

ПОШИРЕННЯ ПРУЖНИХ ХВИЛЬ У НЕСКІНЧЕННОМУ ШАРІ ПРИ ДІЇ МИТТЄВОГО ЗОСЕРЕДЖЕНОГО ВЕРТИКАЛЬНОГО СИЛОВОГО УДАРУ НА ЙОГО ПОВЕРХНІ

Ольга Бойчук

*Інститут електрозварювання імені Є. О. Патона НАН України
вул. Казимира Малевича, 11, Київ, 03150, Україна
e-mail: olga-boichuk@i.ua*

An analytical method for solving the dynamic spatial problem of the propagation of elastic waves in an infinite layer with an instantaneous concentrated vertical force shock Q on its surface is proposed, which is reduced to the solution of a system of two ordinary linear differential equations of second order.

Запропоновано аналітичний метод розв'язання динамічної просторової задачі поширення пружних хвиль у нескінченному шарі при миттєвому зосередженому вертикальному силовому ударі Q на його поверхню, що зводиться до розв'язку системи двох звичайних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку.

1. Вступ. Розвиток аналітичних методів вивчення закономірностей поширення пружних хвиль у тілі за наявності джерел деформації (наприклад, удар) без просторової ідеалізації об'єкта становить значний інтерес у зв'язку з проблемою розшифрування сигналів акустичної емісії, оскільки вона пов'язана з розв'язком просторової задачі динамічної теорії пружності та властивостями отриманих нестационарних хвильових полів. У зв'язку з цим виникла необхідність отримати фундаментальний розв'язок осесиметричної задачі для шару при миттєвому вертикальному ударі на його поверхні. У цьому випадку можна розглядати шар як приймач акустичних сигналів і знайти умови резонансу в потрібному частотному діапазоні. Таким чином, у цій статті вперше запропоновано аналітичний метод розв'язання динамічної просторової задачі поширення пружних хвиль у нескінченному шарі при миттєвому зосередженому вертикальному силовому ударі Q на його поверхню, що зводиться до розв'язку системи двох звичайних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку.

2. Постановка задачі. Розглянемо пружний шар товщини $2h$, де в точці однієї з його поверхонь відбувся миттєвий зосереджений силовий удар Q . Тобто дія масових сил $\mathbf{X}$ на шар обмежується лише дією вертикальної сили $\mathbf{X} \equiv (0, 0, X_z)$ (рис. 1).

Оскільки такий зовнішній вплив на шар можна розглядати як осесиметричний, то задачу про знаходження векторного поля $\vec{U} = (U_r, U_z)$ переміщень частинок шару розглядаємо як осесиметричну і розв'язок задачі будемо в циліндричній системі координат $O(r, z)$ із початком у серединній площині шару.

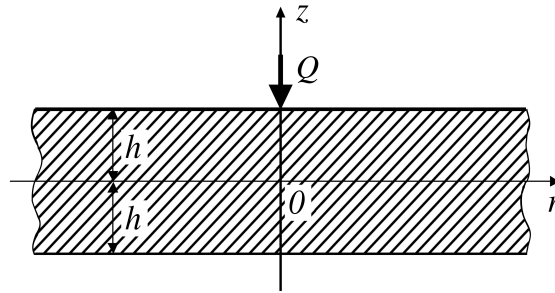


Рис. 1

З огляду на [1] однозначне й неперервне векторне поле переміщень частинок шару $\vec{U}(r, z, t)$ зобразимо у вигляді суми градієнта скалярного потенціалу $\varphi = \varphi(r, z, t)$ і ротора векторного потенціалу $\psi = \psi(r, z, t)$, де векторне поле $\vec{U}(U_r, U_z)$ є однозначним і неперервним [2]:

$$\begin{aligned} U_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z}, \\ U_z &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Як наслідок рівняння рівноваги Ламе [1] згідно з (1) матимуть вигляд системи двох рівнянь із частинними похідними, яка характеризує рух частинок шару:

$$\begin{aligned} \left(\nabla^2 - \frac{1}{S_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi &= 0, \\ \left(\nabla^2 - \frac{1}{S_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

