), \quad (20.1)$$

$$F_6(t) = M_{Oz}(t) = M_{Ix_{IC_0}}(g\eta_6 - \ddot{\eta}_2) - J_0\ddot{\eta}_6 - \sum_{j=1}^{\infty} \left(\lambda_{0j}\ddot{\beta}_j^c - g\lambda_j\beta_j^c \right). \quad (20.2)$$

Для перерахунку гідродинамічного моменту щодо іншої, довільно взятої, точки $\dot{O}$ можна скористатися формулою

$$\mathbf{M}_{\dot{O}}^1 = \mathbf{r}_{O\dot{O}} \times \mathbf{F} + \mathbf{M}_O, \quad (21)$$

де $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$, $\mathbf{M}_O = (F_4, F_5, F_6)$, $\mathbf{r}_{O\dot{O}}$ — радіус-вектор початку координат O щодо точки $\dot{O}$.

2.4. Безрозмірні гідродинамічні коефіцієнти. Гідродинамічні коефіцієнти, що виникають у модальних рівняннях і виразах для гідродинамічних сил і моментів, є функціями лінійних розмірів тороїдального резервуара і густини рідини. Тут R позначає великий радіус директриси тора, а r — малий радіус твірної тора. За характерний лінійний розмір обрано радіус твірної тора r . Глибину заповнення резервуара рідиною позначено через H . Відношення радіусів $\delta_R = r/R$, $R \geq r$, є безрозмірною характеристикою резервуара, а відношення $\delta_H = H/2r$ стає безрозмірною характеристикою заповнення бака рідиною. Зокрема, при $\delta_H \rightarrow 0$ глибина рідини прямує до нульового об'єму заповнення резервуара, а при наближенні δ_H до 1 заповнення резервуара прямує до тороїдальної порожнини.

Зв'язок між розмірним і безрозмірним гідродинамічними коефіцієнтами (останній будемо позначати рискою згори) має вигляд

$$\kappa_i = \frac{\bar{\kappa}_i}{r_0}, \quad \mu_i = \rho r_0^3 \bar{\mu}_i, \quad \lambda_i = \rho r_0^3 \bar{\lambda}_i, \quad \lambda_{0i} = \rho r_0^4 \bar{\lambda}_{0i}, \quad J_0 = \rho r_0^5 \bar{J}_0. \quad (22)$$

У роботі [10] автором виведено варіаційний метод для визначення власних частот і власних функцій $\phi_i^{(1)}$ коливання рідини у тороїдальних резервуарах, у [11] одержано варіаційний метод для визначення потенціалів Стокса – Жуковського для тороїдальних областей і для розрахунку $\bar{J}_0$. Знаючи $\phi_i^{(1)}(r, x)$ і $\chi(r, x)$, можна ефективно розрахувати гідродинамічні коефіцієнти $\bar{\mu}_i$, $\bar{\lambda}_i$ і $\bar{\lambda}_{0i}$. Однак потрібно враховувати, що $\phi_i^{(1)}$ визначаються з точністю до довільного множника, а отже, з точністю до постійного множника визначаються гідродинамічні коефіцієнти $\bar{\mu}_i$, $\bar{\lambda}_i$ і $\bar{\lambda}_{0i}$. Для усунення неоднозначності (пов'язаної з цим фактором) при визначенні гідродинамічних коефіцієнтів застосовуємо такі нормування:

$$\bar{\phi}_i^{(1)}(1, 0) = 1. \quad (23)$$

Таким чином, вимагалось, щоб власні функції набували максимального абсолютного значення, рівного одиниці, на лінії контакту незбуреної вільної границі та бічної стінки. При такій нормалізації, яка є природною для модальних теорій, модальні функції $\beta_i^c(t)$ і $\beta_i^s(t)$ відіграють роль (безрозмірної) амплітуди хвилі на стінці.

Варіаційний розв'язок для власної функції $\phi_i^{(m)}(r, x)$ подано у вигляді [10]

$$\phi_i^{(m)}(r, x) = \sum_{k=1}^{q_1} a_k^{(m,i)} w_k^{(m)}(r, x) + \sum_{k=1}^{q_2} a_k^{*(m,i)} w_k^{*(m)}(r, x), \quad (24)$$

де $m = 0, 1, \dots$, $i = 1, 2, \dots$, а координатні функції $w_k^{(m)}(r, x)$ і $w_k^{*(m)}(r, x)$ задовольняють відповідне рівняння у меридіональному перерізі, тим самим підтверджуючи, що $\phi_i^{(m)}(r, x) \cos(m\theta)$ і $\phi_i^{(m)}(r, x) \sin(m\theta)$ є гармонічними функціями. Варіаційна процедура звела обчислення до узагальненої спектральної матричної задачі для визначення власних значень $\bar{\kappa}_{m,i}$ і власних векторів $a_j^{(m,i)}$ розмірності $q = q_1 + q_2$:

$$\sum_{k,l=1}^q a_l^{(m,i)} \left(\alpha_{kl}^{(m,i)} - \bar{\kappa}_{m,i} \beta_{kl}^{(m,i)} \right) = 0 \quad (25)$$

при фіксованому m і змінному індексі i від 1 до, загалом кажучи, q . Елементи матриць визначаємо за формулами

$$\alpha_{kl}^{(m)} = \int_L r \frac{\partial w_k^{(m)}}{\partial n} w_l^{(m)} ds, \quad \beta_{kl}^{(m)} = \int_{L_0} r w_k^{(m)} w_l^{(m)} dr, \quad (26)$$

