

ІСНУВАННЯ І ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ СТОХАСТИЧНОГО ФУНКЦІОНАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ У СКІНЧЕННОВИМІРНИХ ПРОСТОРАХ

Олександр Правдивий

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка
вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна
email: awxrvtb@gmail.com, відповідальний за листування*

Андрій Станжицький

*Інститут математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна,
email: a.stanzhytskyi@gmail.com*

Юрій Перестюк

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка
вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна
email: perestyuk@gmail.com*

We obtain sufficient conditions for the existence of solutions of initial problems for systems of stochastic functional differential equations of neutral type. Moreover, the standard Lipschitz condition for the drift coefficient is replaced by the condition of power growth and the monotonicity condition, which is more natural for applications.

Отримано достатні умови існування розв'язків початкових задач для систем стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь нейтрального типу. При цьому стандартну умову Ліпшиця для коефіцієнта зносу замінено умовою степеневого зростання та умовою монотонності, що є більш природним для застосувань.

1. Вступ. У цій статті розглянуто питання існування і єдиності розв'язку стохастичного функціонально-диференціального рівняння нейтрального типу

$$d(u(t) - g(u_t)) = f(u_t)dt + \sigma(u_t)dW(t), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

$$u(t) = \phi(t), \quad t \in [-h, 0], \quad (2)$$

де $u_t = u(t + \theta)$, $\theta \in [-h, 0]$, $W(t)$ — вінерівський процес у R^m , $u(t)$ — стохастичний процес, f , g — відображення з $C([-h, 0], R^n)$ у R^n , σ — відображення з того самого простору в $R^{n \times m}$, $\phi \in C([-h, 0], R^n)$ — початкова функція.

Структура роботи така: у вступі наведено огляд літератури за тематикою дослідження та сформульовано мету роботи, у п. 2 дано строгу постановку задачі, наведено деякі допоміжні твердження та сформульовано основні результати. Доведення основних теорем наведено у п. 3.

Функціонально-диференціальні рівняння є моделями різноманітних еволюційних процесів, у яких поточний стан системи безпосередньо залежить від минулих станів, тобто станів процесу у попередні моменти часу. На відміну від звичайних диференціальних рівнянь права частина таких математичних моделей є функціоналом, що суттєво ускладнює об'єкт дослідження та вимагає розробки й застосування спеціальних методів, зокрема й функціонального аналізу. Широке застосування таких моделей спонукало бурхливий розвиток теорії функціонально-диференціальних рівнянь. Із цього приводу зазначимо монографію [1], де наведено велику бібліографію. Щодо стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь, то відзначимо монографію [2], де вивчено велике коло питань, стосовно як якісної, так і асимптотичної поведінки розв'язків таких рівнянь. Останнім часом значну увагу приділяють вивченню асимптотичної поведінки на нескінченності розв'язків стохастичних систем як у скінченновимірному [3–6], так і у нескінченновимірному випадках [7–11]. Серед функціонально-диференціальних рівнянь важливе місце посідають рівняння нейтрального типу у випадку, коли ефект запізнення присутній і у похідній. Такі рівняння є більш складним об'єктом, ніж рівняння, де запізнення присутнє лише у правій частині, на що, зокрема, вказано в [1]. Стосовно стохастичних рівнянь такого типу зауважимо роботи [12–16], де як у скінченновимірних, так і нескінченновимірних випадках вивчали умови існування розв'язків, інваріантні міри, керованість, стійкість. Але у вказаних роботах розглядали в основному м'які розв'язки, і при цьому, що більш суттєво, від коефіцієнта зносу вимагалось виконання глобальної умови Ліпшиця або її послаблення типу умови Нагумо. Проте в застосуваннях така умова не завжди виконується. Як правило, нелінійності, що входять у рівняння, задовольняють умови степеневого зростання та певні умови монотонності. Типовим прикладом таких нелінійностей є нелінійність Аллена–Кана $u - u^3$.

Основним результатом цієї роботи є теорема про існування та єдиність розв'язку початкової задачі для вказаного вище рівняння, а саме за умов степеневого зростання та умови монотонності.

2. Постановка задачі, деякі допоміжні відомості та основні результати. Для деякого $h > 0$ визначимо простір неперервних функцій $C := C([-h, 0], R^n)$ із супремум нормою $\|\cdot\|_C$. При цьому $\|\cdot\|$ означає евклідову норму у просторі R^n . Через $u_t(\theta) = u(t + \theta)$, $\theta \in [-h, 0]$, позначимо зсув стохастичного процесу $u(t)$ вздовж траєкторії. Для задачі (1), (2) позначимо через W m -вимірний вінерівський процес із незалежними компонентами, визначений на повному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ з фільтрацією

$$\mathcal{F}_t^W = \sigma(W(u), 0 \leq u \leq t) \vee \mathcal{N} \subset \mathcal{F},$$

де $\mathcal{N}$ — множини міри 0 у $\mathcal{F}$.

