

РОБАСТНА СТАБІЛІЗАЦІЯ І ЗВАЖЕНА H_∞ -ОПТИМІЗАЦІЯ КЕРОВАНИХ ОБ'ЄКТІВ ІЗ ЕКЗОГЕННИМИ ЗБУРЕННЯМИ

Олексій Мазко

Ін-т математики НАН України

вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна

e-mail: mazkoag@gmail.com

We propose a new method for evaluating the performance measure for a class of pseudolinear systems with exogenous disturbances and its application to the weighted H_∞ -optimization problem for controlled systems. A linear model of the satellite system stabilization with uncertain mechanical parameters is considered. The numerical results of the search for stabilizing static state- and output-feedback controllers are given, which provide a specified damping level of external and initial disturbances under uncertainty conditions.

Запропоновано нову методику оцінки критерію якості для класу псевдолінійних систем із екзогенними збуреннями та її застосування в задачі зваженої H_∞ -оптимізації керованих об'єктів. Розглянуто лінійну модель системи стабілізації супутникової системи з невизначеними механічними параметрами. Наведено чисельні результати пошуку стабілізуючих регуляторів за станом і виходом, які забезпечують заданий рівень гасіння зовнішніх і початкових збурень за умов невизначеності.

1. Вступ. У сучасній теорії керування розвиваються і широко застосовуються методи H_2/H_∞ -оптимізації систем, які забезпечують робастну стійкість станів рівноваги та послаблюють негативний вплив зовнішніх (екзогенних) збурень на динаміку керованих об'єктів (див., наприклад, [1–3]). Типовим критерієм якості у таких задачах для систем із нульовим початковим станом є максимальне значення відношення L_2 -норм векторів контрольованого виходу об'єкта і збурень. Для класу лінійних автономних систем ця характеристика збігається з H_∞ -нормою матричної передатної функції.

На практиці рівняння руху керованих об'єктів разом із екзогенними збуреннями можуть містити також невизначені параметри та функції. У таких випадках виникають задачі робастного H_2/H_∞ -керування систем за умов невизначеності [4–9]. Відомі методи H_∞ -оптимізації лінійних систем базуються на критеріях виконання верхніх оцінок для відповідних критеріїв якості, встановлених у термінах квадратичних матричних рівнянь Ріккати (МРР) або лінійних матричних нерівностей (ЛМН) [1, 10–12]. Для розв'язання ЛМН створено достатньо ефективні засоби LMI Toolbox комп'ютерної системи MATLAB [13]. Для деяких класів нелінійних систем розроблено методи оцінки та пониження впливу зовнішніх збурень, що базуються на розв'язуванні залежних від стану системи складних співвідношень у вигляді рівнянь із частинними похідними або нерівностей Гамільтона–Якобі–Ісаака, МРР, ЛМН тощо (див., наприклад, [14–18]).

У цій статті на основі попередніх досліджень автора розвинуто нові підходи до задачі робастної H_∞ -оптимізації псевдолінійних систем керування за умов невизначеності та їхнього застосування в задачі стабілізації літального апарата. При цьому використано

узагальнені критерії якості, які характеризують зважений рівень гасіння зовнішніх збурень, а також початкових збурень, обумовлених невідомим початковим вектором. За допомогою вагових коефіцієнтів у таких критеріях якості можна встановити пріоритети між компонентами керованого виходу і невизначених збурень у системі керування. Причому компонентами невизначених збурень можуть бути як зовнішні збурення, що діють на систему, так і похибки вимірюваного виходу.

Будемо використовувати такі позначення: I_n — одинична матриця порядку n ; $0_{n \times m}$ — нульова $(n \times m)$ -вимірна матриця; $X = X^\top > 0$ (≥ 0) — додатно (невід'ємно) визначена симетрична матриця; $\sigma(A)$ — спектр матриці A ; A^{-1} ($A^\top$) — обернена (транспонована) матриця; $\text{Ker } A$ — ядро матриці A ; W_A — матриця, стовпці якої утворюють базис ядра $\text{Ker } A$; $\text{Co}\{A_1, \dots, A_\nu\}$ — опуклий многогранник (політоп) із вершинами $A_1, \dots, A_\nu$ у просторі матриць; C^r — множина функцій, що мають неперервну похідну порядку r у області визначення; $\|x\|$ — евклідова норма вектора x ; $\|z\|_Q$ — зважена L_2 -норма вектор-функції $z(t)$ вигляду

$$\|z\|_Q = \sqrt{\int_0^\infty z^\top Q z dt}.$$

2. Оцінка зважених критеріїв якості. Нехай $z \in \mathbb{R}^k$ і $w \in \mathbb{R}^s$ — вектори відповідно контрольованого виходу і зовнішніх збурень деякої динамічної системи з початковим станом $x_0 \in \mathbb{R}^n$, J_0 і J — зважені критерії якості цієї системи вигляду

$$J_0 = \sup_{0 < \|w\|_P < \infty} \frac{\|z\|_Q}{\|w\|_P}, \quad J = \sup_{(w, x_0) \in \mathcal{W}} \frac{\|z\|_Q}{\sqrt{\|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0}}, \quad (1)$$