де L_0 і L — меридіональні перерізи Σ_0 і S . Умова нормалізації (23) у застосуванні до варіаційного розв'язку (24) означає, що для власних векторів

$$\left(a_1^{(1,i)}, a_2^{(1,i)}, \dots, a_{q_1}^{(1,i)}, a_1^{*(1,i)}, a_2^{*(1,i)}, \dots, a_{q_2}^{*(1,i)} \right)$$

апроксимація $\phi_i^{(1)}(r, x) \sin(\theta)$ нормується (ділиться) на

$$N_{1,i} = \sum_{k=1}^{q_1} a_k^{(1,i)} w_k^{(1)}(1, 0) + \sum_{k=1}^{q_2} a_k^{*(1,i)} w_k^{*(1)}(1, 0). \quad (27)$$

Використовуючи цю нормалізацію, безрозмірні гідродинамічні коефіцієнти $\bar{\mu}_i$ і $\bar{\lambda}_i$ розраховуємо за формулами

$$\bar{\mu}_i = \frac{\pi \bar{\kappa}_{1,i}^2}{N_{1,i}} \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^q a_k^{(1,i)} a_l^{(1,i)} \beta_{kl}, \quad \bar{\lambda}_i = \frac{\pi \bar{\kappa}_{1,i}}{N_{1,i}} \sum_{k=1}^q \beta_{1k} a_k^{(1,i)}. \quad (28)$$

Більш того, якщо для варіаційного розв'язку $\chi(r, x)$ як базисну множину функцій вибрати ті самі координатні функції, що й у [10] або [11], то гідродинамічні коефіцієнти, що залишилися, записуємо у вигляді

$$\bar{\lambda}_{0i} = \frac{\pi \bar{\kappa}_{1,i}}{N_{1,i}} \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^q \beta_{kl} a_k^{(1,i)} b_l^{(1)}, \quad (29)$$

$$\mathbf{J}_{0ij}^1 = \pi \rho \sum_{k=1}^q b_k^{(1)} \gamma_k^{(1)}, \quad (30)$$

де

$$\chi(r, x) = \sum_{k=1}^{q_1} b_k^{(1)} w_k^{(1)}(r, x) + \sum_{k=1}^{q_1} b_k^{(1)*} w_k^{*(1)}(r, x) \quad (31)$$

є заданим варіаційним розв'язком задачі Рітца

$$\sum_{i,j=1}^q \alpha_{ij}^{(m)} b_j^{(m)} = \gamma_i^{(m)}. \quad (32)$$

Елементи вектора $\gamma_i^{(m)}$ визначаємо за формулою

$$\gamma_i^{(m)} = \int_L \mathbf{g} w_k^{(m)} dS, \quad (33)$$

де $\mathbf{g}$ являє собою векторний добуток $(\mathbf{r} \times \mathbf{n})$ як праву частину другого рівняння у крайовій задачі Неймана (8) з однотипною нормалізацією $\bar{\chi}(1, 0) = 1$ для вектора $b_j^{(1)}$, $(b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, \dots, b_{q_1}^{(1)}, b_1^{*(1)}, b_2^{*(1)}, \dots, b_{q_2}^{*(1)})$.

Використовуючи функціональний базис поліноміального типу [10, 11] і формули (24)–(28), можна ефективно обчислити власні значення $\bar{\kappa}_i$ і гідродинамічні коефіцієнти $\bar{\mu}_i$, $\bar{\lambda}_i$, а використовуючи формули (29)–(31), можна ефективно розрахувати тензор інерції $\bar{J}_0$ і гідродинамічний коефіцієнт $\bar{\lambda}_{0i}$. Особливістю чисельної реалізації є менша точність обчислення $\bar{\mu}_i$, $\bar{\lambda}_i$ та $\bar{\lambda}_{0i}$, ніж точність обчислення $\bar{\kappa}_i$ і $\bar{J}_0$ до двох значущих цифр. Це пов'язано з тим, що власні вектори визначаються з меншою точністю, ніж власні значення, що впливає на точність підсумовування у формулах (28) і (29), а також на точність обчислення норми (27).

У табл. 1–4 наведено числові значення розглянутих гідродинамічних коефіцієнтів з диференційованою точністю. Зберігаються лише ті значущі цифри, які стабілізуються під час застосування нашого варіаційного методу.

3. Приклади застосування лінійної модальної теорії. Сумісне використання лінійної модальної системи та формул для гідродинамічних сил та моментів дозволяє розв'язувати задачі динаміки сумісних коливань складних композитних механічних об'єктів, що містять тороїдальний резервуар, частково заповнений рідиною. У цій роботі розглядаємо дві тестові задачі, які ілюструють таку можливість.