Нехай початкова функція ϕ є не випадковою функцією з C . Стосовно коефіцієнтів f , g , σ рівняння (1), (2) будемо вважати, що відображення $f, g: C \rightarrow R^n$ і $\sigma: C \rightarrow M^{n \times m}$, де $M^{n \times m}$ — простір $(n \times m)$ -вимірних матриць, є неперервними за відповідними нормами.

У подальшому нам будуть потрібні два допоміжні твердження, перше з яких визначає оцінку норми розв'язку у просторах зсувів через оцінку його норми у просторі R^n , а інше є нетривіальним узагальненням леми Гронуолла на стохастичний випадок.

Лема 1 [13]. Нехай для будь-якого $T > 0$: $u(t)$, $-h \leq t \leq T$, — стохастичний процес із неперервними траєкторіями. Тоді, якщо $p \geq 1$ і $u_0 = \phi$, то справедлива нерівність

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u_t\|_C^p \leq \|\phi\|_C^p + \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|^p.$$

Стохастична лема Гронуолла [17]. Нехай Z , H — невід’ємні стохастичні процеси з неперервними траєкторіями, узгоджені з фільтрацією, M — неперервний локальний мартингал. Тоді:

1. Якщо $M(0) = 0$ та існують $K, C \geq 0$ такі, що

$$Z(t) \leq K \int_0^t \sup_{u \in [0, s]} (Z(u)) ds + M(t) + C,$$

то для всіх $0 < \alpha < 1$ існують $C_1, C_2 > 0$ такі, що

$$E \left(\sup_{t \in [0, T]} (Z(t)) \right)^\alpha \leq C^\alpha C_1 e^{C_2 K T}.$$

2. Якщо $M(0) = 0$, $H(0) = 0$ та існує $K \geq 0$ такі, що

$$Z(t) \leq K \int_0^t \sup_{u \in [0, s]} (Z(u)) ds + M(t) + H(t),$$

то для всіх $0 < \alpha < 1$ і $\beta > \frac{1+\alpha}{1-\alpha}$ існують $C_3, C_4 > 0$ такі, що

$$E \left(\sup_{t \in [0, T]} (Z(t)) \right)^\alpha \leq C_3 e^{C_4 K T} \left(E \left(\sup_{t \in [0, T]} H(t) \right)^\beta \right)^{\alpha/\beta}.$$

3. Якщо $H(t)$ невід’ємний, то для всіх $0 < \alpha < 1$ існує $C_\alpha \geq 0$ таке, що

$$E \left(\sup_{t \in [0, T]} (Z(t)) \right)^\alpha \leq (C_\alpha + 1) e^{\alpha K T} \left(E \left(\sup_{t \in [0, T]} H(t) \right)^\alpha \right).$$

Стосовно функцій f , σ , g будемо вважати виконаними такі умови.

Умови для функції g :

(G1) (лінійне зростання) існує стала $K_1 > 0$ така, що

$$\|g(\phi)\|^2 \leq K_1 \left(1 + \int_{-h}^0 \|\phi(s)\|^2 ds \right);$$

(G2) (інтегральна ліпшицевість) існує стала $L_1 > 0$ така, що

$$\|g(\phi) - g(\psi)\|^2 \leq L_1 \int_{-h}^0 (\|\phi(\theta) - \psi(\theta)\|^2) d\theta.$$

Зауваження. З умови Ліпшиця в інтегральній нормі випливає умова Ліпшиця в рівномірній нормі завдяки оцінкам

$$L_1 \int_{-h}^0 (\|\phi(\theta) - \psi(\theta)\|^2) d\theta \leq L_1 h \|\phi - \psi\|_C^2.$$

Звідси маємо

$$\|g(\phi) - g(\psi)\| \leq \sqrt{L_1 h} \|\phi - \psi\|_C.$$

Надалі будемо вимагати, щоб $\sqrt{L_1 h} < 1$, та позначати $L := \sqrt{L_1 h}$.

Умови для функцій f , σ :

(N1) (умови на зростання) існують сталі $K_2, K_3 > 0$, $\gamma \geq 1$ такі, що

$$\|f(\phi)\| \leq K_2 \left(1 + \left(\int_{-h}^0 \|\phi(t)\| dt \right)^\gamma \right) + \|\phi\|_C^\gamma$$

і

$$\|\sigma(\phi)\|^2 \leq K_3 (1 + \|\phi\|_C^2)$$

для довільного $\phi \in C$;

(N2) (монотонність) існує $\delta > 0$ таке, що для всіх $\phi, \phi_1 \in C$

$$2(f(\phi) - f(\phi_1), \phi(0) - \phi_1(0)) + \|\sigma(\phi) - \sigma(\phi_1)\|^2 \leq \delta \|\phi - \phi_1\|_C^2;$$

(N3) (коерцитивність) існують $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ такі, що для всіх $\phi \in C$

$$2(f(\phi), \phi(0)) + \|\sigma(\phi)\|^2 \leq \lambda_1 \|\phi\|_C^2 + \lambda_2;$$

(N4) (зв'язок f і g) існують сталі K_4, K_5 такі, що

$$(f(\phi), g(\phi)) \leq K_4 \|\phi\|_C^2 + K_5,$$

для всіх $\phi \in C$.

