

ЗВ'ЯЗАНІ СИСТЕМИ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ РІККАТІ

Олег Іскра

*Інститут математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна
e-mail: oleg.iskra@imath.kiev.ua, відповідальний за листування*

Андрій Офіцеров

*Інститут прикладного та системного аналізу
Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”
Берестейський просп., 37, Київ, 03056, Україна
e-mail: andrej.ofitserov@gmail.com*

We obtain necessary and sufficient solvability conditions for the operator interconnected system of Riccati equations in the Hilbert space. Iterative algorithms for finding approximate solutions are constructed.

Отримано необхідні й достатні умови розв'язності операторної зв'язаної системи рівнянь Ріккаті у гільбертовому просторі. Побудовано ітераційні алгоритми для знаходження наближених розв'язків.

1. Вступ. Цю статтю присвячено дослідженню операторної системи зв'язаних рівнянь Ріккаті. Зауважимо, що здобуті результати узагальнюють добре відомі результати з [1–4] для випадку таких задач. Досліджуємо умови біфуркації та розгалуження розв'язків. Як відомо, такі рівняння використовують у теоріях оптимального керування, ігор, стійкості руху [5]. У згаданих роботах такі задачі досліджували як у критичному, так і в некритичному випадках, коли може порушуватись єдиність розв'язку, а задача може бути розв'язною не при всіх правих частинах. Такі задачі є некоректними за Адамаром. У цій роботі за допомогою теорії й методики, розроблених у роботах Бойчука [1, 2, 6–15] і його учнів, вдається дослідити зв'язану систему операторних рівнянь Ріккаті, що останнім часом є дуже актуальним напрямком у прикладних задачах і застосовується при дослідженні певних нейронних мереж (див. також роботи [16–19]). Основну методику може бути використано й у випадку задач із оператором, що має незамкнену множину значень [12, 13].

2. Постановка задачі. Розглянемо операторну систему зв'язаних рівнянь Ріккаті

$$A_{ii}X_i(\varepsilon) + X_i(\varepsilon)B_{ii} + \varepsilon \sum_{j=1, j \neq i}^n X_j(\varepsilon)C_{ij}X_j(\varepsilon) = D_i, \quad (1)$$

де $A_{ii}, B_{ii}, C_{ij}, D_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ — лінійні й обмежені оператори (матриці), що діють у просторі Гільберта $\mathcal{H}$. Знайдемо необхідні та достатні умови існування розв'язків $X_i(\varepsilon)$, які при $\varepsilon = 0$ перетворюються на один із розв'язків $X_i^0 = X_i(0)$ породжуючої системи

$$\mathbf{L}_i X_i^0 := A_{ii} X_i^0 + X_i^0 B_{ii} = D_i. \quad (2)$$

3. Лінійний випадок. Дослідимо спочатку лінійну задачу (2). Припустимо для простоти, що оператори $\mathbf{L}_i$ мають замкнену множину значень $R(\mathbf{L}_i) = \overline{R(\mathbf{L}_i)}$, тобто є нормально-розв'язними. При цьому, як відомо [12], задача (2) буде розв'язною тоді й лише тоді, коли виконуються такі умови розв'язності:

$$P_{N(\mathbf{L}_i^*)} D_i = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Тут $P_{N(\mathbf{L}_i^*)} = I - \mathbf{L}_i \mathbf{L}_i^+$ — проєктори на коядро операторів $\mathbf{L}_i$, тому множина розв'язків (2) має вигляд

$$X_i^0 = \mathbf{L}_i^+ D_i + P_{N(\mathbf{L}_i)} H_i, \quad H_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad (4)$$

де $\mathbf{L}_i^+$ псевдообернені за Муром–Пенроузом до операторів $\mathbf{L}_i$ і $P_{N(\mathbf{L}_i)}$ — проєктори на відповідні ядра операторів $\mathbf{L}_i$ [14].

Таким чином, отримуємо таке допоміжне твердження.

Лема. Система (2) розв'язна тоді й лише тоді, коли виконуються умови (3). За виконання умов (3) множина розв'язків системи (2) має вигляд (4).