3.1. Задача Сретенського. Розглянемо механічну систему на рис. 2, яка складається з платформи масою M_p , що допускає горизонтальний поступальний рух без тертя та прикріплена до нерухомої стіни за допомогою пружини з коефіцієнтом Гука k . На платформі жорстко закріплено твердий тороїдальний резервуар масою M_t , частково заповнений рідиною масою M_l . Задача полягає у визначенні малих коливань рухів платформи (щодо її статичного положення рівноваги), викликаних дією невеликої горизонтальної рушійної сили, тобто необхідно розв'язати другу задачу динаміки стосовно заданої багатокомпонентної механічної системи. Оскільки в задачі допускаються лише поступальні рухи з одним ступенем свободи (для спрощення вздовж осі Oz), то $\eta_1 = \eta_2 = \eta_4 = \eta_5 = \eta_6 = 0$, а отже, рух платформи описує функція $\eta_3(t)$. Припускаючи, що $\eta_3(t)$ відоме, ми можемо

Таблиця 1. Безрозмірні елементи тензора інерції $\bar{J}_0$
і власні значення $\bar{\kappa}_i$, $i = 1, \dots, 6$, для тороїдального бака

$\bar{H}$	$\bar{J}_0$	$\bar{\kappa}_1$	$\bar{\kappa}_2$	$\bar{\kappa}_3$	$\bar{\kappa}_4$	$\bar{\kappa}_5$	$\bar{\kappa}_6$
1/12	2,27871	0,02861	1,07802	2,97200	5,47291	8,30148	11,25169
1/6	6,10530	0,05872	1,16155	2,95790	5,09668	7,29667	9,47053
1/4	10,63534	0,09017	1,24988	2,96147	4,84944	6,71646	8,55762
1/3	15,55334	0,12296	1,34286	2,98704	4,71013	6,39999	8,08050
5/12	20,68169	0,15731	1,44171	3,04049	4,66570	6,26730	7,87402
1/2	25,90295	0,19376	1,55026	3,13096	4,71397	6,28644	7,87465
7/12	31,12421	0,23338	1,67687	3,27421	4,86714	6,45982	8,07877
2/3	36,25256	0,27819	1,83850	3,49994	5,16093	6,82858	8,59068
3/4	41,17056	0,33244	2,07172	3,87114	5,68251	7,52643	10,02121
5/6	45,70060	0,40715	2,47215	4,55443	6,69411	9,20195	18,08724
11/12	49,52719	0,54587	3,42570	6,22768	10,7898	22,5276	218,1192

Таблиця 2. Безрозмірні гідродинамічні коефіцієнти $\bar{\mu}_{1i}$, $i = 1, \dots, 6$

$\bar{H}$	$\bar{\mu}_1$	$\bar{\mu}_2$	$\bar{\mu}_3$	$\bar{\mu}_4$	$\bar{\mu}_5$	$\bar{\mu}_6$
1/12	0,331716	0,528614	0,978024	1,245574	1,547291	2,30148
1/6	0,529906	0,795926	1,471898	1,966621	2,795045	7,29667
1/4	1,008249	2,593614	2,593614	5,182392	8,155089	12,71646
1/3	1,623971	2,850439	3,550439	6,143013	9,743707	14,35697
5/12	2,307964	3,475205	4,482121	8,050722	12,550325	16,92756
1/2	3,006049	5,328043	6,307809	9,627927	14,711201	17,10187
7/12	3,672623	6,319603	7,607751	11,607751	15,529294	17,52929
2/3	4,274394	6,742991	7,838503	12,499941	16,160931	18,28558
3/4	4,419053	6,932445	8,071722	12,971143	16,682521	18,92209
5/6	4,568607	7,074299	8,378440	13,260417	17,060417	19,23178
11/12	4,806219	7,162866	8,609619	13,666270	17,666270	19,53359

знайти лінійні вимушені коливання рідини з модальної системи (15.2) із неоднорідною правою частиною, яка залежить від $\ddot{\eta}_3$:

$$\mu_i \left(\ddot{\beta}_i^s + \sigma_i^2 \beta_i^s \right) = -\lambda_i \ddot{\eta}_3, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (34)$$

а також визначити горизонтальну гідродинамічну силу F_3 , прикладену до резервуара (платформи), використовуючи формулу (17.3), яка в цьому випадку спрощується до вигляду

$$F_3(t) = -M_l \ddot{\eta}_3 - \sum_{k=1}^{\infty} \ddot{\beta}_k^s \lambda_k. \quad (35)$$

Як видно з рівнянь (34), (35), гідродинамічна сила насправді є функцією η_3 , оскільки модальні функції β_i^s залежать лише від $\ddot{\eta}_3$ і початкових збурень рідини. Вираз для гідродинамічної сили тепер має бути включений у рівняння динаміки платформи.

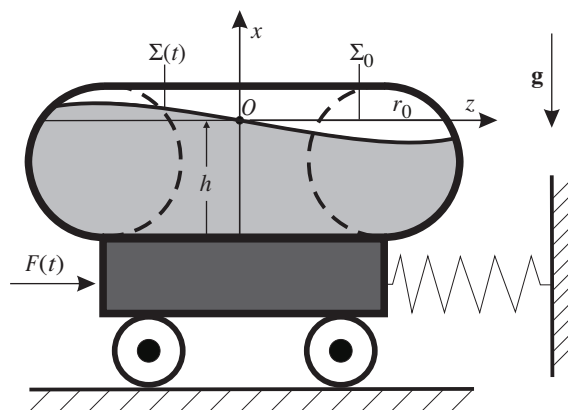


Рис. 2. Рухома платформа з тороїдальним резервуаром, частково заповненим рідиною.