(N5) (локальна ліпшицевість) для будь-якого $R > 0$ знайдеться $L_R > 0$ таке, що

$$\|f(\phi_1) - f(\phi_2)\| \leq L_R \|\phi_1 - \phi_2\|_C$$

для всіх $\phi_1, \phi_2 \in C$: $\|\phi_1\|_C \leq R$, $\|\phi_2\|_C \leq R$.

Означення. Випадковий процес $u(t)$, узгоджений з фільтрацією, називатимемо розв'язком рівняння (1), (2) на $[0, T]$, якщо:

- 1) $u(t) = \phi(t)$, $t \in [-h, 0]$;
- 2) $u \in L^2(\Omega \times [0, T], R^n)$;
- 3) для всіх $t \in [0, T]$ з імовірністю 1

$$u(t) - g(u_t) = \phi(0) - g(\phi) + \int_0^t f(u_s) ds + \int_0^t \sigma(u_s) dW(s).$$

Основними результатами роботи є такі теореми про існування, єдиність розв'язку та його неперервну залежність від початкових даних.

Теорема 1 (існування, єдиність розв'язку). *Нехай виконуються умови (G1), (G2) і (N1) – (N5). Тоді для всіх $\phi \in C$ рівняння (1), (2) має єдиний розв'язок на $[0, T]$.*

Крім того, виконується енергетична рівність

$$\begin{aligned} \|u - g(u_t)\|^2 &= \|\phi(0) - g(\phi)\|^2 + 2 \int_0^t (f(u_s), u(s) - g(u_s)) ds \\ &+ \int_0^t \|\sigma(u_s)\|^2 ds + 2 \int_0^t (\sigma(u_s) dW(s), u(s) - g(u_s)). \end{aligned}$$

Теорема 2 (неперервна залежність від початкових умов). *Нехай $\{\phi^n \mid n \geq 1\} \subset C$ — послідовність початкових умов (2) і $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\phi^n - \phi\|_C = 0$. Тоді для розв'язків (1), (2) $u^n(t)$ і $u(t)$ з початковими умовами ϕ^n і ϕ відповідно маємо*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \sup_{t \in [0, T]} \|u^n(t) - u(t)\|^2 = 0.$$

3. Доведення основних результатів. 3.1. Доведення теореми 1. Існування. Доведення існування проведемо з використанням методу апроксимацій Ейлера. Розглянемо послідовність $u^k(t)$, визначену як

$$\begin{aligned} u^k(t) &= u^k\left(\frac{[kt]}{k}\right) - g\left(u_{\frac{[kt]}{k}}^k\right) + g(u_t^k) + \int_{\frac{[kt]}{k}}^t f(\bar{u}_s^k) ds + \int_{\frac{[kt]}{k}}^t \sigma(\bar{u}_s^k) dW(s), \quad t \in [0, T], \quad (3) \\ u^k(t) &= \phi(t), \quad t \in [-h, 0], \end{aligned}$$

де

$$\bar{u}_s^k(\theta) = u^k\left((\theta + s) \wedge \frac{[ks]}{k}\right), \quad \theta \in (-h, 0], \quad u^0(t) := \phi(t).$$

Позначимо

$$F(t) := u^k\left(\frac{[kt]}{k}\right) - g\left(u_{\frac{[kt]}{k}}^k\right) + \int_{\frac{[kt]}{k}}^t f(\bar{u}_s^k) ds + \int_{\frac{[kt]}{k}}^t \sigma(\bar{u}_s^k) dW(s).$$

Для кожного $k \in \mathbb{N}$ і для кожного $l \in \mathbb{N}_0$ процес $F(t)$ визначений однозначно через $u_{\frac{l}{k}}^k$ на проміжку $t \in \left[\frac{l}{k}, \frac{l+1}{k}\right]$. Перепишемо (3) для $l = 1$:

$$u^k(t) = g(u_t^k) + F(t).$$

Таким чином, отримали таке функціональне рівняння, розв'язок якого $u^k(t)$ потрібно шукати на $\left[-h, \frac{1}{k}\right]$:

$$\begin{cases} u^k(t) = \phi(t), & t \in [-h, 0], \\ u^k(t) = g(u_t^k) + F(t), & t \in \left(0, \frac{1}{k}\right]. \end{cases}$$

Для цього введемо банахів простір $\mathcal{B}$ -узгоджених з $\mathcal{F}_t^W$ стохастичних процесів із нормою $\|\phi\|_{\mathcal{B}}^2 = E\left(\sup_{t \in [-h, \frac{1}{k}]} \|\phi(t)\|^2\right)$ і визначимо оператор $Z(u)$ на $\mathcal{B}$:

$$\begin{cases} Z(u)(t) = \phi(t), & t \in [-h, 0], \\ Z(u)(t) = g(u_t) + F(t), & t \in \left(0, \frac{1}{k}\right]. \end{cases}$$

