

УМОВИ РОЗВ'ЯЗНОСТІ СЛАБКО ЗБУРЕНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Руслан Репнін

*Інститут математики НАН України,
вул. Терещенківська, Київ, 01601, Україна
e-mail: repnin.r@imath.kiev.ua*

The conditions of bifurcation at the point $\varepsilon = 0$ of weakly perturbed linear stochastic differential equations are obtained.

Отримано умови біфуркації в точці $\varepsilon = 0$ слабко збурених лінійних стохастичних диференціальних рівнянь.

Постановка задачі. Розглянемо таку крайову задачу для лінійних неоднорідних стохастичних диференціальних рівнянь (зауважимо, що в статті використано теорію узагальненого інтеграла Стратановича, розроблену в [1, 2]):

$$dX_t = (AX_t + a(t)) dt + \sum_{i=1}^k (B_i X_t + b_i(t)) \circ dW_t^i + \varepsilon \left((\tilde{A}X_t + \tilde{a}(t)) dt + \sum_{i=1}^k (\tilde{B}_i X_t + \tilde{b}_i(t)) \circ dW_t^i \right), \quad (1.1)$$

$$F_0 X_0 + F_1 X_1 = f, \quad (1.2)$$

де $A, \tilde{A}, B_1, \dots, B_k, \tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_k, F_0, F_1, \tilde{F}_0, \tilde{F}_1$ — $(d \times d)$ -вимірні сталі матриці, f — d -вимірний випадковий вектор, визначений на (Ω, F) , $a(t), \tilde{a}(t), b_1(t), \dots, b_k(t), \tilde{b}_1(t), \dots, \tilde{b}_k(t)$, $t \in [0, 1]$, — d -вимірні процеси, які задовольняють умови з [2].

Введемо такі позначення:

$Q = F_0 + F_1 \Phi(1, 0)$ — $(d \times d)$ -матриця, елементи якої можуть бути випадковими величинами і яка може бути необоротною;

Q^+ — псевдообернена матриця до Q ;

$\Phi(t, s) = \Phi(t)\Phi(s)^{-1}$, $s, t \in [0, 1]$, — $(d \times d)$ -вимірний фундаментальний розв'язок задачі (1.1) при $\varepsilon = 0$.

Теорію псевдообернених операторів детально описано в [3].

Розглядаємо випадок, коли для $\epsilon = 0$ задача (1.1), (1.2) є нерозв'язною, тобто $\text{rank } Q = d_1 < d$:

$$P_{Q_l^*} \left\{ f - F_1 \int_0^1 \Phi(1, s) \circ dV_s \right\} \neq 0, \quad l = d - d_1, \quad (1.3)$$

де

$$V_t = \int_0^t a(s) ds + \sum_{i=1}^k \int_0^t b_i(s) \circ dW_s^i. \quad (1.4)$$

Сформулюємо теорему, яка є варіацією теореми 6.4 з [3] для рівнянь типу (1.1), (1.2), а також основного результату з [4].

Теорема. Нехай задача (1.1), (1.2) при $\epsilon = 0$ є нерозв'язною, тобто виконується умова (1.3), а також виконується умова

$$P_{B_0^*} = 0, \\ B_0 = P_{Q_l^*} \left\{ -F_1 \int_0^1 \Phi(1, s) \circ d\tilde{V}_s \right\}, \quad l = d - d_1, \quad (1.5)$$

де

$$\tilde{V}_t = \int_0^t \tilde{A}\Phi(s) ds + \sum_{i=1}^k \int_0^t \tilde{B}_i\Phi(s) \circ dW_s^i, \quad (1.6)$$

$B_0, P_{B_0^*}$ — $(l \times l)$ -вимірні матриці.

Тоді крайова задача (1.1), (1.2) має хоча б один розв'язок, який можна зобразити у вигляді ряду

$$x(t, \epsilon) = \sum_{i=-1}^{\infty} \epsilon^i x_i(t), \quad (1.7)$$

який збігається для фіксованого $\epsilon \in (0, \epsilon^*]$.

Доведення. Застосуємо метод Вішика – Люстерника [5] і підставимо ряд (1.7) у рівняння (1.1). Відокремимо члени біля ϵ^{-1} і отримаємо однорідну крайову задачу для $x_{-1}(t)$:

$$dx_{-1}(t) = Ax_{-1}(t)dt + \sum_{i=1}^k B_i x_{-1}(t) \circ dW_t^i,$$

$$F_0 x_{-1}(0) + F_1 x_{-1}(1) = 0,$$

розв'язок якої має вигляд

$$x_{-1}(t, c_{-1}) = \Phi(t) c_{-1},$$

де l -вимірний вектор-стовпчик c_{-1} можна знайти з умови розв'язності для $x_0(t)$.