4. Нелінійний випадок. Знайдемо необхідну умову існування розв'язку (1). Для цього перепишемо систему (1) у вигляді

$$\mathbf{L}_i X_i(\varepsilon) = -\varepsilon \sum_{j=1, j \neq i}^n X_j(\varepsilon) C_{ij} X_j(\varepsilon) + D_i. \quad (5)$$

Розглядатимемо праву частину (5) як неоднорідність. Тоді необхідна й достатня умова розв'язності набуває вигляду

$$-\varepsilon \sum_{j=1, j \neq i}^n P_{N(\mathbf{L}_i)^*} X_j(\varepsilon) C_{ij} X_j(\varepsilon) + P_{N(\mathbf{L}_i^*)} D_i = 0. \quad (6)$$

Оскільки виконується умова (3), то після ділення на ε і переходу до межі при $\varepsilon \rightarrow 0$, одержуємо

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n P_{N(\mathbf{L}_i^*)} X_j^0 C_{ij} X_j^0 = 0. \quad (7)$$

Підставляючи рівність (4), маємо систему рівнянь щодо операторів H_i :

$$F_i(H_1, H_2, \dots, H_n) = \sum_{j=1, j \neq i}^n P_{N(\mathbf{L}_i^*)} (L_j^+ D_j + P_{N(\mathbf{L}_j)} H_j) C_{ij} (L_j^+ D_j + P_{N(\mathbf{L}_j)} H_j) = 0. \quad (8)$$

Таким чином, отримуємо необхідну умову існування розв'язків нелінійної операторної системи зв'язаних рівнянь Ріккати.

Теорема 1 (необхідна умова існування). Нехай система (5) має розв'язок $X_i(\varepsilon)$, який перетворюється на один із розв'язків $X_i(0) = X_i^0$ лінійної породжуючої системи (2) з операторами $H_i = H_i^0$. Тоді ці оператори задовольняють нелінійну операторну систему для породжуючих операторів (8).

Для отримання достатньої умови зробимо заміну змінних

$$X_i(\varepsilon) = Y_i(\varepsilon) + X_i^0. \quad (9)$$

Після неї отримуємо задачу

$$\mathbf{L}_i Y_i(\varepsilon) = -\varepsilon \sum_{j=1, j \neq i}^n (Y_j(\varepsilon) + X_j^0) C_{ij} (Y_j(\varepsilon) + X_j^0).$$

Вона буде розв'язною тоді й лише тоді, коли виконуються умови розв'язності

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n P_{N(\mathbf{L}_i^*)} (Y_j(\varepsilon) + X_j^0) C_{ij} (Y_j(\varepsilon) + X_j^0) = 0. \quad (10)$$

При їхньому виконанні множина розв'язків нелінійної операторної системи має такий вигляд:

$$Y_i(\varepsilon) = \bar{Y}_i(\varepsilon) + P_{N(\mathbf{L}_i)} \bar{H}_i(\varepsilon), \quad \bar{H}_i(\varepsilon) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad (11)$$

де

$$\bar{Y}_i(\varepsilon) = -\varepsilon \sum_{j=1, j \neq i}^n \mathbf{L}_i^+ (Y_j(\varepsilon) + X_j^0) C_{ij} (Y_j(\varepsilon) + X_j^0). \quad (12)$$

Підставляючи вираз (11) в умови розв'язності (10), отримуємо таку операторну систему щодо операторів $\bar{H}_1(\varepsilon), \bar{H}_2(\varepsilon), \dots, \bar{H}_n(\varepsilon)$ (у такому вигляді її можна зобразити):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1, j \neq i}^n B_0^{ij} \bar{H}_j(\varepsilon) = & - \sum_{j=1, j \neq i}^n P_{N(\mathbf{L}_i^*)} Y_j(\varepsilon) C_{ij} Y_j(\varepsilon) \\ & - \sum_{j=1, j \neq j}^n P_{N(\mathbf{L}_i^*)} \ell_i(\bar{Y}_1(\varepsilon), \bar{Y}_2(\varepsilon), \dots, \bar{Y}_{i-1}(\varepsilon), \bar{Y}_{i+1}(\varepsilon), \dots, \bar{Y}_n(\varepsilon)), \end{aligned} \quad (13)$$