де

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

S_1 — швидкість розповсюдження поздовжньої хвилі вздовж осі $0r$, S_2 — швидкість розповсюдження поперечної хвилі вздовж осі $0z$,

$$S_1 = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}, \quad S_2 = \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho}},$$

ρ — щільність матеріалу шару, ν — коефіцієнт Пуассона, E — модуль пружності, миттєве вертикальне навантаження масової сили X_z має вигляд

$$X_z = -Q \frac{\delta(r)}{\pi r} \delta(z-h) \delta(t),$$

δ — функція Дірака.

Систему рівнянь (2) будемо розв'язувати за таких умов.

Граничні умови на поверхнях шару $z = \pm h$ з урахуванням миттєвого вертикального навантаження сили Q мають такий вигляд [1]:

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} &= -2G \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{1}{2S_2^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right] \\ &= -Q \frac{\delta(r)}{\pi r} \delta(z-h) \delta(t), \quad z = h, \\ \sigma_{zz} &= -2G \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{1}{2S_2^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right] = 0, \quad z = -h, \\ \sigma_{rz} &= G \frac{\partial}{\partial r} \left(2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 0, \quad z = \pm h.\end{aligned}\quad (3)$$

Початкові умови. У початковий момент часу t тіло перебуває у ненавантаженому стані:

$$U_r = U_z = \frac{\partial U_r}{\partial t} = \frac{\partial U_z}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad (4)$$

де навантаження відбувається у момент часу $t = 0_+$.

Таким чином, ми маємо можливість застосувати до (1) і граничних умов (3) перетворення Лапласа, тобто

$$\begin{aligned}\bar{U}_{z,r} &= \int_0^\infty U_{z,r} e^{-pt} dt, & \bar{\varphi} &= \int_0^\infty \varphi e^{-pt} dt, & \bar{\psi} &= \int_0^\infty \psi e^{-pt} dt, \\ \bar{\sigma}_{zz} &= \int_0^\infty \sigma_{zz} e^{-pt} dt, & \bar{\sigma}_{rz} &= \int_0^\infty \sigma_{rz} e^{-pt} dt.\end{aligned}$$

Унаслідок система (2) має вигляд

$$\begin{cases} \nabla_1^2 \bar{\varphi} = 0, \\ \nabla_2^2 \bar{\psi} = 0, \end{cases} \quad (5)$$

де $\nabla_{1,2}^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{p^2}{S_{1,2}}$ — оператори д'Аламбера.

Граничні умови для зображень за Лапласом системи (5) при $z = \pm h$ набувають такого вигляду:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{zz}(h) &= -Q \frac{\delta(r)}{\pi r}, \\ \bar{\sigma}_{zz}(-h) &= 0, \\ \bar{\tau}_{rz}(h) &= 0, \\ \bar{\tau}_{rz}(-h) &= 0.\end{aligned}\quad (6)$$

Розв'язок для зображень за Лапласом $\bar{\psi}$, $\bar{\varphi}$ системи (5) можна шукати у вигляді інтегралів Ганкеля, оскільки шар нескінченних розмірів по r , тобто

$$\bar{\varphi} = \int_0^{\infty} \alpha J_0(\alpha r) f d\alpha,$$

$$\bar{\psi} = \int_0^{\infty} \alpha J_0(\alpha r) \chi d\alpha,$$

де

$$f = f(z, \alpha, p),$$

$$\chi = \chi(z, \alpha, p),$$

$$\frac{\delta(r)}{r} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \alpha J_0(\alpha r) d\alpha.$$

Як наслідок отримуємо зображення за Лапласом компонент вектора переміщень (1) у вигляді

$$\bar{U}_r = - \int_0^{\infty} \alpha^2 J_1(\alpha r) \left(f + \frac{\partial \chi}{\partial z} \right) d\alpha, \quad (7)$$

$$\bar{U}_z = \int_0^{\infty} \alpha J_0(\alpha r) \left(\frac{df}{dz} + \alpha^2 \chi \right) d\alpha,$$

де J_0 , J_1 — функції Бесселя нульового та першого порядку.