Таблиця 3. Безрозмірні гідродинамічні коефіцієнти $\bar{\lambda}_i$, $i = 1, \dots, 7$

$\bar{r}_1$	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	$\bar{\lambda}_3$	$\bar{\lambda}_4$	$\bar{\lambda}_5$	$\bar{\lambda}_6$	$\bar{\lambda}_7$
1/12	0,527087	1,383505	0,076617	-0,001955	-0,000033	0	0
1/6	1,133396	-1,776806	0,066017	-0,086908	-0,010050	-0,000605	0,000018
1/4	2,126491	-2,512284	0,128692	-0,432500	0,076971	-0,002015	0,001028
1/3	3,332646	-3,299743	0,220560	-0,792915	0,114771	-0,048139	0,046232
5/12	4,634409	-3,954156	0,337404	-1,170445	0,187915	-0,734122	0,148864
1/2	5,930598	-4,449959	0,475904	-1,530174	0,283686	-0,985259	0,279634
7/12	7,128783	-4,884980	0,654397	-1,909001	0,419766	-1,395903	0,449914
2/3	8,148718	-5,629190	1,024889	-3,084708	1,270017	-1,569971	0,406676
3/4	8,935187	-8,019213	3,186148	-3,340973	0,506917	-0,906152	0,199770
5/6	8,778947	-6,779341	1,018731	-1,343009	0,081077	-0,042263	-0,008281
11/12	8,406990	-6,070639	-0,072712	-0,060359	0,006409	-0,081062	-0,003418

Розглянемо рівняння руху платформи

$$(M_t + M_p)\ddot{\eta}_3 = -k\eta_3 + F_3 + F, \quad (36)$$

яке впливає з другого закону Ньютона. Тут враховуємо, що на платформу діє певна відома рушійна сила $F(t)$, сила пружності пружини $-k\eta_3$ і гідродинамічна сила $F_3(t)$. З огляду на формулу для гідродинамічної сили (35) рівняння (36) перепишемо у вигляді

$$M_0(\ddot{\eta}_3 + \sigma_0^2\eta_3) + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^s \lambda_k = F, \quad (37)$$

де $M_0 = M_t + M_p + M_l$ — повна маса всієї системи, а $\sigma_0^2 = k/M_0$ — квадрат власної частоти пружних, пов'язаних із наявністю пружини, коливань платформи з нерухомою (“замороженою”) рідиною.

Таким чином, для розв'язання другої задачі динаміки, яка полягає у визначенні динаміки платформи та рідини при відомій зовнішній силі $F(t)$, необхідно розв'язати систему

Таблиця 4. Безрозмірні гідродинамічні коефіцієнти $\bar{\lambda}_{0i}$, $i = 1, \dots, 7$

$\bar{r}_1$	$\bar{\lambda}_{01}$	$\bar{\lambda}_{02}$	$\bar{\lambda}_{03}$	$\bar{\lambda}_{04}$	$\bar{\lambda}_{05}$	$\bar{\lambda}_{06}$	$\bar{\lambda}_{07}$
1/12	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
1/6	0,000214	0,000173	-0,000031	0,000002	0,000001	0,000000	0,000000
1/4	0,000113	0,000062	-0,000045	0,000145	-0,000130	-0,000049	0,000000
1/3	0,489075	0,069443	-0,060604	0,139207	-0,083495	0,206376	-0,108247
5/12	2,368444	-0,077772	-0,090874	0,103051	-0,062127	0,127616	-0,073640
1/2	3,238161	-0,371400	-0,030382	-0,040659	-0,004499	-0,015688	-0,000828
7/12	4,072521	-0,674300	0,072720	-0,150495	0,062693	-0,091507	0,056728
2/3	4,732498	-1,021558	0,301828	-0,382280	0,392011	15,440803	0,104167
3/4	5,093536	-1,627332	1,290406	5,075571	-0,207137	0,134092	-1,835137
5/6	5,052119	-1,452614	0,477405	-0,233143	0,040586	-0,073826	-0,010201
11/12	4,730985	-1,250930	-0,034877	-0,010581	0,003092	-0,014136	-0,002586

зв'язаних диференціальних рівнянь (37) і (34). При цьому рівняння (37) відповідає за рух платформи, а система модальних рівнянь (34) описує коливання вільної поверхні рідини.

Розглянемо окремий випадок, коли зовнішню силу описує гармонійний закон $F = \eta_a M_0 \sigma^2 \cos(\sigma t)$, де η_a — амплітуда, а σ — збурююча частота, і знайдемо усталені $2\pi/\sigma$ -періодичні (стаціонарні) рухи цієї механічної системи, які можна подати у вигляді

$$\beta_i = A_i \cos(\sigma t), \quad \eta_3 = B \cos(\sigma t). \quad (38)$$

Тут B — амплітуда коливань платформи, A_i — амплітуди власних форм.

Підставляючи вирази (38) у рівняння (37) і (34), можемо знайти B і A_i . У цьому випадку безрозмірну амплітуду коливань платформи описує рівняння

$$\bar{B} = \frac{B}{\eta_a} = \left((\bar{\sigma}_0^2 - 1) - \frac{\rho r_0^3}{M_0} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{\lambda}_i^2}{\bar{\mu}_i (\bar{\sigma}_i^2 - 1)} \right)^{-1}, \quad (39)$$

де $\bar{\sigma}_0 = \sigma_0/\sigma$, $\bar{\sigma}_i = \sigma_i/\sigma$.