де

$$\begin{aligned} B_0^{ij} \bar{H}_j(\varepsilon) &:= P_{N(\mathbf{L}_i^*)} P_{N(\mathbf{L}_j)} \bar{H}_j(\varepsilon) C_{ij} X_j^0 + P_{N(\mathbf{L}_i^*)} X_j^0 C_{ij} P_{N(\mathbf{L}_j)} \bar{H}_j(\varepsilon), \\ \ell_i(\bar{Y}_1(\varepsilon), \bar{Y}_2(\varepsilon), \dots, \bar{Y}_{i-1}(\varepsilon), \bar{Y}_{i+1}(\varepsilon), \dots, \bar{Y}_n(\varepsilon)) &:= \sum_{j=1, j \neq i}^n \left(P_{N(\mathbf{L}_i^*)} \bar{Y}_j(\varepsilon) C_{ij} X_j^0 + P_{N(\mathbf{L}_i^*)} X_j^0 C_{ij} \bar{Y}_j(\varepsilon) \right). \end{aligned}$$

Цю систему можемо переписати у вигляді

$$B_0 \begin{pmatrix} \bar{H}_1(\varepsilon) \\ \bar{H}_2(\varepsilon) \\ \dots \\ \bar{H}_n(\varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{N(\mathbf{L}_1^*)} \sum_{j=1, j \neq 1}^n (\bar{Y}_j(\varepsilon) C_{1j} X_j^0 + X_j^0 C_{1j} \bar{Y}_j(\varepsilon)) \\ P_{N(\mathbf{L}_2^*)} \sum_{j=1, j \neq 2}^n (\bar{Y}_j(\varepsilon) C_{2j} X_j^0 + X_j^0 C_{2j} \bar{Y}_j(\varepsilon)) \\ \dots \\ P_{N(\mathbf{L}_n^*)} \sum_{j=1, j \neq n}^n (\bar{Y}_j(\varepsilon) C_{nj} X_j^0 + X_j^0 C_{nj} \bar{Y}_j(\varepsilon)) \end{pmatrix}, \quad (14)$$

де операторна матриця B_0 має вигляд

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & B_0^{12} & B_0^{13} & \dots & B_0^{1n} \\ B_0^{21} & 0 & B_0^{23} & \dots & B_0^{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_0^{n1} & B_0^{n2} & \dots & B_0^{nn-1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Достатньою умовою розв'язності системи (14) із операторною матрицею (15) є умова

$$P_{N(B_0^*)} \begin{bmatrix} P_{N(\mathbf{L}_1^*)} \\ P_{N(\mathbf{L}_2^*)} \\ \dots \\ P_{N(\mathbf{L}_n^*)} \end{bmatrix} = 0. \quad (16)$$

За виконання умови (16) один із розв'язків системи (14) набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} \bar{H}_1(\varepsilon) \\ \bar{H}_2(\varepsilon) \\ \dots \\ \bar{H}_n(\varepsilon) \end{pmatrix} = B_0^+ \begin{pmatrix} P_{N(\mathbf{L}_1^*)} \sum_{j=1, j \neq 1}^n (\bar{Y}_j(\varepsilon) C_{1j} X_j^0 + X_j^0 C_{1j} \bar{Y}_j(\varepsilon)) \\ P_{N(\mathbf{L}_2^*)} \sum_{j=1, j \neq 2}^n (\bar{Y}_j(\varepsilon) C_{2j} X_j^0 + X_j^0 C_{2j} \bar{Y}_j(\varepsilon)) \\ \dots \\ P_{N(\mathbf{L}_n^*)} \sum_{j=1, j \neq n}^n (\bar{Y}_j(\varepsilon) C_{nj} X_j^0 + X_j^0 C_{nj} \bar{Y}_j(\varepsilon)) \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Використовуючи методику, запропоновану у роботах [12, 13], одержуємо достатню умову розв'язності операторної системи (16) і відповідний ітераційний алгоритм побудови наближеного розв'язку.