Для ϵ^0 отримаємо крайову задачу для $x_0(t)$:

$$\begin{aligned} dx_0(t) &= \left(Ax_0(t) + a(t) + \tilde{A}x_{-1}(t, c_{-1}) \right) dt \\ &+ \sum_{i=1}^k \left(B_i x_0(t) + b_i(t) + \tilde{B}_i x_{-1}(t, c_{-1}) \right) \circ dW_t^i, \\ F_0 x_0(0) + F_1 x_0(1) &= f. \end{aligned}$$

Застосовуємо критерій розв'язності

$$\begin{aligned} P_{Q_l^*} \left\{ f - F_1 \int_0^1 \Phi(1, s) \circ dV_s^* \right\} &= 0, \\ V_t^* &= \int_0^t \left(a(s) + \tilde{A}x_{-1}(s, c_{-1}) \right) ds \\ &+ \sum_{i=1}^k \int_0^t \left(b_i(s) + \tilde{B}_i x_{-1}(s, c_{-1}) \right) \circ dW_s^i, \quad t \in [0, 1], \end{aligned}$$

тому що

$$x_{-1}(t, c_{-1}) = \Phi(t)c_{-1}.$$

Тоді, використовуючи позначення (1.4), (1.5), (1.6), одержуємо

$$\begin{aligned} P_{Q_l^*} \left\{ f - F_1 \int_0^1 \Phi(1, s) \circ dV_s^* \right\} &= P_{Q_l^*} \left\{ f - F_1 \int_0^1 \Phi(1, s) \circ dV_s \right\} \\ &+ P_{Q_l^*} \left\{ -F_1 \int_0^1 \Phi(1, s) \circ d\tilde{V}_s \right\} c_{-1}. \end{aligned}$$

Маємо систему рівнянь

$$B_0 c_{-1} = -P_{Q_l^*} \left\{ f - F_1 \int_0^1 \Phi(1, s) \circ dV_s \right\}, \quad (*)$$

де c_{-1} належить $\mathbb{R}^l$. Система (*) є розв'язною тоді й тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{B_0^*} = 0$$

і один із її розв'язків має вигляд

$$c_{-1} = -B_0^+ P_{Q_l^*} \left\{ f - F_1 \int_0^1 \Phi(1, s) \circ dV_s \right\}.$$

Загальний розв'язок для $x_0(t, c_0)$ записуємо у вигляді

$$x_0(t, c_0) = \Phi(t, 0)c_0 + \int_0^t \Phi(t, s) \circ d\tilde{V}_s c_{-1} + \int_0^t \Phi(t, s) \circ dV_s.$$

Для того щоб знайти c_0 , прирівнюємо коефіцієнти біля ε і отримуємо таку крайову задачу:

$$dx_1(t) = \left(Ax_1(t) + \tilde{A}x_0(t, c_0) + \tilde{a}(t) \right) dt + \sum_{i=1}^k \left(B_i x_1(t) + \tilde{B}_i x_0(t, c_0) + \tilde{b}_i(t) \right) \circ dW_t^i,$$

$$F_0 x_1(0) + F_1 x_1(1) = 0.$$

Застосуємо критерій розв'язності

$$P_{Q_i^*} \left\{ -F_1 \int_0^1 \Phi(1, s) \circ d\tilde{V}_s^{(0)} \right\} = 0, \quad (**)$$

де

$$\tilde{V}_t^{(0)} = \int_0^t \left(\tilde{A}x_0(s, c_0) + \tilde{a}(s) \right) ds + \sum_{i=1}^k \int_0^t \left(\tilde{B}_i x_0(s, c_0) + \tilde{b}_i(s) \right) \circ dW_s^i, \quad t \in [0, 1].$$

У (**) перенесемо всі коефіцієнти біля c_0 вліво, а все інше позначимо через L і одержимо систему

$$B_0 c_0 = -L.$$

Застосуємо критерій розв'язності

$$P_{B_0^*} = 0$$

і отримаємо один із розв'язків

$$c_0 = -B_0^+ L.$$

Доведемо за індукцією, що за умови $P_{B_0^*} = 0$ коефіцієнти $x_i(t)$ можна знайти з відповідної крайової задачі.