де $\mathcal{W}$ — множина допустимих пар (w, x_0) системи, для яких виконується нерівність $0 < \|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0 < \infty$, $P = P^\top > 0$, $Q = Q^\top > 0$ і $X_0 = X_0^\top > 0$ — задані вагові матриці [19, 20]. У випадку одиничних матриць $P = I_s$ і $Q = I_k$ характеристика J_0 збігається зі стандартним критерієм якості в теорії H_∞ -керування. Значення J характеризує зважений рівень гасіння зовнішніх і початкових збурень у системі.

Вектор збурення $w(t)$ і початковий вектор x_0 називатимемо *найгіршими* в системі щодо критерію якості J , якщо на їхніх значеннях у (1) досягнуто супремум, тобто $\|z\|_Q^2 = J^2(\|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0)$. Вектор $w(t)$ є найгіршим щодо J_0 , якщо $\|z\|_Q = J_0 \|w\|_P$. У [12, 21] запропоновано методи знаходження таких векторів для лінійних систем, які базуються на розв'язуванні MPP.

Розглянемо псевдолінійну систему

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)w, \quad z = C(x)x + D(x)w, \quad x(0) = x_0, \quad (2)$$

де A , B , C і D — матриці, неперервно залежні від $x \in S_0$, S_0 — деяка відкрита опукла обмежена область у просторі $\mathbb{R}^n$ і $0 \in S_0$. Систему (2) називають *внутрішньо стійкою*, якщо її нульовий стан $x \equiv 0$ за відсутності збурень ($w \equiv 0$) асимптотично стійкий. Визначимо локальні характеристики J_0 і J вигляду (1) внутрішньо стійкої системи (2).

Якщо існують функція $v(x)$ і матриця $X(x) = X^\top(x)$, для яких при $x \in S_0$ виконуються співвідношення

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x} = 2x^\top X(x), \quad (3)$$

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} A^\top X + XA + C^\top QC & XB + C^\top QD \\ B^\top X + D^\top QC & D^\top QD - \gamma^2 P \end{bmatrix} < 0 \quad (4)$$

і $X > 0$, то система (2) внутрішньо стійка і виконується оцінка $J_0 \leq \gamma$. При цьому $J \leq \gamma$, якщо $0 < X \leq \gamma^2 X_0$ [20]. Відомо [17, 22], що для заданої вектор-функції $h(x) : S_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ класу C^r існує скалярна функція $v \in C^{r+1}$ така, що $\frac{\partial v(x)}{\partial x} = 2h^\top(x)$, тоді й лише тоді, коли

$$\frac{\partial h_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial h_j(x)}{\partial x_i}, \quad x \in S_0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{i+1, n}. \quad (5)$$

При цьому функцію $v(x)$ можна визначити як

$$v(x) = 2x^\top \int_0^1 h(tx) dt, \quad v(0) = 0. \quad (6)$$

Покладемо $h(x) = X(x)x$, де $X(x)$ — диференційовна матричнозначна функція. Тоді умови (5) і (3) є наслідком співвідношень

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{i+1, n}, \quad (7)$$

де X_i — стовпці матриці $X(x)$, $i = \overline{1, n}$. Якщо до того ж $X(x) > 0$, то функція $v(x)$ у (3) і (6) додатно визначена. Отже, маємо таке твердження.

Лема 1. Якщо існує симетрична матриця $X(x)$, яка задовольняє співвідношення (4), (7), і $X > 0$, то система (2) внутрішньо стійка з критерієм якості $J_0 \leq \gamma$. При цьому $J \leq \gamma$, якщо $0 < X \leq \gamma^2 X_0$.

Умови леми 1 в загальному випадку складні для перевірки, але в деяких випадках їх можна спростити. Зокрема, якщо $\Phi(0) < 0$, то завдяки припущенню про неперервну залежність $\Phi(x)$ матрична нерівність (4) буде виконуватися в деякому околі $S \subseteq S_0$ нульового стану системи (2). У цьому випадку критерії якості J_0 і J лінеаризованої системи

$$\dot{x} = Ax + Bw, \quad z = Cx + Dw, \quad x(0) = x_0, \quad (8)$$

де $A = A(0)$, $B = B(0)$, $C = C(0)$ і $D = D(0)$, можна вважати локальними характеристиками системи (2) в цьому околі. Якщо до того ж матрицю X шукати сталою, то рівності (7) виконуються автоматично. При цьому система (2) внутрішньо стійка і $J_0 \leq \gamma$ ($J \leq \gamma$), якщо $\Phi(0) < 0$ і $X > 0$ ($0 < X \leq \gamma^2 X_0$). Лінійна система (8) внутрішньо стійка і $J_0 < \gamma$ ($J < \gamma$) тоді й лише тоді, коли $\Phi(0) < 0$ і $X > 0$ ($0 < X < \gamma^2 X_0$) [19].