Далі система рівнянь із частинними похідними (5) завдяки (7) набуває вигляду системи лінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{dz^2} - \left(\alpha^2 + \frac{p^2}{S_1^2} \right) f &= 0, \\ \frac{d^2 \chi}{dz^2} - \left(\alpha^2 + \frac{p^2}{S_2^2} \right) \chi &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Оскільки відомо, що загальний розв'язок f , χ системи (8) шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned} f &= C_1 \operatorname{ch} b_1 z + C_2 \operatorname{sh} b_1 z, \\ \chi &= C_3 \operatorname{ch} b_2 z + C_4 \operatorname{sh} b_2 z, \end{aligned} \quad (9)$$

ТО МАЄМО

$$\begin{aligned}\frac{df}{dz} &= C_1 b_1 \operatorname{sh} b_1 z + C_2 b_1 \operatorname{ch} b_1 z, \\ \frac{d^2 f}{dz^2} &= C_1 b_1^2 \operatorname{ch} b_1 z + C_2 b_1^2 \operatorname{sh} b_1 z, \\ \frac{d\chi}{dz} &= C_3 b_2 \operatorname{sh} b_2 z + C_4 b_2 \operatorname{ch} b_2 z, \\ \frac{d^2 \chi}{dz^2} &= C_3 b_2^2 \operatorname{ch} b_2 z + C_4 b_2^2 \operatorname{sh} b_2 z,\end{aligned}\tag{10}$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 — невідомі сталі,

$$b_1 = \sqrt{\alpha^2 + \frac{p^2}{S_1^2}}, \quad b_2 = \sqrt{\alpha^2 + \frac{p^2}{S_2^2}}.$$

Таким чином, розв'язок системи диференціальних рівнянь (8) з граничними умовами (6) згідно з (9), (10) зводиться до розв'язку неоднорідної лінійної системи чотирьох алгебраїчних рівнянь щодо невідомих сталих C_1, C_2, C_3, C_4 :

$$\begin{cases} \left(\alpha^2 + \frac{1}{2} b_2^2\right) f + \alpha^2 \frac{d\chi}{dz} = -\frac{Q}{2\pi}, & z = h, \\ \left(\alpha^2 + \frac{1}{2} b_2^2\right) f + \alpha^2 \frac{d\chi}{dz} = 0, & z = -h, \\ 2 \frac{df}{dz} + \frac{d^2 \chi}{dz^2} + \alpha^2 \chi = 0, & z = h, \\ 2 \frac{df}{dz} + \frac{d^2 \chi}{dz^2} + \alpha^2 \chi = 0, & z = -h. \end{cases}\tag{11}$$

Для спрощення розв'язку алгебраїчної системи (11) розбиваємо нашу задачу на дві частини: симетричну та косиметричну [2]. Для цього робимо заміну

$$\delta(z - h) = \frac{1}{2} [\delta(z - h) - \delta(z + h)] + \frac{1}{2} [\delta(z - h) + \delta(z + h)].$$

Завдяки цьому розв'язок системи (8) набуває вигляду

$$\begin{aligned}f &= f^c + f^k, \\ \chi &= \chi^c + \chi^k.\end{aligned}\tag{12}$$

3. Симетричний випадок. Симетрична задача відповідає випадку товщинних коливань шару, де переміщення $\bar{U}_r^c$ є парною функцією координати z , тобто функції $\bar{\sigma}_{zz}^c, f^c$ є парними, а функції $\bar{U}_z^c, \bar{\sigma}_{rz}^c, \chi^c$ — непарними функціями координати z . Як наслідок у (11) $C_1 = C_4 = 0$, і тому за виконання цих умов симетрії систему (8) можна записати так:

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^2}{dz^2} - b_1^2\right) f^c &= 0, \\ \left(\frac{d^2}{dz^2} - b_2^2\right) \chi^c &= 0,\end{aligned}\tag{13}$$