Припустимо, що коефіцієнт c_{k-1} можна знайти, прирівнюючи коефіцієнти біля ε^k :

$$c_{k-1} = -B_0^+ L,$$

де

$$L = L(c_{k-2}), \quad x_k(t, c_k) = \Phi(t, 0)c_k + R(t, x_{(k-1)}(t, c_{(k-1)})).$$

Тоді для того щоб знайти c_k , прирівняємо коефіцієнти біля ε^{k+1} і отримаємо

$$dx_{k+1}(t) = \left(Ax_{k+1}(t) + \tilde{A}x_k(t, c_k) + \tilde{a}(t) \right) dt + \sum_{i=1}^k \left(B_i x_1(t) + \tilde{B}_i(t)x_k(t, c_k) + \tilde{b}_i(t) \right) \circ dW_t^i,$$

$$F_0 x_{k+1}(0) + F_1 x_{k+1}(1) = 0.$$

Застосуємо критерій розв'язності:

$$P_{Q_l^*} \left\{ -F_1 \int_0^1 \Phi(1, s) \circ d\tilde{V}_s^{(k)} \right\} = 0, \quad (***)$$

$$x_k(1, c_k) = \Phi(1, 0)c_k + R(1, x_{k-1}(1, c_{k-1})),$$

$$\tilde{V}_t^{(k)} = \int_0^t \left(\tilde{A}x_k(s, c_k) + \tilde{a}(s) \right) ds + \sum_{i=1}^k \int_0^t \left(\tilde{B}_i(s)x_k(s, c_k) + \tilde{b}_i(s) \right) \circ dW_s^i, \quad t \in [0, 1],$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t^{(k)} &= \int_0^t \left(\tilde{A}(\Phi(s)c_k + R(s, x_{k-1}(s, c_{k-1}))) + \tilde{a}(s) \right) ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^k \int_0^t \left(\tilde{B}_i(\Phi(s)c_k + R(s, x_{k-1}(s, c_{k-1}))) + \tilde{b}_i(s) \right) \circ dW_s^i \\ &= \tilde{V}_s c_k + \int_0^t \left(\tilde{A}R(s, c_{-1}, \dots, c_{k-1}) + \tilde{a}(s) \right) ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^k \int_0^t \left(\tilde{B}_i R(s, c_{-1}, \dots, c_{k-1}) + \tilde{b}_i(s) \right) \circ dW_s^i. \end{aligned}$$

Маємо таку систему:

$$\begin{aligned} P_{Q_l^*} \left\{ -F_1 \int_0^1 \Phi(1, s) \circ d\tilde{V}_s \right\} c_k + L(c_{k-1}) &= 0, \\ B_0 c_k &= -L(c_{k-1}). \end{aligned}$$

Застосовуємо до неї критерій розв'язності

$$P_{B_0^*} = 0,$$

один із розв'язків має вигляд

$$c_k = -B_0^+ L(c_{k-1}).$$

Таким чином, довели, що при виконанні умови розв'язності $P_{B_0^*} = 0$ всі коефіцієнти можуть бути знайдені з відповідної крайової задачі.

Збіжність можна довести за допомогою переходу до інтеграла Скорохода та оцінки $E|x_k(t)|^2$ [2].

Автор заявляє про відсутність конфлікту інтересів. Усі необхідні дані містяться в статті. Дослідження частково підтримано грантом Відділення цільової підготовки Київського національного університету імені Тараса Шевченка при НАН України ЗМ-2024 “Якісний аналіз та керування в нелінійних інтегро-диференціальних рівняннях із імпульсними та стохастичними збуреннями”, державний реєстраційний номер 0124U002140.

Література

1. D. Nualart, E. Pardoux, *Stochastic calculus with anticipating integrands*, Probab. Theory Related Fields, **78**, 535–581 (1988).
2. D. Ocone, E. Pardoux, *Linear stochastic differential equations with boundary conditions*, Probab. Theory Related Fields, **82**, 489–526 (1989).
3. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, VSP, Utrecht (2004).
4. О. А. Бойчук, Є. В. Панасенко, *Слабкозбурені крайові задачі для диференціальних рівнянь у банаховому просторі, Нелін. коливання*, **13**, № 3, 291–304 (2010); **English translation:** *Nonlinear Oscill.*, **13**, 311–324 (2011).
5. М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, *Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. I*, Успехи мат. наук, **15**, № 3, 3–93 (1960); **English translation:** *Russian Math. Surveys*, **15**, № 3, 1–73 (1960).

Одержано 18.03.24