Спочатку покажемо, що Z діє з $\mathcal{B}$ у себе. Дійсно,

$$\|Z(u)\|_{\mathcal{B}} = E\left(\sup_{t \in [-h, \frac{1}{k}]} \|Z(u)(t)\|^2\right) = E\left(\sup_{t \in [-h, 0]} \|\phi(t)\|^2\right) + E\left(\sup_{t \in [0, T]} \|g(u_t) + F(t)\|^2\right).$$

Оскільки ϕ — не випадкова й неперервна функція, то відповідно $E\left(\sup_{t \in [-h, 0]} \|\phi(t)\|^2\right) < \infty$. Маємо

$$E\left(\sup_{t \in [0, \frac{1}{k}]} \|g(u_t) + F(t)\|^2\right) \leq \frac{1}{2} E\left(\sup_{t \in [0, \frac{1}{k}]} \|g(u_t)\|^2\right) + E\left(\sup_{t \in [0, \frac{1}{k}]} \|F(t)\|^2\right).$$

Далі отримуємо $E\left(\sup_{t \in [0, \frac{1}{k}]} \|g(u_t)\|^2\right) < \infty$. Останнє випливає з умови лінійного зростання на g , а $E\left(\sup_{t \in [0, T]} \|F(t)\|^2\right) < \infty$, оскільки $E\|\phi\|_C^2 \leq \infty$, з чого можна зробити висновок, що $\|Z(u)\|_{\mathcal{B}} < \infty$.

Далі одержуємо

$$\begin{aligned} \|Z(u^1) - Z(u^2)\|_{\mathcal{B}}^2 &= E\left(\sup_{t \in [-h, \frac{1}{k}]} \|Z(u^1)(t) - Z(u^2)(t)\|^2\right) \\ &= E\left(\sup_{t \in [0, \frac{1}{k}]} \|g(u_t^1) + F(t) - (g(u_t^2) + F(t))\|^2\right) \\ &= E\left(\sup_{t \in [0, \frac{1}{k}]} \|g(u_t^1) - g(u_t^2)\|^2\right) \leq L^2 \left(E\left(\sup_{t \in [0, \frac{1}{k}]} \|u_t^1 - u_t^2\|_C^2\right)\right) \\ &\leq L^2 \left(E\left(\sup_{t \in [0, \frac{1}{k}]} \left(\|u^1(t) - u^2(t)\|^2 + E\left(\sup_{[-h, 0]} \|\phi(t) - \phi(t)\|^2\right)\right)\right)\right) \\ &= L^2 \|u^1 - u^2\|_{\mathcal{B}}^2. \end{aligned}$$

Оскільки f, g, σ — $\mathcal{F}_t^W$ -вимірні функції, а ϕ — $\mathcal{F}_0^W$ -вимірні, то з урахуванням того, що $L < 1$, за теоремою Банаха можемо зробити висновок, що для кожного $k > 1$ процес u^k

визначений єдиним чином на проміжку $\left(0, \frac{1}{k}\right]$. Позначимо його через $U^k(t)$. Розв'язуючи (3) на $\left[-h, \frac{1}{k}\right]$ методом послідовних наближень та беручи як початкове наближення неперервну функцію, отримуємо, що процес $U^k(t)$ має неперервні траєкторії.

Проведемо описаний вище процес для $l = 2$. Відповідне функціональне рівняння має аналогічну структуру:

$$u^k(t) = g(u_t^k) + F(t).$$

Отже, одержуємо функціональне рівняння, де розв'язок $u^k(t)$ — його розв'язок, визначений на $\left[-h, \frac{2}{k}\right]$. Таким чином,

$$\begin{cases} u^k(t) = \phi(t), & t \in [-h, 0], \\ u^k(t) = U^k(t), & t \in \left[0, \frac{1}{k}\right], \\ u^k(t) = g(u_t^k) + F(t), & t \in \left(\frac{1}{k}, \frac{2}{k}\right]. \end{cases}$$

Введемо знову банахів простір $\mathcal{B}$ узгоджених із $\mathcal{F}_t^W$ стохастичних процесів із нормою $\|\phi\|_{\mathcal{B}}^2 = E\left(\sup_{t \in [-h, \frac{2}{k}]} \|\phi(t)\|^2\right)$ та визначимо оператор $Z(u)$ на $\mathcal{B}$:

$$\begin{cases} Z(u)(t) = \phi(t), & t \in [-h, 0], \\ Z(u)(t) = U^k(t), & t \in \left[0, \frac{1}{k}\right], \\ Z(u)(t) = g(u_t) + F(t), & t \in \left(\frac{1}{k}, \frac{2}{k}\right]. \end{cases}$$

Знову доведемо, що Z діє з $\mathcal{B}$ у себе. Дійсно,

$$\|Z(u)\|_{\mathcal{B}}^2 = E\left(\sup_{t \in [-h, \frac{2}{k}]} \|Z(u)(t)\|^2\right) = E\left(\sup_{t \in [-h, 0]} \|\phi(t)\|^2\right) + E\left(\sup_{t \in [0, \frac{2}{k}]} \|g(u_t) + F(t)\|^2\right).$$

Оскільки ϕ — не випадкова функція, то відповідно $E(\sup_{t \in [-h, 0]} (E\|\phi(t)\|^2)) < \infty$.