Проаналізуємо залежність безрозмірної амплітуди усталених коливань платформи $\bar{B}$ від частоти збурення для випадку, коли власна парціальна частота платформи σ_0 і перша власна частота рідини σ_1 збігаються. У нашому числовому аналізі використовуємо сім елементів нескінченної суми у (39) (вплив семи мод), що, як показали розрахунки, забезпечує стабілізацію трьох значущих цифр $\bar{B}$ для тороїдальних резервуарів із геометрією $R = 2$ і $r = 1$. У тестових прикладах на рис. 3 вибрано $\rho r_0^3/M_0 = 0,5$. Як видно з графіків на рис. 3, основний резонансний відгук коливань платформи спостерігається при $\sigma/\sigma_0 < 1$, тобто для збурюючих частот, менших за мінімальну парціальну частоту $\sigma_0 = \sigma_1$. При $\sigma = \sigma_0 = \sigma_1$ амплітуда стаціонарних коливань платформи дорівнює нулю, тобто відбувається так зване динамічне затухання. Як видно з формули (39), амплітуда коливань платформи також стає нульовою при $\sigma = \sigma_i$, $i \geq 2$, якщо вимушена частота збігається з найвищими власними частотами коливання рідини.

3.2. Модель водонапірної башти з тороїдальним баком. Розглянемо задачу, яка виникає при моделюванні коливань водонапірної башти з піднятим тороїдальним баком, жорстко

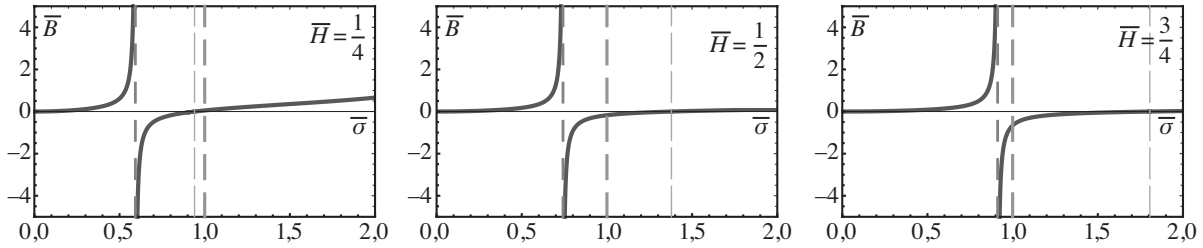


Рис. 3. Значення безрозмірної амплітуди усталених коливань платформ як функції $\bar{\sigma} = \sigma/\sigma_0$. У розрахунках прийнято, що $\sigma_0 = \sigma_1$, $r = 1$, $R = 2$ і $\rho r_0^3/M_0 = 0,5$.

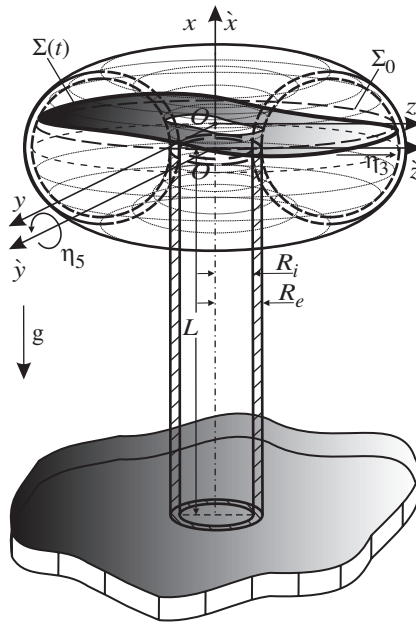


Рис. 4. Схематичне зображення водонапірної башти з піднятим тороїдальним баком.

закріпленим на вершині башти. Відповідну механічну систему схематично показано на рис. 4. При моделюванні коливань цієї системи будемо вважати, що маса тороїдального резервуара M_t значно менша за масу рідини M_l . Крім того, припустимо, що вежа здійснює поперечні коливні рухи без кручення і стиснення (врахуванням вертикального стиску вежі за рахунок маси рідини знехтувано), а її коливання відбуваються в площині Oxz і описані досить точно в рамках моделі балки Ейлера. Висота башти (довжина) L , зовнішній радіус постійний і дорівнює різниці між радіусом обертання та радіусом твірної $R_b = R - r$, а внутрішній радіус (радіус балки) також постійний і дорівнює $R_i = k_i r_1$, $0 < k_i < 1$. Коливання водонапірної башти з рідиною описано в нерухомій системі координат $\dot{O}x\dot{y}\dot{z}$, що збігається з верхньою точкою башти, до якої жорстко закріплено резервуар у статичному положенні рівноваги.

