

ГЛОБАЛЬНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ І АТРАКТОРИ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО ВКЛЮЧЕННЯ З НАПІВНЕПЕРЕРВНОЮ ЗВЕРХУ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ СТЕПЕНЕВОГО ЗРОСТАННЯ

Олексій Капустян, Олександр Станжицький,
Юлія Федоренко, Василь Кравець

Київський національний університет імені Т. Шевченка
просп. акад. Глушкова, 4-Е, Київ, 03022, Україна
e-mail: kapustyan@knu.ua, відповідальний за листування
stanzhytskyi@knu.ua
iulii-fedorenko@knu.ua
vasyl.kravets@tsatu.edu.ua

We consider a parabolic inclusion with an upper semicontinuous multivalued interaction function that satisfies the sign and growth conditions of the reaction – diffusion type. We prove the global solvability of the corresponding initial boundary-value problem in the phase space L^2 and establish the existence of a global attractor. The conditions for the boundedness of the attractor in the space L^∞ are found.

Розглянуто параболічне включення з напівнеперервною зверху багатозначною функцією взаємодії, що задовольняє умови знака, і зростання типу реакція – дифузія. Доведено глобальну розв'язність відповідної початкової крайової задачі у фазовому просторі L^2 й установлено існування глобального атрактора. Одержано умови обмеженості атрактора у просторі L^∞ .

1. Вступ. Питання глобальної розв'язності та притягуючих множин для параболічних включень, тобто параболічних рівнянь із багатозначною правою частиною, інтенсивно вивчають протягом останніх років [1 – 11], включаючи задачі усереднення [12, 13], імпульсно та стохастично збурені задачі [14 – 19]. Стандартними умовами для багатозначної функції взаємодії, які забезпечують глобальну розв'язність, є не більш як лінійне зростання [3] або наявність неперервного селектора [20]. У роботі [21] для напівнеперервних правих частин загального вигляду встановлено глобальну розв'язність для обмежених початкових даних. У цій статті за умов знака і зростання типу реакція – дифузія [22] встановлюємо глобальну розв'язність у фазовому просторі L^2 . Для відповідної багатозначної розв'язуючої напівгрупи (m -напівпоток [4]) доведено існування у фазовому просторі L^2 глобального атрактора — компактної інваріантної множини, що притягує всі траєкторії рівномірно за обмеженими (у L^2 -нормі) початковими даними [22]. За додаткових умов для вхідних даних також встановлено обмеженість одержаного атрактора у просторі L^∞ .

2. Постановка задачі. В обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, щодо невідомої функції $u = u(t, x)$, $(t, x) \in Q = (0, +\infty) \times \Omega$, розглядаємо початково-крайову задачу

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &\in f(u) + h(x), \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \\ u|_{t=0} &= u_0.\end{aligned}\tag{1}$$

Тут $h \in L^2(\Omega)$, багатозначне відображення f задовольняє умови

$$f: \mathbb{R} \mapsto C_v(\mathbb{R}) \text{ напівнеперервне зверху [23], } 0 \in f(0),\tag{2}$$

існують константи $C \geq 0$, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, $p \geq 2$ такі, що

$$\forall s \in \mathbb{R} \quad \forall \xi \in f(s) \quad -C - \alpha_1 |s|^p \leq \xi \leq C - \alpha_2 |s|^p,\tag{3}$$

$C_v(\mathbb{R})$ — множина всіх опуклих компактів у $\mathbb{R}$.

Будемо розглядати задачу (1) у фазовому просторі $X = L^2(\Omega)$, норму і скалярний добуток у якому позначатимемо через $\|\cdot\|$, $(\cdot, \cdot)$. Також для $v \in L^\infty(\Omega)$ будемо позначати $\|v\|_\infty = \text{ess sup}_{x \in \Omega} |v(x)|$.

Для $u_0 \in X$, $T > 0$ розв'язок (1) на $[0, T]$ будемо розуміти у сенсі такого означення.