Лема 2 [21]. Нехай $X > 0$ — стабілізовний розв'язок MPP

$$A_0^\top X + XA_0 + XR_0X + Q_0 = 0, \quad (9)$$

де $A_0 = A + BR^{-1}D^\top QC$, $R_0 = BR^{-1}B^\top$, $Q_0 = C^\top(Q + QDR^{-1}D^\top Q)C$, $R = \gamma^2 P - D^\top QD > 0$ і $\gamma = J$. Тоді $X \leq J^2 X_0$ і структурований вектор зовнішніх збурень у формі лінійного зворотного зв'язку за станом

$$w = K_* x, \quad K_* = R^{-1}(B^\top X + D^\top QC), \quad (10)$$

де $x = x(t, x_0)$ — розв'язок системи

$$\dot{x} = (A + BK_*)x, \quad x(0) = x_0, \quad (11)$$

і довільний початковий вектор $x_0 \in \text{Ker}(X - J^2 X_0)$ є найгіршими щодо критерію якості J для системи (8).

Якщо $X > 0$ — стабілізований розв'язок МРР (9) при $\gamma = J_0$, де $x = x(t, x_0)$ — розв'язок системи (11) при $x_0 = 0$, то структурований вектор зовнішніх збурень (10) є найгіршим щодо критерію якості J_0 для системи (8).

3. Системи керування з обмеженими збуреннями. Розглянемо типову модель системи керування із зовнішніми збуреннями

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(x) & B_1(x) & B_2(x) \\ C_1(x) & D_{11}(x) & D_{12}(x) \\ C_2(x) & D_{21}(x) & D_{22}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix}, \quad x(0) = x_0, \quad (12)$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^s$, $z \in \mathbb{R}^k$ і $y \in \mathbb{R}^l$ — вектори відповідно стану, керування, зовнішніх збурень, контрольованого і спостережуваного виходів, а позначені матричні функції неперервно залежні від $x \in \mathcal{S}_0$. Нехай J_0 і J — критерії якості цієї системи вигляду (1) стосовно контрольованого виходу z при заданому керуванні u . Задача полягає у побудові стабілізованих J_0 - і J -оптимальних регуляторів, які мінімізують відповідні значення J_0 і J для замкненої системи. Пошук таких регуляторів можна здійснювати на основі досягнення відповідних оцінок $J_0 \leq \gamma$ і $J \leq \gamma$ при мінімально можливому значенні параметра $\gamma > 0$.

Нехай у подальшому $D_{22}(x) = 0$. Тоді, застосовуючи статичний регулятор за спостережуваним виходом $u = K(x)y$, замкнена система має вигляд

$$\dot{x} = A_*(x)x + B_*(x)w, \quad z = C_*(x)x + D_*(x)w, \quad x(0) = x_0, \quad (13)$$

де

$$A_* = A + B_2 K C_2, \quad B_* = B_1 + B_2 K D_{21}, \quad C_* = C_1 + D_{12} K C_2, \quad D_* = D_{11} + D_{12} K D_{21}.$$

Перепишуємо матричну нерівність (4) для системи (13) у вигляді ЛМН стосовно матриці регулятора K [21]

$$L_0^\top K R_0 + R_0^\top K^\top L_0 + \Omega < 0, \quad (14)$$

де

$$R_0 = \begin{bmatrix} R & 0_{l \times k} \end{bmatrix}, \quad L_0 = \begin{bmatrix} L & 0_{m \times s} \end{bmatrix} \tilde{X}, \quad R = \begin{bmatrix} C_2 & D_{21} \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} B_2^\top & D_{12}^\top \end{bmatrix},$$

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_k \\ 0 & I_s & 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} A^\top X + X A & X B_1 & C_1^\top \\ B_1^\top X & -\gamma^2 P & D_{11}^\top \\ C_1 & D_{11} & -Q^{-1} \end{bmatrix}$$

і застосовуючи відомий критерій сумісності цієї нерівності [10], отримаємо співвідношення

$$W_R^\top \begin{bmatrix} A^\top X + XA + C_1^\top QC_1 & XB_1 + C_1^\top QD_{11} \\ B_1^\top X + D_{11}^\top QC_1 & D_{11}^\top QD_{11} - \gamma^2 P \end{bmatrix} W_R < 0, \quad (15)$$

$$W_L^\top \begin{bmatrix} AY + YA^\top + B_1 P^{-1} B_1^\top & YC_1^\top + B_1 P^{-1} D_{11}^\top \\ C_1 Y + D_{11} P^{-1} B_1^\top & D_{11} P^{-1} D_{11}^\top - \gamma^2 Q^{-1} \end{bmatrix} W_L < 0 \quad (16)$$

і $XY = \gamma^2 I_n$. Остання рівність за умов $X > 0$ і $Y > 0$ еквівалентна співвідношенням

$$W = \begin{bmatrix} X & \gamma I_n \\ \gamma I_n & Y \end{bmatrix} \geq 0, \quad \text{rank } W \equiv n. \quad (17)$$

Отже, на основі леми 1 і наведених співвідношень маємо таке твердження.