Теорема 2 (достатня умова існування). *За виконання умови (16) і необхідної умови (8) нелінійна операторна система зв'язаних рівнянь Ріккати (1) має принаймні один розв'язок. Цей розв'язок може бути знайдений за допомогою ітераційної процедури*

$$\bar{Y}_i^{k+1}(\varepsilon) = -\varepsilon \sum_{j=1, j \neq i}^n \mathbf{L}_i^+ \left(Y_j^k(\varepsilon) + X_j^0 \right) C_{ij} \left(Y_j^k(\varepsilon) + X_j^0 \right), \quad (18)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{H}_1^k(\varepsilon) \\ \bar{H}_2^k(\varepsilon) \\ \dots \\ \bar{H}_n^k(\varepsilon) \end{pmatrix} = B_0^+ \begin{pmatrix} P_{N(\mathbf{L}_1^*)} \sum_{j=1, j \neq 1}^n \left(\bar{Y}_j^k(\varepsilon) C_{1j} X_j^0 + X_j^0 C_{1j} \bar{Y}_j^k(\varepsilon) \right) \\ P_{N(\mathbf{L}_2^*)} \sum_{j=1, j \neq 2}^n \left(\bar{Y}_j^k(\varepsilon) C_{2j} X_j^0 + X_j^0 C_{2j} \bar{Y}_j^k(\varepsilon) \right) \\ \dots \\ P_{N(\mathbf{L}_n^*)} \sum_{j=1, j \neq n}^n \left(\bar{Y}_j^k(\varepsilon) C_{nj} X_j^0 + X_j^0 C_{nj} \bar{Y}_j^k(\varepsilon) \right) \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$Y_i^{k+1}(\varepsilon) = \bar{Y}_i^{k+1}(\varepsilon) + P_{N(\mathbf{L}_i)} \bar{H}_i^k(\varepsilon), \quad k = \overline{0, \infty}, \quad (20)$$

$$Y_i(\varepsilon) = \bar{Y}_i(\varepsilon) + P_{N(\mathbf{L}_i)} \bar{H}_i(\varepsilon), \quad \bar{H}_i(\varepsilon) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Область збіжності оцінюється як і в [14, 20].

5. Висновки. Запропонована у цій статті методика дозволяє досліджувати зв'язані системи операторних рівнянь Ріккати. При цьому слід відзначити відому монографію [3]. Зауважимо, що за допомогою теорії, розробленої у роботах [12, 13], можна досліджувати ці задачі й у випадку, коли оператори L_i мають незамкнену множину значень. Більш того, до розглянутих задач можна додати ще й додаткові умови (як крайові для операторно-диференціальних рівнянь). За допомогою таких систем можна моделювати різні класи нейронних мереж (див., наприклад, [21 – 23], де відповідне рівняння застосовано при дослідженні теорем про неявні функції для рівнянь параболічного та еліптичного типу).

Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів. Усі необхідні дані містяться в статті. Всі автори зробили рівномірний внесок у цю роботу, а також заявляють про відсутність спеціального фінансування для її виконання.