Означення 1. Функцію $u = u(t, x)$, $(t, x) \in Q_T = (0, T) \times \Omega$, будемо називати (слабким) розв'язком (1) на $(0, T)$, якщо існує $l \in L^q(Q_T)$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ така, що u — слабкий розв'язок задачі

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= l + h, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \\ u|_{t=0} &= u_0,\end{aligned}\tag{4}$$

$$l(t, x) \in f(u(t, x)) \quad \text{майже скрізь на } Q_T.\tag{5}$$

Те, що u — слабкий розв'язок задачі (4), означає, що $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ і

$$\begin{aligned}\forall v \in C_0^\infty(\Omega) \quad \forall \eta \in C_0^\infty(0, T) \quad & - \int_0^T (u, v) \eta_t + \int_0^T (\nabla u, \nabla v) \eta \\ & = \int_0^T \int_\Omega (l(t, x) + h(x)) v(x) \eta(t) dx dt.\end{aligned}\tag{6}$$

З (6) і теорем вкладення [22] виводимо, що

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) + L^q(0, T; L^q(\Omega)) \subset L^q(0, T; H^{-s}(\Omega)),$$

$$s = \max \left\{ 1, n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \right\}.$$

Останнє вкладення означає [22], що $u \in \mathbb{C}([0, T]; H^{-s}(\Omega))$, зокрема умова $u|_{t=0} = u_0$ має сенс. У роботі доведено, що за умов (2), (3) задача (1) має розв'язок для будь-яких $u_0 \in X$, $T > 0$ (теорема 1).

Також встановлено, що одержаний розв'язок належить $L^p(Q_T)$.

Тоді коректно означене відображення $G: \mathbb{R}_+ \times X \mapsto 2^X$ має вигляд

$$G(t, u_0) = \{u(t) \mid u(\cdot) \text{ — розв'язок (1), } u \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; L^p(\Omega))\}.$$

У цій роботі доведено, що m -напівпотік G має глобальний аттрактор Θ , і якщо $h \in L^\infty(\Omega)$, то $\Theta \subset L^\infty(\Omega)$ (теорема 2).

3. Основні результати. З умов (3) одержуємо

$$|s| \geq \left(\frac{C}{\alpha_2}\right)^{\frac{1}{p}} \Rightarrow \forall \xi \in f(s) \quad \xi \cdot s \leq 0.$$

Тоді справедливий такий результат.

Лема 1 [21]. За умови $h \in L^\infty(\Omega)$ для всіх $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ задача (1) має розв'язок $u(\cdot)$ на $[0, +\infty)$, причому існує константа $K = K(\|u_0\|_\infty, \|h\|_\infty) > 0$ така, що

$$\sup_{t \geq 0} \|u(t)\|_\infty \leq K. \quad (7)$$

Зауваження 1. У роботі [21] за умов $h, u_0 \in L^\infty(\Omega)$ доведено існування м'якого розв'язку (1), тобто функції $u \in \mathbb{C}([0, T]; L^2(\Omega))$ такої, що $u(0) = u_0$ і

$$\forall t \geq 0 \quad u(t) = S(t-s)u_0 + \int_0^t S(t-s)l(s)ds + \int_0^t S(t-s)hds,$$

де $l(t, x) \in f(u(t, x))$ майже скрізь і $S(t)$ — C_0 -напівгрупа, породжена Δ у $L^2(\Omega)$.

Проте оскільки завдяки (7) $l \in L^\infty(Q_T)$ для довільного $T > 0$, зокрема, $l \in L^2(Q_T)$, то з [24] виводимо, що u — слабкий розв'язок (4).

Теорема 1. За умов (2), (3) для всіх $u_0 \in X$, $T > 0$ задача (1) має розв'язок на $(0, T)$ у сенсі означення 1.

Доведення. Для $u_0 \in X$, $h \in X$ нехай $\{u_0^n\}, \{h_n\} \subset L^\infty(\Omega)$ такі, що

$$u_0^n \rightarrow u_0, \quad h_n \rightarrow h \quad \text{у } X, \quad (8)$$

u_n — розв'язок (1) із початковими даними u_0^n , h_n , існування якого гарантовано лемою 1, l_n — відповідна права частина з означення 1.