3.3. Рівняння балки та граничні умови на нижньому (закріпленому) кінці. Коливання балки моделюють рівняння Ейлера

$$m_b \ddot{W} + (EIW'')'' = 0, \quad (40)$$

де функція $W(\dot{x}, t)$ описує відхилення балки в площині $\dot{O}x\dot{z}$, E — модуль пружності Юнга, I — екваторіальний момент інерції балки (постійне значення для постійного перерізу,

що дорівнює $I_b = \pi(R_b^4 - R_i^4)/4$, $m_b = \pi\rho_c(R_b^2 - R_i^2)$ — лінійна маса балки (маса на одиницю довжини), а ρ_c — густина матеріалу. Тут крапка позначає диференціювання за часом, а штрих позначає диференціювання за лінійною координатою $\dot{x}$. Граничні умови на фіксованому кінці (основі вежі) набувають вигляду

$$W(-L, t) = 0, \quad W'(-L, t) = 0. \quad (41)$$

3.4. Крайові умови на верхньому (вільному) кінці. На вільному кінці балки (точка кріплення резервуара), ігноруючи масу твердого резервуара, повинна бути виконана гранична умова, яка виражає рівність крутних моментів і сил пружності балки та гідродинамічних моментів і сил, пов'язаних із рідиною. У нашому випадку такі умови мають вигляд

$$EIW''(0, t) = -F_5^{\dot{O}}, \quad (EIW'')(0, t) = -F_3^{\dot{O}}, \quad (42)$$

де $F_3^{\dot{O}}(t)$ — горизонтальна складова гідродинамічної сили в системі координат $\dot{O}\dot{x}\dot{y}\dot{z}$, а $F_5^{\dot{O}}(t)$ — гідродинамічний момент щодо осі $\dot{O}\dot{y}$.

При цьому гідродинамічна сила $F_3^{\dot{O}}(t)$ і момент $F_5^{\dot{O}}(t)$ виникають через те, що верхній кінець балки зазнає горизонтальних переміщень $u(t)$ і нахилів на малий кут $\theta(t)$, які визначаються за формулами

$$u = W(0, t), \quad \theta = -W'(0, t), \quad (43)$$

тобто $F_3^{\dot{O}}(t)$ і $F_5^{\dot{O}}(t)$ є по суті складними функціями $W(0, t)$, $W'(0, t)$ та їхніми похідними за часом. Відповідні вирази для гідродинамічної сили та моменту можна отримати за допомогою лінійної модальної теорії, де необхідно враховувати положення нерухомої системи координат $\dot{O}\dot{x}\dot{y}\dot{z}$ і зв'язок між u , θ і η_3 , η_5 :

$$\eta_5 = \theta, \quad \eta_3 = u - h\theta,$$

які є у вихідній крайовій задачі (1) (як відомі вхідні параметри), у модальній системі (15.2) і у формулах для гідродинамічних сил і моментів (17.3) і (20.1).

З урахуванням формул (17.3) (у проєкціях на нерухому систему координат $\dot{O}\dot{x}\dot{y}\dot{z}$), (20.1) і (21) щодо $\dot{O}$ гідродинамічна сила і момент у (42) визначаються за формулами

$$F_3^{\dot{O}} = M_l(\ddot{\theta}X_{lC_0} - \ddot{u}) - \sum_{k=1}^{\infty} \ddot{\beta}_k^s \lambda_k, \quad (44)$$

$$F_5^{\dot{O}} = M_l X_{lC_0}(g\theta + \ddot{u}) - \dot{J}_0 \ddot{\theta} - \sum_{j=1}^{\infty} (-\dot{\lambda}_{0j} \ddot{\beta}_j^s + g\lambda_j \beta_j^s), \quad (45)$$

де X_{lC_0} — вертикальна координата центру мас рідини в системі $\dot{O}\dot{x}\dot{y}\dot{z}$, $\dot{J}_0 = M_l h(2X_{lC_0} - h) + J_0$ і $\lambda_{0i}^O = \dot{\lambda}_{0i} + h\lambda_i$, а також модальні функції β_j^s є розв'язками рівнянь (15.2), які можна переписати як

$$\mu_i(\ddot{\beta}_i^s + \sigma_i^2 \beta_i^s) = -\lambda_i(\ddot{u} + g\theta) + \dot{\lambda}_{0i} \ddot{\theta}. \quad (46)$$

Таким чином, граничні умови на вільному кінці мають вигляд (42), де праві частини залежать від $W(0, t)$, $W'(0, t)$ та їхніх похідних за часом за допомогою підстановки виразів (44) і (45). Функції $u(t)$ і $\theta(t)$ визначені рівностями (43), а β_i^s — розв'язки модальної системи (46), які також залежать лише від $u(t)$, $\theta(t)$ і початкових збурень рідини.

3.5. Власні сумісні коливання. Розглянемо власні спільні коливання системи, поклавши

$$W(\dot{x}, t) = \mathcal{W}(\dot{x}) \cos \sigma t, \quad \beta_i^s(t) = B_i \cos \sigma t, \quad (47)$$

де σ — невідома власна частота, а змінні B_i і функція $\mathcal{W}(\dot{x})$ задають амплітуди відповідних власних форм коливань рідини та геометрію прогину балки для відповідної форми власних коливань.

Підстановка (47) у модальні рівняння (46) дозволяє явно визначити

$$B_i = \frac{\sigma^2}{\mu_i(\sigma_i^2 - \sigma^2)} \left[\lambda_i \mathcal{W}(0) + \left(\frac{\lambda_i g}{\sigma^2} + \dot{\lambda}_{0i} \right) \mathcal{W}'(0) \right]$$

і таким чином отримати простіші вирази для граничних умов на вільному кінці для функції $\mathcal{W}(\dot{x})$. Задача сумісних власних коливань зводиться до знаходження нетривіальних розв'язків однорідної задачі

$$-\sigma^2 m_b \mathcal{W} + (EI \mathcal{W}'')'' = 0, \quad \dot{x} \in [-L, 0], \quad (48.1)$$

$$\mathcal{W}(-L) = \mathcal{W}'(-L) = 0, \quad (48.2)$$

$$EI \mathcal{W}''(0) = \sigma^2 [A_1 \mathcal{W}(0) + A_3 \mathcal{W}'(0)], \quad (48.3)$$

$$(EI \mathcal{W}'')'(0) = -\sigma^2 [A_2 \mathcal{W}(0) + A_1 \mathcal{W}'(0)] \quad (48.4)$$