де розв'язок системи (13) записуємо у вигляді

$$\begin{cases} f^c = C_2 \operatorname{ch} b_1 z, \\ \chi^c = C_3 \operatorname{sh} b_2 z \end{cases} \quad (14)$$

і виконуються співвідношення

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{zz}^c(h) = \bar{\sigma}_{zz}^c(-h), \\ \bar{\sigma}_{rz}^c(h) = -\bar{\sigma}_{rz}^c(-h). \end{cases} \quad (15)$$

У цьому випадку система нелінійних алгебраїчних рівнянь (11) завдяки (14) і (15) буде мати такий вигляд:

$$\begin{aligned} C_2 \left(\alpha^2 + \frac{p^2}{2S_2^2} \right) \operatorname{ch} b_1 h + C_3 \alpha^2 b_2 \operatorname{ch} b_2 h &= -\frac{Q}{4\pi}, \\ C_2 2b_1 \operatorname{sh} b_1 h + C_3 (b_2^2 + \alpha^2) \operatorname{sh} b_2 h &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Розв'язок системи (16) отримати нескладно:

$$C_2 = \frac{\Delta_2^c}{\Delta^c}, \quad C_3 = \frac{\Delta_3^c}{\Delta^c},$$

де

$$\begin{aligned} \Delta_2^c &= -\frac{Q}{4\pi} (b_2^2 + \alpha^2) \operatorname{sh} b_2 h, \\ \Delta_3^c &= \frac{Q}{2\pi} b_1 \operatorname{sh} b_1 h, \\ \Delta^c &= \left(\alpha^2 + \frac{p^2}{2S_2^2} \right) (b_2^2 + \alpha^2) \operatorname{ch} b_1 h \operatorname{sh} b_2 h - 2b_1 b_2 \alpha^2 \operatorname{sh} b_1 h \operatorname{ch} b_2 h, \end{aligned}$$

звідки

$$f^c = \frac{\Delta_2^c}{\Delta^c} \operatorname{ch} b_1 z, \quad \chi^c = \frac{\Delta_3^c}{\Delta^c} \operatorname{sh} b_2 z. \quad (17)$$

Отже, згідно з (7) і (17) зображення за Лапласом симетричних переміщень матимуть такий вигляд:

$$\begin{aligned} \bar{U}_r^c &= - \int_0^\infty \alpha^2 J_1(\alpha r) \frac{F_1}{\Delta^c} d\alpha, \quad \text{де} \quad F_1 = \Delta_2^c \operatorname{ch} b_1 z + \Delta_3^c b_2 \operatorname{ch} b_2 z, \\ \bar{U}_z^c &= \int_0^\infty \alpha J_0(\alpha r) \frac{L_1}{\Delta^c} d\alpha, \quad \text{де} \quad L_1 = \Delta_2^c b_1 \operatorname{sh} b_1 z + \alpha^2 \Delta_3^c \operatorname{sh} b_2 z. \end{aligned}$$

4. Кососиметричний випадок. Кососиметрична задача відповідає випадку згинальних коливань шару, де переміщення $\bar{U}_r^k$ є непарною функцією координати z , тобто функції $\bar{\sigma}_{zz}$, f^k є непарними, а переміщення $\bar{U}_z^k$ — парною функцією координати z , а отже, функції $\bar{\sigma}_{rz}^k$, χ^k теж парні. Тому в (10) $C_2 = C_3 = 0$.