Оскільки напівнеперервне зверху відображення переводить компакт у компакт [23], $l_n(t, x) \in f(u_n(t, x))$ м.с. на $Q = (0, +\infty) \times \Omega$, то завдяки (7) $l_n \in L^\infty(Q)$. Оскільки u_n — слабкий розв'язок задачі

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = l_n + h_n,$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$u|_{t=0} = u_0^n,$$

то $u_n \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, $\frac{\partial u_n}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ і для м.в. $t > 0$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_n(t)\|^2 + \|u_n(t)\|_{H_0^1}^2 = \int_{\Omega} l_n(t, x) u_n(t, x) dx + (h_n, u_n).$$

Звідси згідно з умовами (3)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_n(t)\|^2 + \|u_n(t)\|_{H_0^1}^2 + \alpha_2 \|u_n(t)\|_{L^p}^p \leq C|\Omega| + \|h_n\| \|u_n\|.$$

Використовуючи нерівність Пуанкаре і (8), остаточно маємо

$$\frac{d}{dt} \|u_n(t)\|^2 + \delta_1 \|u_n(t)\|^2 + \delta_2 \|u_n(t)\|_{H_0^1}^2 + \delta_3 \|u_n(t)\|_{L^p}^p \leq C_1, \quad (9)$$

де додатні константи δ_1 , δ_2 , δ_3 , C_1 не залежать від n .

З (9) завдяки неперервності $t \mapsto \|u_n(t)\|$ отримуємо

$$\forall t \geq 0 \quad \|u_n(t)\|^2 \leq \|u_n(0)\|^2 e^{-\delta_1 t} + \frac{C_1}{\delta_1}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \forall t \geq s \geq 0 \quad \|u_n(t)\|^2 + \delta_2 \int_s^t \|u_n(\tau)\|_{H_0^1}^2 + \delta_3 \int_s^t \|u_n(\tau)\|_{L^p}^p \\ \leq \|u_n(s)\|^2 + C_1(t-s). \end{aligned} \quad (11)$$

Отже,

$$\forall T > 0 \quad \{u_n\} \text{ обмежена в } L^\infty(0, T; X) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^p(Q_T).$$

Згідно з умовами (3)

$$|l_n(t, x)| \leq C_2(1 + |u_n(t, x)|^{p-1}). \quad (12)$$

З (12) для $q = \frac{p}{p-1}$ виводимо

$$\int_{Q_T} |l_n(t, x)|^q \leq C_3 \left(1 + \int_{Q_T} |u_n(t, x)|^p \right). \quad (13)$$

З (11) і (13) маємо, що

$$\{l_n\} \text{ обмежена в } L^q(Q_T). \quad (14)$$

Таким чином, за підпоследовністю

$$\begin{aligned} u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабко в } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^p(Q_T), \\ l_n \rightarrow l \quad \text{слабко в } L^q(Q_T). \end{aligned} \quad (15)$$

Це дає можливість перейти до межі у рівності (6), записаній для u_n , l_n і одержати (6) для функцій u , l , причому $u \in L^p(Q_T)$.

Крім того, (12) і (14) означають, що

$$\left\{ \frac{\partial u_n}{\partial t} \right\} \text{ обмежена в } L^q(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

За теоремою про компактність [22] такі вкладення є компактними:

$$\left\{ v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \mid \frac{\partial v}{\partial t} \in L^q(0, T; H^{-1}(\Omega)) \right\} \Subset L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad (16)$$

$$\left\{ v \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \mid \frac{\partial v}{\partial t} \in L^q(0, T; H^{-1}(\Omega)) \right\} \Subset \mathbb{C}([0, T], H^{-1}(\Omega)). \quad (17)$$

З (16) і (17) одержуємо, що за підпоследовністю

$$u_n \rightarrow u \quad \text{в } L^2(Q_T) \text{ і м.с. в } Q_T, \quad (18)$$

$$u_n(t) \rightarrow u(t) \quad \text{слабко в } L^2(\Omega) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (19)$$

З (8) і (19), зокрема, виводимо, що $u(0) = u_0$, тобто u — слабкий розв'язок (4). Залишилося показати, що виконується (5).