щодо функції $\mathcal{W}(\dot{x})$ і невідомого параметра σ^2 . Тут коефіцієнти $A_1(\sigma^2)$, $A_2(\sigma^2)$ і $A_3(\sigma^2)$ залежать від σ^2 і мають явний вигляд ($\bar{\sigma}_j = \sigma_j/\sigma$):

$$A_1 = M_l X_{lC_0} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j (\dot{\lambda}_{0j} + \lambda_j g / \sigma^2)}{\mu_j (\bar{\sigma}_j^2 - 1)}, \quad (49.1)$$

$$A_2 = M_l + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^2}{\mu_j (\bar{\sigma}_j^2 - 1)}, \quad (49.2)$$

$$A_3 = \frac{M_l X_{lC_0} g}{\sigma^2} + \dot{J}_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\dot{\lambda}_{0j} + \lambda_j g / \sigma^2)^2}{\mu_j (\bar{\sigma}_j^2 - 1)}. \quad (49.3)$$

Задача (48) допускає варіаційне формулювання, яке зводить її до визначення екстремальних точок квадратичного функціонала

$$F(\mathcal{W}) = \int_{-L}^0 \left[\sigma^2 m_b \mathcal{W} - (EI \mathcal{W}'')^2 \right] d\dot{x} + \sigma^2 \left[A_2 \mathcal{W}^2 + A_3 (\mathcal{W}')^2 + 2A_1 \mathcal{W} \mathcal{W}' \right]_{\dot{x}=0} \quad (50)$$

при кінетичному обмеженні (48.2). Це дозволяє застосовувати варіаційні методи розв'язання, представляючи $\mathcal{W}(\dot{x})$ у формі

$$\mathcal{W} = \sum_{k=1}^q a_k \psi_k,$$

де кожна з функцій $\psi_k(\dot{x})$ задовольняє однорідні граничні умови (48.2).

Використовуючи необхідну умову екстремуму для функціонала (50), приходимо до визначення нулів детермінанта

$$D(\sigma) = \det \{e_{ij} - \sigma^2 f_{ij}\} = 0, \quad (51)$$

де елементи матриці обчислено за формулами

$$e_{ij} = \int_{-L}^0 EI \psi_i'' \psi_j'' d\dot{x},$$

$$f_{ij} = \int_{-L}^0 m_b \psi_i \psi_j d\dot{x} + [A_2(\sigma^2) \psi_i \psi_j + A_3(\sigma^2) \psi_i' \psi_j' + A_1(\sigma^2) (\psi_i \psi_j' + \psi_i' \psi_j)]_{\dot{x}=0}.$$

3.6. Численні експерименти. Розглянемо задачу визначення власних частот сумісних коливань механічної системи. Для цього використаємо варіаційний метод розв'язання задачі (48), де базисні функції $\psi_k = \hat{\psi}_k / N_k$ мають вигляд

$$\hat{\psi}_k(\dot{x}) = (\dot{x} + L)^{(k+1)}, \quad N_k = \sqrt{\int_{-L}^0 \hat{\psi}_k^2(\dot{x}) d\dot{x}}.$$

Проаналізуємо випадок, коли перша власна частота коливання рідини σ_{11} пов'язана з рухомістю вільної поверхні і перша власна частота σ_{01} балки з резервуаром, частково заповненим рідиною, вільна поверхня якої не здійснює коливань (закрита “абсолютно твердою кришкою”). Останню парціальну частоту можна визначити в рамках нашого варіаційного методу, де у формулах (49) потрібно покласти $B_i = 0$.

Прирівнюючи σ_{01} і σ_{11} і фіксуючи $R_b = R - r = 1$ і $\bar{H} = 1/2$, ми можемо варіювати співвідношенням R_b/H_b , у якому вхідні величини, виражені через коефіцієнти k_b , k_i , $0 < k_i < 1$, $k_b > 1$, $H_b = L = k_b R_b$, $R_i = k_i R_b$, щоб знайти необхідні значення фізичних і геометричних величин, які забезпечують рівність указаних парціальних частот. Ця рівність виконується, наприклад, у випадку $k_i = 0,8$ та $k_b = 51$. Передбачалося, що рідина — вода ($\rho_l = 1,0 \cdot 10^3$ кг/м³), а башту побудовано із залізобетону ($\rho_c = 2,4 \cdot 10^3$ кг/м³, модуль Юнга $E = 6 \cdot 10^6$ Н/м²).

Графік функції $D(\sigma)$ (рівняння (51)) для наведених вище вхідних геометричних і фізичних параметрів показано на рис. 5 (суцільна лінія). Тут парціальні частоти, що збігаються, позначено словом “плескання” (“sloshing”). Якщо не брати до уваги рухомості вільної поверхні рідини, то графік $D(\sigma)$ збігається зі спадною монотонною функцією, зображеною пунктирною лінією.