Теорема 1. Якщо для деяких матриць $X(x) > 0$ і $Y(x) > 0$ виконуються співвідношення (7), (15)–(17), то існує статичний регулятор $u = Ky$, при якому замкнена система (13) є внутрішньо стійкою з критерієм якості $J_0 \leq \gamma$. При цьому $J \leq \gamma$, якщо $X \leq \gamma^2 X_0$.

Матрицю K шуканого регулятора в теоремі 1 можна визначити як розв’язок ЛМН (14) при заданих $X > 0$ і $Y > 0$.

Заслуговує уваги окремий випадок

$$C_2 = I_n, \quad D_{21} = 0, \quad D_{11}^\top(x) Q D_{11}(x) < \gamma^2 P, \quad x \in S_0, \quad (18)$$

коли спостережуваним виходом системи (12) є її вектор стану. У цьому випадку умови теореми 1 зводяться до співвідношень, що визначають одну невідому матрицю $Y(x)$. Дійсно, за умов (18) нерівність (15) не залежить від X , умови (7) можна переписати як

$$\frac{\partial Y_i}{\partial x_j} = \frac{\partial Y_j}{\partial x_i}, \quad x \in S_0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{i+1, n}, \quad (19)$$

де $[Y_1, \dots, Y_n] = Y^{-1}(x)$, а замість $X \leq \gamma^2 X_0$ можна використати еквівалентну нерівність $Y \geq X_0^{-1}$.

Якщо матрицю регулятора шукати у вигляді $K = ZY^{-1}$, то, враховуючи рівність $XY = \gamma^2 I_n$, ЛМН (14) за умов (18) можна подати як

$$\begin{bmatrix} \gamma^2 (AY + YA^\top + B_2 Z + Z^\top B_2^\top) & \gamma^2 B_1 & YC_1^\top + Z^\top D_{12}^\top \\ \gamma^2 B_1^\top & -\gamma^2 P & D_{11}^\top \\ C_1 Y + D_{12} Z & D_{11} & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (20)$$

Теорема 2. Якщо існують матриці $Y(x) > 0$ і $Z(x)$, що задовольняють співвідношення (19) і (20), то статичний регулятор за станом $u = K(x)x$, де $K(x) = Z(x)Y^{-1}(x)$, забезпечує внутрішню стійкість замкненої системи (13) із критерієм якості $J_0 \leq \gamma$. При цьому $J \leq \gamma$, якщо $Y(x) \geq X_0^{-1}$.

4. Робастна стабілізація за умов невизначеності. Розглянемо систему (12) за умов невизначеності

$$\begin{aligned} A(x) &\in \text{Co}\{A_1, \dots, A_{\nu_1}\}, & B_1(x) &\in \text{Co}\{B_{11}, \dots, B_{1\nu_2}\}, \\ C_1(x) &\in \text{Co}\{C_{11}, \dots, C_{1\nu_3}\}, & D_{11}(x) &\in \text{Co}\{D_{111}, \dots, D_{11\nu_4}\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Задані набори матриць A_i , $i = \overline{1, \nu_1}$, B_{1j} , $j = \overline{1, \nu_2}$, C_{1p} , $p = \overline{1, \nu_3}$ і D_{11q} , $q = \overline{1, \nu_4}$, є вершинами деяких політопів у відповідних матричних просторах $\mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbb{R}^{n \times s}$, $\mathbb{R}^{k \times n}$ і $\mathbb{R}^{k \times s}$. При цьому значення матриць $A(x)$, $B_1(x)$, $C_1(x)$ і $D_{11}(x)$ можна вважати невизначеними і представленими у вигляді

$$A(x) = \sum_{i=1}^{\nu_1} a_i A_i, \quad B_1(x) = \sum_{j=1}^{\nu_2} b_j B_{1j}, \quad C_1(x) = \sum_{p=1}^{\nu_3} c_p C_{1p}, \quad D_{11}(x) = \sum_{q=1}^{\nu_4} d_q D_{11q}, \quad (22)$$

де невід'ємні й залежні від x скалярні функції a_i , b_j , c_p і d_q задовольняють співвідношення

$$\sum_{i=1}^{\nu_1} a_i = \sum_{j=1}^{\nu_2} b_j = \sum_{p=1}^{\nu_3} c_p = \sum_{q=1}^{\nu_4} d_q \equiv 1, \quad x \in S_0, \quad t \geq 0. \quad (23)$$