Далі маємо

$$E\left(\sup_{t \in [0, \frac{2}{k}]} \|g(u_t) + F(t)\|^2\right) \leq \frac{1}{2} E\left(\sup_{t \in [0, \frac{2}{k}]} \|g(u_t)\|^2\right) + \frac{1}{2} E\left(\sup_{t \in [0, \frac{2}{k}]} (\|F(t)\|^2)\right).$$

Але $E\left(\sup_{t \in [0, \frac{2}{k}]} \|g(u_t)\|^2\right) < \infty$ внаслідок лінійного зростання g , а $\sup_{t \in [0, \frac{2}{k}]} (E\|F(t)\|^2) < \infty$, оскільки $E\|\phi\|_C^2 \leq \infty$. Отже, $\|Z(u)\|_{\mathcal{B}} < \infty$.

Аналогічно з попереднім отримуємо

$$\|Z(u^1) - Z(u^2)\|_{\mathcal{B}} \leq L\|u^1 - u^2\|_{\mathcal{B}}.$$

Оскільки f, g, σ — $\mathcal{F}_t^W$ -вимірні функції, а ϕ — $\mathcal{F}_0^W$ -вимірні, то з урахуванням того, що $L < 1$, за теоремою Банаха можемо зробити висновок, що для кожного $k > 1$ процес u^k існує на проміжку $\left(0, \frac{2}{k}\right]$.

Продовжуючи цей процес для наступних $l \in \mathbb{N}$ та враховуючи, що $T < \infty$, приходимо до висновку, що процес u^k визначений коректно на $[0, T]$, узгоджений з фільтрацією і неперервний.

Введемо процес

$$p_s^k(\theta) = \bar{u}_s^k(\theta) - u_s^k(\theta), \quad s \in [0, T], \quad \theta \in [-h, 0]. \quad (4)$$

Він, очевидно, також узгоджений з фільтрацією і неперервний.

У подальшому будемо користуватися очевидною рівністю

$$u_s^k(0) = u^k(s), \quad s \in [0, T],$$

яка випливає з визначення u_s^k . Використовуючи (4), можемо переписати (3) таким чином:

$$u^k(t) = \phi(0) - g(\phi) + g(u_t^k) + \int_0^t f(u_s^k + p_s^k) ds + \int_0^t \sigma(u_s^k + p_s^k) dW(s).$$

За формулою Іто для функції $\|u^k(t) - g(u_t^k)\|^2$ маємо

$$\begin{aligned} \|u^k(t) - g(u_t^k)\|^2 &= \|\phi(0) - g(\phi)\|^2 + 2 \int_0^t \left(u^k(s) - g(u_s^k), \sigma(u_s^k + p_s^k) dW(s) \right) \\ &\quad + 2 \int_0^t \left(f(u_s^k + p_s^k), u^k(s) - g(u_s^k) \right) ds + \int_0^t \left\| \sigma(u_s^k + p_s^k) \right\|^2 ds. \end{aligned}$$

Останню рівність можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} |u^k(t)|^2 + \|g(u_t^k)\|^2 &= 2 \left(u^k(t), g(u_t^k) \right) + \|\phi(0) - g(\phi)\|^2 \\ &\quad + 2 \int_0^t \left(u^k(s) - g(u_s^k), \sigma(u_s^k + p_s^k) dW(s) \right) \\ &\quad + 2 \int_0^t \left(f(u_s^k + p_s^k), u^k(s) \right) ds + \int_0^t \left\| \sigma(u_s^k + p_s^k) \right\|^2 ds \\ &\quad + 2 \int_0^t \left(f(u_s^k + p_s^k), -g(u_s^k) \right) ds. \end{aligned}$$

Звідси отримуємо

$$\|u^k(t)\|^2 + \|g(u_t^k)\|^2 \leq \frac{1}{\epsilon} \|u^k(t)\|^2 + \epsilon \|g(u_t^k)\|^2 + \|\phi(0) - g(\phi)\|^2$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \int_0^t \left(u^k(s) - g(u_s^k), \sigma(u_s^k + p_s^k) dW(s) \right) \\
& + 2 \int_0^t \left(f(u_s^k + p_s^k), u^k(s) + p_s^k(0) \right) ds \\
& + \int_0^t \left\| \sigma(u_s^k + p_s^k) \right\|^2 ds + 2 \int_0^t \left\| \left(f(u_s^k + p_s^k), g(u_s^k) + p_s^k(0) \right) \right\| ds.
\end{aligned}$$