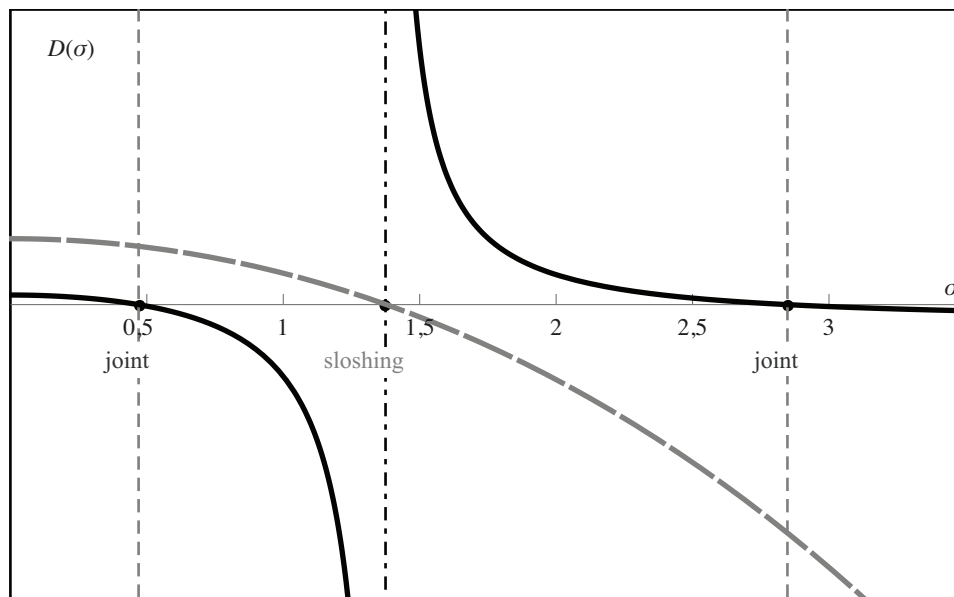


Рис. 5. Детермінант $D(\sigma)$ для обраних геометричних і фізичних параметрів системи як функція σ .

4. Висновки. З використанням варіаційних методів розв’язування базових крайових задач, розроблених у попередніх роботах, побудовано лінійну модальну теорію коливання рідини у тороїдальному баку. Проведено необхідні розрахунки та зведено в таблиці всі значення безрозмірних гідродинамічних коефіцієнтів модальної теорії для практично важливих геометричних пропорцій тороїдальних резервуарів.

За допомогою лінійної модальної теорії розв’язано задачу Сретенського про спільні поступальні коливання платформи з тороїдальним резервуаром, що містить рідину під пружним зв’язком, а також задачу про власні сумісні коливання водонапірної башти з піднятим тороїдальним резервуаром.

Автор заявляє про відсутність конфлікту інтересів. Усі необхідні дані містяться в статті. Роботу виконано за часткової фінансової підтримки за проектом “Математичне моделювання динаміки складних сильних систем і процесів, спричинених безпекою держави”, НДР #0123U100853.

Література

1. S. Dutta, A. Mandal, S. C. Dutta, *Solid-structure interaction in dynamic behaviour of elevated tanks with alternate frame staging configurations*, J. Sound Vibration, **277**, 825 – 853 (2004).
2. S. C. Dutta, S. Dutta, R. Roy, *Dynamic behavior of R/C elevated tanks with soil-structure interaction*, Eng. Struct., **31**, 2617 – 2629 (2009).
3. A. M. I. Sweedan, *Equivalent mechanical model for seismic forces in combined tanks subjected to vertical earthquake excitation*, Thin-Walled Struct., **47**, 942 – 952 (2009).
4. M. Aslam, W. G. Godden, D. T. Scalise, *Sloshing of water in torus pressure-suppression pool of boiling water reactors under earthquake ground motions*, Lawrence Berkeley Laboratory, University of California, Berkeley (1978).
5. J. L. Mc Carty, H. W. Leonard, W. C. Walton, *Experimental investigation of the natural frequencies of liquids in toroidal tanks*, NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia, U.S. (1960).
6. І. О. Луковський, *До побудови розв’язку нелінійної задачі про вільні коливання рідини в посудинах довільної геометричної форми*, Доп. АН УРСР. Сер. А, № 3, 207 – 210 (1969).

7. И. А. Луковский, В. А. Троценко, С. Ф. Фещенко, *Расчет динамических характеристик жидкости в подвижных полостях*, Ин-т математики АН УССР, Киев (1968).
8. С. Ф. Фещенко, И. А. Луковский, Б. И. Рабинович, Л. В. Докучаев, *Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижных полостях*, Наук. думка, Киев (1969).
9. И. А. Луковский, *Введение в нелинейную динамику тел с полостями, частично заполненными жидкостью*, Наук. думка, Киев (1990).
10. О. В. Солодун, *Власні коливання рідини в тороїдальних баках*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **16**, № 2, 140–155 (2019).
11. О. В. Солодун, *Про потенціал Стокса–Жуковського для тороїдальної порожнини*, Нелін. коливання, **27**, № 2, 269–278 (2024).
12. И. А. Луковский, М. Я. Барняк, А. Н. Комаренко, *Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости*, Наук. думка, Киев (1984).
13. И. А. Луковский, *Математические модели нелинейной динамики твердых тел с жидкостью*, Наук. думка, Киев (2010).
14. О. М. Faltinsen, A. N. Timokha, *Sloshing*, Cambridge University Press (2009).

Одержано 06.09.24