Побудуємо системи ЛМН вигляду (14)–(16) для всіх можливих комбінацій вершин заданих політопів

$$L_0^\top K R_0 + R_0^\top K^\top L_0 + \begin{bmatrix} A_i^\top X + X A_i & X B_{1j} & C_{1p}^\top \\ B_{1j}^\top X & -\gamma^2 P & D_{11q}^\top \\ C_{1p} & D_{11q} & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (24)$$

$$W_R^\top \begin{bmatrix} A_i^\top X + X A_i + C_{1p}^\top Q C_{1p} & X B_{1j} + C_{1p}^\top Q D_{11q} \\ B_{1j}^\top X + D_{11q}^\top Q C_{1p} & D_{11q}^\top Q D_{11q} - \gamma^2 P \end{bmatrix} W_R < 0, \quad (25)$$

$$W_L^\top \begin{bmatrix} A_i Y + Y A_i^\top + B_{1j} P^{-1} B_{1j}^\top & Y C_{1p}^\top + B_{1j} P^{-1} D_{11q}^\top \\ C_{1p} Y + D_{11q} P^{-1} B_{1j}^\top & D_{11q} P^{-1} D_{11q}^\top - \gamma^2 Q^{-1} \end{bmatrix} W_L < 0, \quad (26)$$

$$i = \overline{1, \nu_1}, \quad j = \overline{1, \nu_2}, \quad p = \overline{1, \nu_3}, \quad q = \overline{1, \nu_4}.$$

Нерівності (14)–(16) за умов (22), (23) є наслідками відповідних систем нерівностей (24)–(26) (див. лему 1.21 у [20]). Якщо сталі матриці $X > 0$ і $Y > 0$ задовольняють систему співвідношень (17), (25) і (26), то для кожного набору індексів $\{i, j, p, q\}$ ЛМН (24) має розв'язок $K = K_{ijpq}$. Якщо K — спільний розв'язок цієї системи ЛМН при знайдених X і Y , то за теоремою 1 регулятор $u = Ky$ забезпечує внутрішню стійкість замкненої системи (13) із критерієм якості $J_0 \leq \gamma$ за умов невизначеності (21). При цьому $J \leq \gamma$, якщо $X \leq \gamma^2 X_0$.

Наведемо наслідок теореми 2 за умов (18), (21) і

$$B_2(x) \in \text{Co}\{B_{21}, \dots, B_{2\nu_5}\}, \quad D_{12}(x) \in \text{Co}\{D_{121}, \dots, D_{12\nu_6}\}. \quad (27)$$

Наслідок 1. Нехай сталі матриці $Y > 0$ і Z задовольняють систему ЛМН

$$\begin{bmatrix} \gamma^2(A_i Y + Y A_i^\top + B_{2r} Z + Z^\top B_{2r}^\top) & \gamma^2 B_{1j} & Y C_{1p}^\top + Z^\top D_{12f}^\top \\ \gamma^2 B_{1j}^\top & -\gamma^2 P & D_{11q}^\top \\ C_{1p} Y + D_{12f} Z & D_{11q} & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (28)$$

$$i = \overline{1, \nu_1}, \quad j = \overline{1, \nu_2}, \quad p = \overline{1, \nu_3}, \quad q = \overline{1, \nu_4}, \quad r = \overline{1, \nu_5}, \quad f = \overline{1, \nu_6}.$$

Тоді статичний регулятор за станом $u = Kx$, $K = ZY^{-1}$, забезпечує внутрішню стійкість замкненої системи (13) із критерієм якості $J_0 \leq \gamma$ за умов невизначеності (21) і (27). При цьому $J \leq \gamma$, якщо $Y \geq X_0^{-1}$.

Зауважимо, що твердження наслідку 1 зберігає чинність для класу нелінійних неавтономних систем типу (12), якщо припустити, що матричні функції, значення яких належать заданим політопам у (21) і (27), залежать від x і t .

Для пошуку невідомих матриць X і Y , що задовольняють систему співвідношень (17), (25) і (26) можна скористатися засобами LMIRank і YALMIP системи MATLAB, які дозволяють розв'язувати системи ЛМН із ранговими обмеженнями [23, 24]. Алгоритм синтезу нелінійної системи (12) із критерієм якості $J < \gamma$ із невизначеностями (21) і (27) на основі наслідку 1 зводиться до розв'язування системи ЛМН (28) і $Y \geq X_0^{-1}$ без додаткових рангових обмежень.

5. Робастна стабілізація літального апарата. Розглянемо задачу стабілізації супутникової системи, яка складається з двох твердих тіл, з'єднаних гнучким зв'язком. Рівняння руху цієї системи мають вигляд [25]

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\theta}_1 + d(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + \mu(\theta_1 - \theta_2) = u, \\ J_2 \ddot{\theta}_2 + d(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + \mu(\theta_2 - \theta_1) = w, \end{cases} \quad (29)$$

де θ_1 і θ_2 — кути повороту основного корпусу і приладового модуля з відповідними моментами інерції J_1 і J_2 , u — керуючий крутний момент, w — збурення крутного моменту. Гнучкий зв'язок між тілами моделюється як пружина з постійним крутним моментом μ і в'язким демпфуванням d .