Маємо

$$\text{для м.в. } (t, x) \in Q_T \quad \forall n \geq 1 \quad l_n(t, x) \in f(u_n(t, x)). \quad (20)$$

Оскільки $l_n \rightarrow l$ слабко в $L^q(Q_T)$, то існує послідовність опуклих комбінацій з $\{l_n\}$, яка збігається до l сильно в $L^q(Q_T)$, тобто $\exists \{\alpha_i^{(n)}\}$, $\alpha_i^{(n)} \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i^{(n)} = 1$, такі, що

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i^{(n)} l_i \rightarrow l \quad \text{у } L^q(Q_T) \text{ і м.с. у } Q_T. \quad (21)$$

Тому що f напівнеперервна зверху і $u_n(t, x) \rightarrow u(t, x)$ м.с. у Q_T , то $\forall \varepsilon > 0$, $\forall (t, x) \in \widetilde{Q_T}$ — множині повної міри, де виконуються вказані збіжності, існує $n_0 = n_0(t, x)$ таке, що

$$\forall n \geq n_0 \quad f(u_n(t, x)) \subset O_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(u(t, x))). \quad (22)$$

Тоді з опуклості $f(u(t, x))$, (20), (21) виводимо, що $l(t, x) \in O_\varepsilon(f(u(t, x)))$, що завдяки довільності $\varepsilon > 0$ означає виконання (5).

Теорему 1 доведено.

Наслідок 1. З теореми 1 випливає, що існує розв'язок (1) на $[0, +\infty)$ у тому сенсі, що він задовольняє означення 1 для довільного $T > 0$.

Для заданих $u_0 \in X$, $t > 0$ розглянемо множину

$$G(t, u_0) = \{u(t) \mid u(\cdot) \text{ — розв'язок (1) на } [0, +\infty), u(\cdot) \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}_+; L^p(\Omega))\}. \quad (23)$$

Завдяки теоремі 1 $G(t, u_0) \neq \emptyset$. Легко показати, що (23) визначає багатозначну напівгрупу (m -напівпотік) [4], тобто для довільних $u_0 \in X$, $t, s \geq 0$

$$G(0, u_0) = u_0, \quad G(t + s, u_0) = G(t, G(s, u_0)).$$

Означення 2 [4]. Компактна множина $\Theta \subset X$ називається глобальним аттрактором m -напівпотуку G , якщо

$$\Theta = G(t, \Theta) \quad \forall t \geq 0,$$

$$\text{dist}(G(t, B), \Theta) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad \text{для довільної обмеженої } B \subset X,$$

де

$$\text{dist}(A, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \|x - y\|.$$

Глобальний аттрактор Θ називається стійким, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \quad \text{dist}(\eta, \Theta) < \delta \quad \Rightarrow \quad \forall t \geq 0 \quad \text{dist}(G(t, \eta), \Theta) < \varepsilon.$$

Теорема 2. M -напівпотік (23), породжений розв'язками задачі (1), має стійкий глобальний аттрактор Θ . Крім того, якщо $h \in L^\infty(\Omega)$, то множина Θ є обмеженою в $L^\infty(\Omega)$.

Доведення. Нехай u — розв'язок (1) на $[0, +\infty)$ у сенсі означення 1, $u \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; L^p(\Omega))$. Тоді u — слабкий розв'язок (4) і для функції $l(t, x) \in f(u(t, x))$ майже скрізь завдяки умовам (3) маємо

$$l \in L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; L^q(\Omega)), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Далі,

$$\forall T > 0 \quad u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^p(0, T; L^p(\Omega)),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) + L^q(0, T; L^q(\Omega)),$$

отже, з [22] одержуємо, що $u: [0, T] \mapsto L^2(\Omega)$ є абсолютно неперервним відображенням, зокрема для майже всіх t задовольняє (9)–(11).