Для деякого $\epsilon > 1$ оцінимо вираз $\|g(u_t^k)\|^2$ з використанням умови лінійного зростання g :

$$\begin{aligned}
\|g(u_t^k)\|^2 & \leq K_1 \left(1 + \int_{-h}^0 \|u_t^k(\theta)\|^2 d\theta \right) = K_1 \left(1 + \int_{t-h}^t \|u^k(s)\|^2 ds \right) \\
& \leq K_1 \left(1 + \int_{-h}^0 \|\phi(s)\|^2 ds + \int_0^t \|u^k(s)\|^2 ds \right).
\end{aligned}$$

Тепер одержуємо

$$\begin{aligned}
\|u^k(t)\|^2 + \|g(u_t^k)\|^2 & \leq \frac{1}{\epsilon} \|u^k(t)\|^2 + K_1 \epsilon \left(1 + \int_{-h}^0 \|\phi(s)\|^2 ds + \int_0^t \|u^k(s)\|^2 ds \right) \\
& + \|\phi(0) - g(\phi)\|^2 + 2 \int_0^t \left(u^k(s) - g(u_s^k), \sigma(u_s^k + p_s^k) dW(s) \right) \\
& + 2 \int_0^t \left(f(u_s^k + p_s^k), u^k(s) + p_s^k(0) \right) ds + \int_0^t \left\| \sigma(u_s^k + p_s^k) \right\|^2 ds \\
& + 2 \int_0^t \left| \left(f(u_s^k + p_s^k), g(u_s^k) + p_s^k(0) \right) \right| ds, \tag{5}
\end{aligned}$$

з чого випливає

$$\begin{aligned}
\|u^k(t)\|^2 & \leq K_\epsilon K_1 \epsilon \left(1 + \int_{-h}^0 \|\phi(s)\|^2 ds + \int_0^t \|u^k(s)\|^2 ds \right) \\
& + K_\epsilon \|\phi(0) - g(\phi)\|^2 + K_\epsilon 2 \int_0^t \left(u^k(s) - g(u_s^k), \sigma(u_s^k + p_s^k) dW(s) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + K_\epsilon 2 \int_0^t \left(f(u_s^k + p_s^k), u^k(s) \right) ds + K_\epsilon 2 \int_0^t \left(f(u_s^k + p_s^k), p_s^k(0) \right) ds \\
& + K_\epsilon \int_0^t \left\| \sigma(u_s^k + p_s^k) \right\|^2 ds + K_\epsilon 2 \int_0^t \left| \left(f(u_s^k + p_s^k), g(u_s^k) + p_s^k(0) \right) \right| ds,
\end{aligned}$$

де $K_\epsilon = \frac{\epsilon}{\epsilon - 1}$.

Використавши умову коерцитивності (N4) і згрупувавши всі константи, позначимо $C := K_\epsilon K_1 \epsilon \left(1 + \int_{-h}^0 \|\phi(s)\|^2 ds \right) + K_\epsilon \|\phi(0) - g(\phi)\|^2 + \lambda_2 T$:

$$\begin{aligned}
\|u^k(t)\|^2 & \leq C + K_\epsilon 2 \int_0^t \left(u^k(s) - g(u_s^k), \sigma(u_s^k + p_s^k) dW(s) \right) + K_\epsilon \lambda_1 \int_0^t \sup_{s_1 \in [0, s]} \|u^k(s)\|^2 ds \\
& + K_\epsilon 2 \int_0^t \left(f(u_s^k + p_s^k), p_s^k(0) \right) ds + K_\epsilon 2 \int_0^t \left| \left(f(u_s^k + p_s^k), g(u_s^k) + p_s^k(0) \right) \right| ds.
\end{aligned}$$

Для будь-якого $R > 0$ визначимо моменти зупинки

$$\tau_k(R) = \inf \left(s \geq 0, \sup_{0 \leq s_1 \leq s} \|u_{s_1}^k\|_C \geq \frac{R}{3} \right).$$

Тоді відповідно маємо $\sup_{t \in [0, T]} \|p_t^k\|_C \leq \frac{2R}{3}$ і $\sup_{t \in [0, T]} \|u_t^k\|_C \leq \frac{R}{3}$ для $t \in [0, \tau_k(R)]$.