При побудові керування бажано понизити вплив збурення w на кут повороту приладового модуля θ_2 при невизначених допустимих значеннях параметрів

$$\underline{\mu} \leq \mu \leq \bar{\mu}, \quad \underline{d} \leq d \leq \bar{d}. \quad (30)$$

Покладемо $J_1 = J_2 = 1$ і перепишемо рівняння (29) із вектором контрольованого виходу $z = [\theta_2 \ 0,01 u]^\top$ у вигляді

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u, \quad x(0) = x_0, \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u, \end{aligned} \quad (31)$$

де

$$x = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}, \quad A(\mu, d) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\mu & \mu & -d & d \\ \mu & -\mu & d & -d \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,01 \end{bmatrix}.$$

Інтервальну множину невизначеності (30) у системі (31) можна подати як матричний політоп із чотирма вершинами, тобто $A(\mu, d) \in \text{Co}\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, де

$$A_1 = A(\underline{\mu}, \underline{d}), \quad A_2 = A(\underline{\mu}, \bar{d}), \quad A_3 = A(\bar{\mu}, \underline{d}), \quad A_4 = A(\bar{\mu}, \bar{d}).$$

5.1. Статичний регулятор за станом. Виберемо вагові матриці критеріїв якості J_0 і J : $Q = I_2$, $P = 1$ і $X_0 = 5I_4$. У цьому випадку J_0 збігається з H_∞ -нормою матричної передатної функції системи. У [25] проведено розрахунки матриці статичного регулятора за станом, при якому замкнена система є внутрішньо стійкою з критерієм якості $J_0 < \gamma = 1,478$ для довільних значень параметрів μ і d з інтервалів

$$0,09 \leq \mu \leq 0,4, \quad 0,0038 \leq d \leq 0,04.$$

Наведемо результати аналогічних розрахунків, проведених на основі наслідку 1, розширивши наведені інтервали невизначеності. Із застосуванням засобів LMI Toolbox системи MATLAB знайдено керування

$$u = Kx, \quad K = -[204,368591 \quad 1143,861238 \quad 39,303565 \quad 2380,510261], \quad (32)$$

яке забезпечує внутрішню стійкість замкненої системи з критерієм якості $J = 1,462145 < \gamma = 2,23$ за умов невизначеності

$$0,085 \leq \mu \leq 0,455, \quad 0,003 \leq d \leq 0,045. \quad (33)$$

При цьому $J_0 = 0,758722$.

Крім того, поклавши $\mu = \mu_0 = 0,2$ і $d = d_0 = 0,02$, на основі леми 2 знайдено найгірше збурення

$$w = K_*x, \quad K_* = [0,324152 \quad 2,003559 \quad 0,059591 \quad 3,845553], \quad (34)$$

і найгірший нормований початковий вектор стосовно критерію якості J :

$$x_0 = [0,072183 \quad 0,488815 \quad 0,013214 \quad 0,869296]^\top, \quad \|x_0\| = 1. \quad (35)$$

Замкнена система з керуванням (32) за умов (34) і (35) має вигляд

$$\dot{x} = Mx, \quad M = A(\mu_0, d_0) + B_1K_* + B_2K, \quad x(0) = x_0, \quad (36)$$

її спектр

$$\sigma(M) = \{-27,273378, -5,147114, -2,390696, -0,686825\}.$$

На рис. 1 зображено розв'язок системи (36), а на рис. 2 — вектор-функцію $w(t)$ найгіршого збурення (34).

5.2. Статичний регулятор за виходом. Нехай у системі (31) вимірюється вектор виходу

$$y = C_2x = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

а її критерії якості J_0 і J визначені з ваговими матрицями $Q = I_2$, $P = 10$ і $X_0 = I_4$.

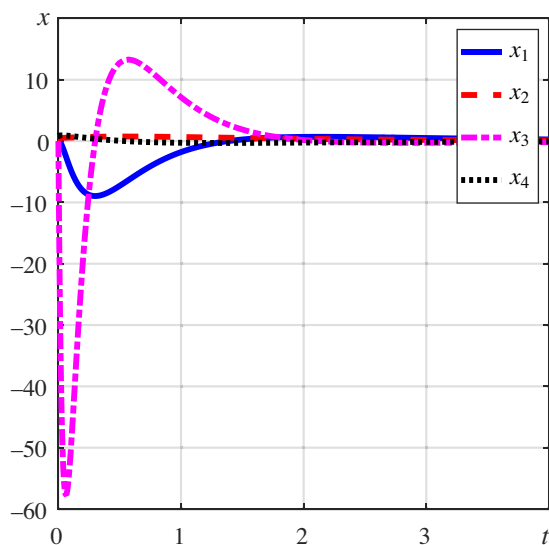


Рис. 1. Розв'язок замкненої системи з керуванням (32) за умов (34) і (35).