З (10) маємо, що G дисипативний, тобто

$$\forall r > 0 \quad \forall u_0 \in X, \quad \|u_0\| \leq r$$

$$G(t, u_0) \subset B_0 := \left\{ \|u\| \leq \sqrt{\frac{C_1}{\delta_1} + 1} \right\} \quad \forall t \geq T = \frac{2}{\delta} \ln r.$$

Для підтвердження існування стійкого глобального аттрактора дисипативного m -напівпотуку G потрібно перевірити такі властивості [9]:

$$\text{для довільних } \eta_n \rightarrow \eta, \quad \tau_n \rightarrow \tau \geq 0, \quad \xi_n \in G(\tau_n, \eta_n), \quad (24)$$

$$\text{за підпоследовністю } \xi_n \rightarrow \xi \in G(\tau, \eta),$$

$$\text{для довільної обмеженої послідовності } \{\eta_n\}, \quad \text{довільних } \tau > 0, \quad \xi_n \in G(\tau, \eta_n) \quad (25)$$

послідовність $\{\xi_n\}$ є передкомпактною.

Перевірка цих властивостей ґрунтується на такій лемі.

Лема 2. Нехай $\{u_n\}$ — послідовність розв'язків (1) на $(0, T)$, $u_n \in L^p(Q_T)$, $\{\tau_n\} \subset [0, T]$, $\tau_n \rightarrow \tau \geq 0$.

1. Якщо $u_n(0) \rightarrow u_0$ слабо в X , то існує розв'язок (1) на $(0, T)$, $u(0) = u_0$, такий, що за підпослідовністю $u_n(\tau_n) \rightarrow u(\tau)$ слабо в X . Якщо при цьому $\tau > 0$, то $u_n(\tau_n) \rightarrow u(\tau)$ в X .

2. Якщо $u_n(0) \rightarrow u_0$ в X , то $u_n(\tau_n) \rightarrow u(\tau)$ в X .

Доведення лема 2. Нехай u_n — розв'язок (4) з функцією $l_n(t, x) \in f(u_n(t, x))$ на Q_T і початковим заданим $u_n(0)$, $u_n(0) \rightarrow u_0$, слабо в X .

Тоді $\{u_n(0)\}$ обмежена в X , u_n задовольняє (9)–(11). Отже, $\{u_n\}$ обмежена в $L^\infty(0, T; X) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^p(Q_T)$, $\{l_n\}$ обмежена в $L^q(Q_T)$ і для u_n можемо одержати збіжності (15)–(19), де завдяки (20)–(22) для граничної функції u отримаємо, що вона є розв'язком (1), $u(0) = u_0$.

При цьому завдяки (17)

$$u_n(\tau_n) \rightarrow u(\tau) \quad \text{в } H^{-s}(\Omega),$$

що разом з оцінкою

$$\|u_n(\tau_n)\| \leq \|u_n(0)\|e^{-\delta_1 \tau_n} + \frac{C_1}{\delta_1}$$

і вкладенням $H^{-s}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ гарантує, що

$$u_n(\tau_n) \rightarrow u(\tau) \quad \text{слабо в } X. \quad (26)$$

Тепер розглянемо функції $J_n: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $J: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$J_n(t) = \|u_n(t)\|^2 - C_1 t, \quad J(t) = \|u(t)\|^2 - C_1 t.$$

Тоді J_n , J неперервні, монотонно не зростають (оцінка (11)) і збігаються м. с. (властивість (18)). Завдяки модифікованій теоремі Діні [9] маємо

$$\forall \delta \in (0, T) \quad J_n \rightarrow J \quad \text{в } \mathbb{C}([\delta, T]), \quad \text{і для } \delta = 0, \text{ якщо } J_n(0) \rightarrow J(0). \quad (27)$$

З (27) виводимо, що для $\tau_n \rightarrow \tau > 0$

$$J_n(\tau_n) = \|u_n(\tau_n)\|^2 - C_1 \tau_n \rightarrow \|u(\tau)\|^2 - C_1 \tau,$$

що разом з (26) означає виконання п. 1 лема 2. Пункт 2 лема 2 доводимо з використанням другої частини (27).

Лему 2 доведено.