Далі, до моменту зупинки $\tau_k(R)$ маємо

$$\left| \left(f(u_s^k + p_s^k), g(u_s^k) + p_s^k(0) \right) \right| \leq \left| \left(f(u_s^k + p_s^k), p_s^k(0) \right) \right| + \left| \left(f(u_s^k + p_s^k), g(u_s^k) \right) \right|. \quad (6)$$

Перший доданок у правій частині (6) перепишемо, позначивши $K_R = \sup_{\|u\| < R} (\|f(u)\|)$, таким чином:

$$\left| \left(f(u_s^k + p_s^k), p_s^k(0) \right) \right| \leq K_R \sup_{s_1 \in [0, s]} \|p_s^k(0)\|.$$

Використовуючи умову (N4) і лему 1, отримуємо

$$\begin{aligned}
\left| \left(f(u_s^k + p_s^k), g(u_s^k) \right) \right| & \leq \left| \left(f(u_s^k + p_s^k), g(u_s^k + p_s^k) \right) \right| \\
& + \left| \left(f(u_s^k + p_s^k), g(u_s^k + p_s^k) - g(u_s^k) \right) \right| \\
& \leq K_4 \|u_s^k + p_s^k\|_C^2 + K_5 + K_R L \|p_s^k(0)\| \\
& \leq K_4 \sup_{s_1 \in [0, s]} \|u^k(s_1)\|^2 + K_4 \sup_{s_1 \in [0, s]} \|p_s^k(0)\|^2 + K_5 + K_R L \sup_{s_1 \in [0, s]} \|p_s^k(0)\|.
\end{aligned}$$

Звідси для $t \in [0, \tau(R)]$ одержуємо оцінку

$$\begin{aligned} \|u^k(t)\|^2 &\leq C_1 + K_\epsilon 2 \int_0^t \left(u^k(s) - g(u_s^k), \sigma(u_s^k + p_s^k) dW(s) \right) \\ &\quad + (K_\epsilon \lambda_1 + K_4) \int_0^t \sup_{s_1 \in [0, s]} \|u^k(s)\|^2 ds \\ &\quad + K_{R,1} 2 \int_0^t \sup_{s_1 \in [0, s]} \left(\|p_{s_1}^k(0)\| + \|p_{s_1}^k(0)\|^2 \right) ds, \end{aligned}$$

де $K_{R,1} := \max(K_R L, K_4)$, $C_1 := C + K_5 T$. Із цього для $t \in [0, \tau(R)]$ можемо отримати

$$\begin{aligned} \sup_{t_1 \in [0, t]} \|u^k(t_1)\|^2 &\leq C_2 + C_2 \sup_{t_1 \in [0, t]} 2 \left| \int_0^{t_1} \left(u^k(s) - g(u_s^k), \sigma(u_s^k + p_s^k) dW(s) \right) \right| \\ &\quad + C_2 \sup_{t_1 \in [0, t]} \int_0^{t_1} \sup_{s_1 \in [0, s]} \|u^k(s)\|^2 ds \\ &\quad + K_{R,2} \sup_{t_1 \in [0, t]} \int_0^{t_1} \sup_{s_1 \in [0, s]} \left(\|p_{s_1}^k(0)\| + \|p_{s_1}^k(0)\|^2 \right) ds, \end{aligned} \quad (7)$$

де $C_2 = \max(2K_\epsilon, K_\epsilon \lambda_1 + K_4, C_1)$, $K_{R,2} = 2K_{R,1}$.

Врахувавши лінійне зростання функцій σ , g і максимальну нерівність для мартингала [17], взявши математичне сподівання, для $t \in [0, \tau(R)]$ отримаємо

$$\begin{aligned} E \left(\sup_{t_1 \in [0, t]} \|u^k(t_1)\|^2 \right) &\leq C_2 + C_2 \int_0^t E \left(\sup_{s_1 \in [0, s]} \|u^k(s)\|^2 \right) ds \\ &\quad + K_{R,2} E \left(\int_0^{t_1} \sup_{s_1 \in [0, s]} \left(\|p_{s_1}^k(0)\| + \|p_{s_1}^k(0)\|^2 \right) ds \right). \end{aligned}$$

Покажемо, що $\lim_{k \rightarrow \infty} E \left(\sup_{s_1 \in [0, s]} \|p_s^k(0)\|^p \right) = 0$.

Для $s \leq \frac{[ks]}{k}$ маємо $p_s^k(0) = 0$, для інших s одержуємо

$$p_s^k(0) = \left(g(u_{\frac{[ks]}{k}}^k) - g(u_s^k) \right) - \int_{\frac{[ks]}{k}}^s f(\bar{u}_m^k) dm - \int_{\frac{[ks]}{k}}^s \sigma(\bar{u}_m^k) dW(m),$$

відповідно для будь-якого $\alpha \geq 1$ маємо

$$\begin{aligned} E \left(\sup_{s_1 \in (0, s)} \|p_{s_1}^k(0)\|^\alpha \right) &\leq E \left(\sup_{\frac{[ks_1]}{k}} \leq s_2 \right) \leq s_1 \left(\left\| g(u_{\frac{[ks_2]}{k}}^k) - g(u_{s_2}^k) \right\|^\alpha \right) \\ &+ E \sup_{\frac{[ks_1]}{k} \leq s_2 \leq s_1} \left(\left\| \int_{\frac{[ks_1]}{k}}^{s_2} f(\bar{u}_m^k) dm \right\|^\alpha \right) \\ &+ E \sup_{\frac{[ks_1]}{k} \leq s_2 \leq s_1} \left(\left\| \int_{\frac{[ks_1]}{k}}^{s_2} \sigma(\bar{u}_m^k) dW(m) \right\|^\alpha \right). \end{aligned}$$