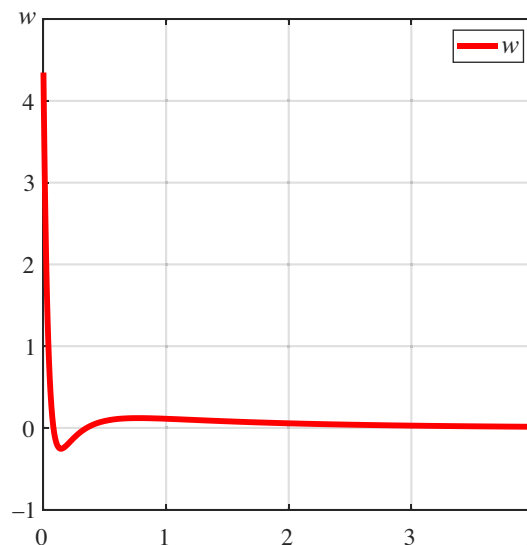


Рис. 2. Найгірше збурення (34) щодо критерію якості J .

На основі співвідношень (17), (25) і (26) за допомогою засобів LMIRank і YALMIP системи MATLAB побудовано статичний регулятор за виходом

$$u = Ky, \quad K = [-343,791162 \quad -414,375419 \quad -1126,581506], \quad (37)$$

при якому замкнена система внутрішньо стійка з критерієм якості $J = 2,666941 < \gamma = 3,8$ за умов невизначеності

$$0,19 \leq \mu \leq 0,4, \quad 0,001 \leq d \leq 0,05. \quad (38)$$

При цьому $J_0 = 1,582062$.

На основі леми 2 при $\mu = \mu_0$ і $d = d_0$ знайдено також найгірше збурення

$$w = K_*x, \quad K_* = [0,013978 \quad 0,038960 \quad 0,000828 \quad 0,074861], \quad (39)$$

і найгірший нормований початковий вектор щодо критерію якості J :

$$x_0 = [0,154386 \quad 0,495854 \quad 0,007562 \quad 0,854539]^\top, \quad \|x_0\| = 1. \quad (40)$$

На рис. 3 зображено розв'язок замкненої системи з керуванням (37) за умов (39) і (40)

$$\dot{x} = Mx, \quad M = A(\mu_0, d_0) + B_1K_* + B_2KC_2, \quad x(0) = x_0, \quad (41)$$

а на рис. 4 — функцію $w(t)$ найгіршого збурення (39). Спектр системи (41) має вигляд

$$\sigma(M) = \{-413,508209, -0.295780 \pm 0.684432i, -0,240790\}.$$

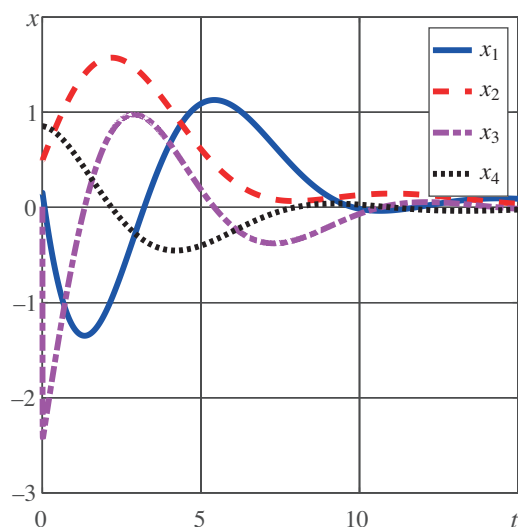


Рис. 3. Розв'язок замкнутої системи з регулятором (37) за умов (39) і (40).

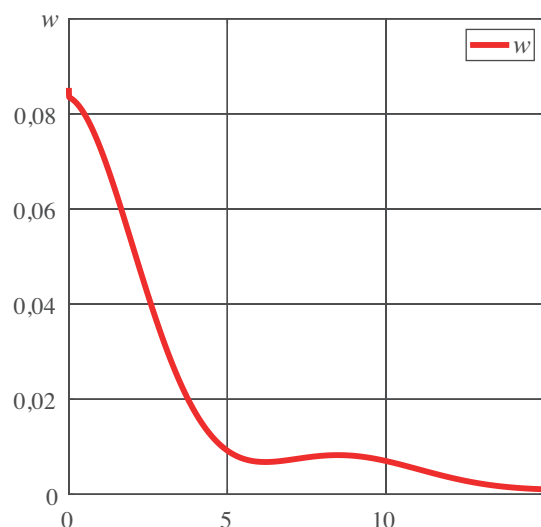


Рис. 4. Найгірше збурення (39) щодо критерію якості J .