Лема 2 гарантує виконання (24), (25), а отже, існування стійкого глобального атрактора Θ . Більш того, можемо стверджувати [4], що

$$\Theta = \omega(B_0) = \bigcap_{T>0} \overline{\bigcup_{t \geq T} G(t, B_0)} = \{\xi \mid \xi = \lim \xi_n, \xi_n \in G(t_n, B_0), t_n \rightarrow \infty\}. \quad (28)$$

Для того щоб довести обмеженість Θ , використаємо (28). Нехай $h \in L^\infty(\Omega)$ і $\xi_n \in G(t, B_0)$, $t_n \rightarrow \infty$. Тоді $\xi_n = u_n(t_n)$, u_n — розв'язок (1) на $(0, +\infty)$, $u_n \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}_+; L^p(\Omega))$, $u_n(0) \in B_0$.

$$\text{Домножимо рівняння з (4) для } u_n \text{ на } (u_n - M)_+ = \begin{cases} u_n - M, & u_n > M, \\ 0, & \text{інакше,} \end{cases} \text{ де}$$

$$M = \frac{2}{\alpha_2} \left(C + \left(\frac{2}{p\alpha_2} \right)^{\frac{1}{p-1}} \|h\|_{\infty}^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(u_n - M)_+\|^2 + \|\nabla(u_n - M)_+\|^2 \\ &= \int_{\Omega} (l_n(t, x) + h(x))(u_n - M)_+ dx. \end{aligned}$$

Згідно з (3) для $u_n(t, x) > M$

$$\begin{aligned} (l_n(t, x) + h(x))(u_n - M)_+ &= (l_n(t, x) + h(x))u_n(t, x) \frac{u_n(t, x) - M}{u_n(t, x)} \\ &= l_n(t, x)u_n(t, x) \left(1 - \frac{M}{u_n(t, x)} \right) \\ &\quad + h(x)u_n(t, x) \left(1 - \frac{M}{u_n(t, x)} \right) \\ &\leq C - \alpha_2 |u_n(t, x)|^p + \|h\|_{\infty} |u_n(t, x)| \\ &\leq C - \alpha_2 |u_n(t, x)|^p + \frac{\alpha_2}{2} |u_n(t, x)|^p \\ &\quad + \left(\frac{2}{p\alpha_2} \right)^{\frac{1}{p-1}} \|h\|_{\infty}^{\frac{p}{p-1}} \leq 0 \end{aligned}$$

завдяки вибору M .

Отже, з (4) і нерівності Пуанкаре маємо

$$\exists \lambda > 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \|(u_n - M)_+(t)\|^2 \leq \|(u_n(0) - M)_+\|^2 e^{-\lambda t}. \quad (29)$$

З (29) при $t = t_n$ одержуємо, що якщо $\xi_n \rightarrow \xi$, то $\xi(x) \geq -M$ м.с. Повторюючи ці міркування для

$$(u_n + M)_- = \begin{cases} u_n + M, & u_n + M < 0, \\ 0 & \text{у протилежному випадку,} \end{cases}$$

одержуємо $\xi(x) \geq -M$ м.с.

Звідси з урахуванням (28) одержуємо обмеженість Θ у $L^\infty(\Omega)$.

Теорему 2 доведено.

Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів. Усі необхідні дані містяться в статті. Всі автори зробили рівномірний внесок у цю роботу. Роботу виконано за підтримки Національного фонду досліджень України, проєкт № 2023.03/0074 “Нескінченновимірні еволюційні рівняння із багатозначною та стохастичною динамікою”.