Таким чином, за виконання умов кососиметрії система (8) має вигляд

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dz^2} - b_1^2 \right) f^k &= 0, \\ \left(\frac{d^2}{dz^2} - b_2^2 \right) \chi^k &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$

її загальний розв'язок можна знайти у вигляді

$$\begin{aligned} f^k &= C_1 \operatorname{sh} b_1 z, \\ \chi^k &= C_4 \operatorname{ch} b_2 z \end{aligned} \quad (19)$$

і виконано співвідношення

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{zz}^k(h) &= -\bar{\sigma}_{zz}^k(-h), \\ \bar{\sigma}_{rz}^k(h) &= \bar{\sigma}_{rz}^k(-h), \end{aligned} \quad (20)$$

де граничні умови згідно з (19) і (20) матимуть вигляд такої нелінійної алгебраїчної системи другого порядку:

$$\begin{aligned} C_1 \left(\alpha^2 + \frac{p^2}{2S_2^2} \right) \operatorname{sh} b_1 h + C_4 \alpha^2 b_2 \operatorname{sh} b_2 h &= -\frac{Q}{4\pi}, \\ C_1 2b_1 \operatorname{ch} b_1 h + C_4 (b_2^2 + \alpha^2) \operatorname{ch} b_2 h &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Розв'язок системи (21) знайти нескладно. Він має вигляд

$$C_1 = \frac{\Delta_1^k}{\Delta^k}, \quad C_4 = \frac{\Delta_4^k}{\Delta^k},$$

де

$$\begin{aligned} \Delta_1^k &= \frac{Q}{4\pi} (b_2^2 + \alpha^2) \operatorname{ch} b_2 h, \\ \Delta_3^k &= -\frac{Q}{4\pi} 2b_1 \operatorname{ch} b_1 h, \\ \Delta^k &= \left(\alpha^2 + \frac{p^2}{2S_2^2} \right) (b_2^2 + \alpha^2) \operatorname{sh} b_1 h \operatorname{ch} b_2 h - 2b_1 b_2 \alpha^2 \operatorname{ch} b_1 h \operatorname{sh} b_2 h. \end{aligned}$$

При виконанні співвідношень (7) і (19) зображення за Лапласом переміщень для кососиметричного випадку можна навести у вигляді

$$\bar{U}_r^k = - \int_0^\infty \alpha^2 J_1(\alpha r) \frac{F_2}{\Delta^k} d\alpha, \quad \text{де} \quad F_2 = \Delta_1^k \operatorname{sh} b_1 z + \Delta_4^k b_2 \operatorname{sh} b_2 z,$$

$$\bar{U}_z^k = \int_0^\infty \alpha J_0(\alpha r) \frac{L_2}{\Delta^k} d\alpha, \quad \text{де} \quad L_2 = \Delta_1^k b_1 \operatorname{ch} b_1 z + \alpha^2 \Delta_4^k \operatorname{ch} b_2 z.$$

Отже, підсумовуючи результати, отримуємо зображення за Лапласом компонент вектора переміщень:

$$\begin{aligned} \bar{U}_r &= \bar{U}_r^C + \bar{U}_r^k = - \int_0^\infty \alpha^2 J_1(\alpha r) \left(\frac{F_1}{\Delta^c} + \frac{F_2}{\Delta^k} \right) d\alpha, \\ \bar{U}_z &= \bar{U}_z^C + \bar{U}_z^k = \int_0^\infty \alpha J_0(\alpha r) \left(\frac{L_1}{\Delta^c} + \frac{L_2}{\Delta^k} \right) d\alpha. \end{aligned} \quad (22)$$

Тепер знайдемо оригінали зображень Лапласа для переміщень (22). Нехай визначник системи (16) має вигляд $\Delta^c = 0$, тобто

$$\left(\alpha^2 + \frac{p^2}{2S_2^2} \right) (b_2^2 + \alpha^2) \operatorname{ch} b_1 h \operatorname{sh} b_2 h - 2b_1 b_2 \alpha^2 \operatorname{sh} b_1 h \operatorname{ch} b_2 h = 0. \quad (23)$$

З числовим аналізом розв'язку рівнянь $\Delta^c = 0$, $\Delta^k = 0$ можна ознайомитися в роботах [3, 4].

Позначимо через p_n^c , $n = 1, 2, 3, \dots$, усі корені рівняння (23). Вони будуть простими комплексно-спряженими полюсами функцій $\bar{U}_r^c$, $\bar{U}_z^c$, оскільки $\frac{d\Delta^c}{dp} \neq 0$ при $p = p_n^c$ [5].