Література

1. A. A. Boichuk, S. A. Krivosheya, *A critical periodic boundary-value problem for a matrix Riccati equation*, Differ. Equat., **37**, № 4, 464 – 471 (2001).
2. О. А. Бойчук, С. А. Кривошея, *Критерій розв'язності матричних рівнянь типу Ляпунова*, Укр. мат. журн., **50**, № 8, 1021 – 1026 (1998); **English translation:** Ukr. Math. J., **50**, No 8, 1162 – 1169 (1998).
3. P. Lancaster, L. Rodman, *Algebraic Riccati equations*, Clarendon Press, Oxford (1995).
4. O. Boichuk, S. Krivosheya, *A critical periodic boundary value problem for a matrix Riccati equation*, Differ. equat., **37**, № 4, 464 – 471 (2001).
5. A. E. Bryson (Jr.), Yu-Chi Ho, *Applied optimal control: optimization, estimation and control*, Taylor Francis Group, New York (1975).
6. А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко, *Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи*, Ін-т математики НАН України, Київ (1995).
7. І. А. Бондар, *Лінійні крайові задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь з виродженням ядром. Резонансний випадок для слабо збуреної крайової задачі*, Нелін. коливання, **25**, № 2-3, 174 – 183 (2022); **English translation:** J. Math. Sci. (N.Y.), **274**, № 6, 822 – 832 (2023); DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06645-1>.
8. Є. В. Панасенко, О. О. Покутний, *Крайові задачі для диференціальних рівнянь у банаховому просторі з необмеженим оператором у лінійній частині*, Нелін. коливання, **16**, № 4, 518 – 526 (2013); **English translation:** J. Math. Sci. (N.Y.), **203**, № 3, 366 – 374 (2014).
9. О. А. Покутний, *Узагальнено-обернений оператор в просторах Фреше, Банаха та Гільберта*, Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки, № 4, 158 – 161 (2013).
10. О. Бойчук, Є. Панасенко, О. Покутний, *Крайові задачі для рівняння Ляпунова. I*, Укр. мат. журн., **76**, № 3, 353 – 372 (2024); **English translation:** Ukr. Math. J., **76**, № 3, 393 – 415 (2024).
11. О. Бойчук, Є. Панасенко, О. Покутний, *Крайові задачі для рівняння Ляпунова. II*, Укр. мат. журн., **76**, № 5, 680 – 694 (2024).
12. О. Бойчук, О. Покутний, *Нормально-розв'язні крайові задачі для операторно-диференціальних рівнянь*, Наукова думка, Київ (2022); DOI: <https://doi.org/10.37863/2843457491-61>.
13. О. Бойчук, О. Покутний, *Теория возмущений операторных уравнений в пространствах Фреше и Гильберта*, Укр. мат. журн., **67**, № 9, 1181 – 1188 (2015); **English translation:** Ukr. Math. J., № 9, 1327 – 1335 (2016); DOI: [10.1007/s11253-016-1156-y](https://doi.org/10.1007/s11253-016-1156-y).
14. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm foundary-value problems*, Walter de Gruyter, Berlin (2016).
15. С. М. Чуйко, *Про розв'язання матричних рівнянь Ляпунова*, Вісн. Харк. нац. ун-ту ім. В. Н. Каразіна. Сер. Математика, прикл. математика і механіка, № 1120, 85 – 94 (2014).

16. R. Datko, *Extending a theorem of A. M. Lyapunov to Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl., **32**, 610–616 (1970).
17. V. Druskin, L. Knizhnerman, V. Simoncini, *Analysis of the rational Krylov subspace and ADI methods for solving the Lyapunov equation*, SIAM J. Numer. Anal., **49**, № 5, 1875–1898 (2011).
18. T. E. Duncana, B. Maslowski, B. Pasik-Duncana, *Stochastic equations in Hilbert space with a multiplicative fractional Gaussian noise*, Stochastic Process. Appl., **115**, 1357–1383 (2005).
19. I. G. Rosen, C. Wang, *A multilevel technique for the approximate solution of operator Lyapunov and algebraic Riccati equations*, SIAM J. Numer. Anal., **32**, № 2, 514–541 (1995).
20. О. Б. Лыкова, А. А. Бойчук, *Построение периодических решений нелинейных систем в критических случаях*, Укр. мат. журн., **40**, № 1, 62–69 (1988); **English translation:** Ukr. Math. J., **40**, 51–58 (1988).
21. O. Boichuk, O. Pokutnyi, V. Feruk, D. Bihun, *Minimizing of the quadratic functional on Hopfield networks*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equat., **92**, 1–20 (2021); DOI: 10.14232/ejqtde.2021.1.92.
22. H. Harbrecht, M. Schmidlin, C. Schwab, *The Gevrey class implicit mapping theorem with application to UQ of semilinear elliptic PDEs*, ArXiv:2310.01256 (2023).
23. H. Harbrecht, I. Kalmykov, *Sparse grid approximation of the Riccati operator for closed loop parabolic control problems with Dirichlet boundary control*, SIAM J. Control Optim., **59**, № 6, 4538–4562 (2021).

Одержано 04.07.24,
після доопрацювання — 09.09.24, 21.09.24