Література

1. V. Barbu, *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*, Noordhoff Int. Publ., Leiden (1976).
2. N. S. Papageorgiou, *Continuous dependence results for a class of evolution inclusions*, Proc. Edinb. Math. Soc. (2), **35**, 232 – 246 (1986).
3. Z. Denkowski, S. Mortola, *Asymptotic behavior of optimal solutions to control problems for systems described by differential inclusions corresponding to partial differential equations*, J. Optim. Theory Appl., **78**, 365 – 391 (1993).
4. V. S. Melnik, J. Valero, *On attractors of multivalued semi-flows and differential inclusions*, Set-Valued Anal., **6**, № 1, 83 – 111 (1998).
5. A. N. Carvalho, W. Cholewa, T. Dlotko, *Abstract parabolic problems in ordered Banach spaces*, Colloq. Math., **90**, № 1, 1 – 17 (2001).
6. A. Haraux, *Nonlinear evolution equations — global behavior of solutions*, Lecture Notes in Math., **841**, Springer-Verlag, Berlin, New York (2006).
7. P. O. Kasyanov, *Multivalued dynamics of solutions of an autonomous differential-operator inclusion with pseudomonotone nonlinearity*, Cybernet. Systems Anal., **647**, 800 – 811 (2011).
8. P. O. Kasyanov, L. Toscano, N. V. Zadoianchuk, *Long-time behaviour of solutions for autonomous evolution hemivariational inequality with multidimensional reaction-displacement law*, Abstr. Appl. Anal., Article 450984 (2012).
9. M. Z. Zgurovsky et al., *Evolution inclusions and variation inequalities for Earth data processing III: Long-time behavior of evolution inclusions solutions in Earth data analysis*, Springer (2012).
10. P. O. Kasyanov, L. Toscano, N. V. Zadoianchuk, *Regularity of weak solutions and their attractors for a parabolic feedback control problem*, Set-Valued Var. Anal., **21**, № 2, 271 – 282 (2013).
11. M. O. Gluzman, N. V. Gorban, P. O. Kasyanov, *Lyapunov type functions for classes of autonomous parabolic feedback control problems and applications*, Appl. Math. Lett., **39**, 19 – 21 (2015).
12. Т. В. Носенко, О. М. Станжицький, *Метод усереднення в деяких задачах оптимального керування*, Нелін. коливання, **11**, № 4, 512 – 519 (2008); **English translation:** Nonlinear Oscil. (N.Y.), **11**, № 4, 539 – 547 (2008).
13. O. V. Kapustyan, O. A. Kapustian, A. Ryzhov, V. Sobchuk, *Approximate optimal control for a parabolic system with perturbations in the coefficients on the half-axis*, Axioms, **11**, № 4, 175 (2022); DOI: <https://doi.org/10.3390/axioms11040175>.
14. M. O. Perestyuk, O. V. Kapustyan, *Long-time behavior of evolution inclusion with non-damped impulsive effects*, Mem. Differ. Equat. Math. Phys., **56**, 89 – 113 (2012).
15. S. Dashkovskiy, O. Kapustyan, I. Romaniuk, *Global attractors of impulsive parabolic inclusions*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, **22**, № 5, 1875 – 1886 (2017).
16. S. Dashkovskiy, O. A. Kapustian, O. V. Kapustyan, N. V. Gorban, *Attractors for multivalued impulsive systems: existence and applications to reaction-diffusion system*, Math. Probl. Engrg., **5**, 1 – 7 (2021); DOI: 10.1155/2021/7385450.
17. О. В. Капустян, О. В. Перегуда, Х. Валеро, *Якісна поведінка розв'язків випадково збуреного рівняння реакції-дифузії*, Нелін. коливання, **8**, № 2, 174 – 185 (2005); **English translation:** Nonlinear Oscil. (N.Y.), **8**, № 2, 172 – 183 (2005).
18. O. Misiats, O. Stanzhytskyi, N. K. Yip, *Invariant measures for stochastic reaction-diffusion equations with weakly dissipative nonlinearities*, Stochastics, **92**, № 8, 1197 – 1222 (2020).
19. A. Stanzhytsky, O. Misiats, O. Stanzhytskyi, *Invariant measure for neutral stochastic functional differential equations with non-Lipschitz coefficients*, Evol. Equat. Control Theory, **11**, № 6, 1929 – 1953 (2022).

20. P. Feketa, O. Kapustyan, O. Kapustian, I. Korol, *Global attractors of mild solutions semiflow for semilinear parabolic equation without uniqueness*, Appl. Math. Lett., **135**, Paper No. 108435 (2023).
21. O. Kapustyan, D. Bezushchak, O. Stanzhytskyi, I. Korol, *Global solutions and their limit behavior for parabolic inclusions with unbounded right-hand part*, Carpathian Math. Publ., **16**, № 2 (2024).
22. J. C. Robinson, *Infinite-dimensional dynamical systems. An introduction to dissipative parabolic PDEs and the theory of global attractors*, Cambridge University Press, Cambridge (2001).
23. J.-P. Aubin, H. Frankowska, *Set-valued analysis*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA (1990).
24. J. M. Ball, *Strongly continuous semigroups, weak solutions, and the variation of constants formula*, Proc. Amer. Math. Soc., **63**, 370–373 (1977).

Одержано 10.07.24