Нехай визначник системи (16) має вигляд $\Delta^k = 0$, тобто

$$\left(\alpha^2 + \frac{p^2}{2S_2^2} \right) (b_2^2 + \alpha^2) \operatorname{sh} b_1 h \operatorname{ch} b_2 h - 2b_1 b_2 \alpha^2 \operatorname{ch} b_1 h \operatorname{sh} b_2 h = 0. \quad (24)$$

Позначимо через p_n^k , $n = 1, 2, 3, \dots$, усі корені рівняння (24). Вони будуть простими комплексно-спряженими полюсами функцій $\bar{U}_r^k$, $\bar{U}_z^k$, оскільки $\frac{d\Delta^k}{dp} \neq 0$ при $p = p_n^k$ [5].

Таким чином, функції $\frac{F_1}{\Delta^c}$, $\frac{F_2}{\Delta^k}$, $\frac{L_1}{\Delta^c}$, $\frac{L_2}{\Delta^k}$ мають прості комплексно-спряжені полюси

$$p_n^c = \beta_n^c \pm i\zeta_n^c, \quad p_n^k = \beta_n^k \pm i\zeta_n^k,$$

тому лишки згаданих функцій у цих полюсах і оригінали зображень (22) будуть дійсними функціями [5].

Отже, тепер ми маємо можливість за допомогою формул обернення [5] отримати розв'язок задачі в явному вигляді:

$$\begin{aligned} U_r(r, z, t) &= - \int_0^\infty \alpha^2 J_1(\alpha r) \sum_{n=1}^m \left(\frac{F_1(p_n^c)}{\frac{d\Delta^c}{dp}(p_n^c)} e^{tp_n^c} + \frac{F_2(p_n^k)}{\frac{d\Delta^k}{dp}(p_n^k)} e^{tp_n^k} \right) d\alpha, \\ U_z(r, z, t) &= - \int_0^\infty \alpha^2 J_1(\alpha r) \sum_{n=1}^m \left(\frac{L_1(p_n^c)}{\frac{d\Delta^c}{dp}(p_n^c)} e^{tp_n^c} + \frac{L_2(p_n^k)}{\frac{d\Delta^k}{dp}(p_n^k)} e^{tp_n^k} \right) d\alpha. \end{aligned} \quad (25)$$

Варто зауважити, що розв'язок (25) існує й для випадку нескінченної кількості полюсів, тобто коли $m = \infty$ [5].

При $Q = 1$ розв'язок (25) можна розглядати як функції Гріна, а завдяки лінійності нашої задачі отримати розв'язок хвильової задачі для нескінченного шару при миттєвому вертикальному ударі, розподіленому за будь-якою його областю, що обмежена регулярною поверхнею [1].

Отриманий фундаментальний розв'язок задачі про поширення нестационарних пружних хвиль у шарі дозволить більш детально розкрити механізм руху пружних хвиль у пластинах і може бути використаний при аналізі та розшифруванні сигналів методу акустичної емісії, який успішно використовують при розв'язуванні задач прогнозування залишкового ресурсу зварних конструкцій у процесі їхньої експлуатації.

Автор заявляє про відсутність конфлікту інтересів і спеціального фінансування цієї роботи. Всі необхідні дані містяться в статті.

Література

1. W. Nowacki, *Teoria Sprężystości*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa (1970).
2. А. Ф. Улитко, *Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости*, Наук. думка, Киев (1979).
3. R. D. Mindlin, M. A. Medick, *Extensional vibrations of elastic plates*, J. Appl. Mech., **26**, № 4, 561–569 (1959).
4. М. Оное, *Contour vibrations of isotropic circular plates*, J. Acoust. Soc. Amer., **28**, № 6, 1158–1162 (1956).
5. В. С. Мартыненко, *Операционное исчисление*, Изд-во Киев. ун-та, Киев (1968).

Одержано 28.05.24,
після доопрацювання — 10.06.24