Автор заявляє про відсутність конфлікту інтересів. Усі необхідні дані містяться в статті. Роботу виконано за часткової фінансової підтримки за проектом № 0123U100853 “Математичне моделювання складних динамічних систем та процесів, актуальних для безпеки держави”.

Література

1. S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishman, *Linear matrix inequalities in system and control theory*, SIAM Studies in Appl. Math., **15** (1994).
2. K. Zhou, J. C. Doyle, K. Glover, *Robust and optimal control*, Englewood, Prentice-Hall, Inc. (1996).
3. G. E. Dullerud, F. G. Paganini, *A course in robust control theory. A convex approach*, Springer-Verlag, Berlin (2000).
4. G. Lu, W. C. Hu, *On robust H_∞ control for nonlinear uncertain systems*, Commun. Inf. Syst., **2**, № 3, 255 – 264 (2002).
5. S. K. Nguang, *Robust nonlinear H_∞ -output feedback control*, IEEE Trans. Automat. Control, **41**, 1003 – 1007 (1996).
6. T. Shen, K. Tamura, *Robust H_∞ control of uncertain nonlinear system via state feedback*, IEEE Trans. Automat. Control, **40**, 766 – 768 (1995).
7. T. Shen, *Robust and H_∞ control*, Springer-Verlag London, Ltd., London (2000).
8. E. N. Goncalves, R. M. Palhares, R. H. C. Takahashi, *A novel approach for H_2/H_∞ robust PID synthesis for uncertain systems*, J. Process Control, **18**, 19 – 26 (2008).
9. Hongwei Wang, Qianyu Wang, Haotian Zhang, Jie Han, *H-infinity observer for vehicle steering system with uncertain parameters and actuator fault*, Actuators, **11**, № 2, 43 (2022).
10. P. Gahinet, P. Apkarian, *A linear matrix inequality approach to H_∞ control*, Internat. J. Robust Nonlinear Control, **4**, 421 – 448 (1994).
11. S. Xu, J. Lam, Y. Zou, *New versions of bounded real lemmas for continuous and discrete uncertain systems*, Circuits Systems Signal Process, **26**, 829 – 838 (2007).
12. D. V. Balandin, M. M. Kogan, *Generalized H_∞ -optimal control as a trade-off between the H_∞ -optimal and γ -optimal controls*, Autom. Remote Control, **71**, № 6, 993 – 1010 (2010).
13. P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, M. Chilali, *The LMI control toolbox. For use with Matlab. User's guide*, The MathWorks, Inc., Natick, MA (1995).

14. A. J. van der Schaft, *L₂-Gain and passivity techniques in nonlinear control*, 3rd ed., Springer, Cham (2017).
15. A. Isidori, A. Astolfi, *Disturbance attenuation and H_∞-control via measurement feedback in nonlinear systems*, IEEE Trans. Automat. Control, **37**, № 9, 1283 – 1293 (1992).
16. Xin Wang, E. E. Yaz, S. C. Schneider, Y. I. Yaz, *H₂ – H_∞ control of continuous-time nonlinear systems using the state-dependent Riccati equation approach*, Systems Sci. Control Eng., **5**, 224 – 231 (2017).
17. Wei-Min Lu, J. C. Doyle, *H_∞ control of nonlinear systems: a convex characterization*, IEEE Trans. Automat. Control, **40**, № 9, 1668 – 1675 (1995).
18. D. F. Coutinho, A. Trofino, M. Fu, *Nonlinear H-infinity control: an LMI approach*, IFAC, 15th Triennial World Congress, Barcelona, Spain (2002).
19. А. Г. Мазко, *Робастная устойчивость и стабилизация динамических систем. Методы матричных и конусных неравенств*, Пр. Ін-ту математики НАН України, **102** (2016).
20. О. Г. Мазко, *Матричні методи аналізу та синтезу динамічних систем*, Наук. думка, Київ (2023); <https://doi.org/10.37863/6103136622-55>.
21. О. Г. Мазко, *Синтез статичних регуляторів для керованих об'єктів із екзогенними збуреннями*, Нелін. коливання, **26**, № 4, 484 – 494 (2023).
22. M. S. Berger, M. Berger, *Perspective in nonlinearity: an introduction to nonlinear analysis*, W. A. Benjamin, Inc., New York, Amsterdam (1968).
23. R. Orsi, U. Helmke, J. B. Moore, *A Newton-like method for solving rank constrained linear matrix inequalities*, Automatica J. IFAC, **42**, № 11, 1875 – 1882 (2006).
24. J. Löfberg, *YALMIP: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB*, IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design, Taipei, Taiwan, 284 – 289 (2004).
25. U. Shaked, *Improved LMI representations for the analysis and the design of continuous-time systems with polytopic type uncertainty*, IEEE Trans. Automat. Control, **46**, № 4, 652 – 656 (2001).

Одержано 03.04.24