Враховуючи неперервність функцій f , σ , g до моменту зупинки $\tau_k(R)$, підінтегральні вирази можна оцінити сталими, а тому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E \left(\sup_{s_1 \in (0, s)} \|p_{s_1}^k(0)\|^\alpha \right) = 0.$$

Звідси, спрямовуючи $k \rightarrow \infty$ і застосовуючи нерівність Гронуолла, отримуємо, що існує $K > 0$ таке, що для всіх $k \geq K$ виконується нерівність

$$E \left(\sup_{t_1 \in [0, \tau_k(R)]} \|u^k(t_1)\|^2 \right) \leq A.$$

Для подальшого нам потрібно отримати й більш сильну оцінку для $\alpha \geq 1$, а саме: встановити існування $K > 0$ такого, що для всіх $k \geq K$ виконується нерівність

$$E \left(\sup_{t_1 \in [0, \tau_k(R)]} \|u^k(t_1)\|^{2\alpha} \right) \leq A_\alpha. \quad (8)$$

Для цього піднесемо (7) до степеня α і отримаємо

$$\begin{aligned} \sup_{t_1 \in [0, t]} \|u^k(t_1)\|^{2\alpha} &\leq (C_2)^\alpha + C_2 \sup_{t_1 \in [0, t]} 2 \left| \int_0^{t_1} (u^k(s) - g(u_s^k), \sigma(u_s^k + p_s^k) dW(s)) \right|^\alpha \\ &+ C_2 \sup_{t_1 \in [0, t]} \int_0^{t_1} \sup_{s_1 \in [0, s]} \|u^k(s)\|^{2\alpha} ds \\ &+ \left(K_{R,2} \sup_{t_1 \in [0, t]} \int_0^{t_1} \sup_{s_1 \in [0, s]} (\|p_{s_1}^k(0)\| + \|p_{s_1}^k(0)\|^2) ds \right)^\alpha. \end{aligned}$$

Оцінимо стохастичний член за допомогою нерівності Буркгольдера – Девіса – Ганді:

$$C_2 \mathbb{E} \left(\sup_{t_1 \in [0, t]} 2 \left| \int_0^{t_1} (u^k(s) - g(u_s^k), \sigma(u_s^k + p_s^k) dW(s)) \right|^\alpha \right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_\alpha \mathbb{E} \left(\int_0^t \left\| u^k(s) - g(u_s^k) \right\|^2 \left\| \sigma(u_s^k + p_s^k) \right\|^2 ds \right)^{\frac{\alpha}{2}} \\
&\leq C_\alpha \mathbb{E} \left(\int_0^t \left\| u^k(s) - g(u_s^k) \right\|^2 K_3 \left(1 + \left\| u_s^k + p_s^k \right\|^2 \right) ds \right)^{\frac{\alpha}{2}} \\
&\leq C_\alpha \mathbb{E} \left(\int_0^t \left\| u^k(s) - g(u_s^k) \right\|^{2\alpha} ds \right) + C_\alpha K_3 T + C_\alpha \mathbb{E} \left(K_3 \int_0^t \left\| u_s^k + p_s^k \right\|^{2\alpha} ds \right) \\
&\leq C_\alpha^1 \mathbb{E} \left(\int_0^t \sup_{s_1 \in [0, s]} \left\| u^k(s_1) \right\|^{2\alpha} ds \right) + C_\alpha^1 K_3 T + C_\alpha^1 \mathbb{E} \int_0^t \sup_{s_1 \in [0, s]} \left\| p_s^k(0) \right\|^{2p} ds.
\end{aligned}$$

Звідси нескладно отримати оцінку

$$\begin{aligned}
E \left(\sup_{t_1 \in [0, t]} \left\| u^k(t_1) \right\|^{2\alpha} \right) &\leq (C_2)^\alpha + C_{2, \alpha} \mathbb{E} \sup_{t_1 \in [0, t]} \int_0^{t_1} \sup_{s_1 \in [0, s]} \left\| u^k(s) \right\|^{2\alpha} ds \\
&\quad + \left(K_{R, 2} \mathbb{E} \sup_{t_1 \in [0, t]} \int_0^{t_1} \sup_{s_1 \in [0, s]} \left(\left\| p_{s_1}^k(0) \right\| + \left\| p_{s_1}^k(0) \right\|^2 \right) ds \right)^\alpha \\
&\quad + C_\alpha^1 \mathbb{E} \int_0^t \sup_{s_1 \in [0, s]} \left\| p_s^k(0) \right\|^{2\alpha} ds.
\end{aligned}$$

Беручи тепер до уваги, що 2α — момент p_s^k , який прямує до 0, і лему Гронуолла, отримуємо (8).

З іншого боку, якщо у формулі (5) позначити

$$M(t) := 2 \int_0^t \left(u^k(s) - g(u_s^k), \sigma(u_s^k + p_s^k) dW(s) \right),$$

то

$$\begin{aligned}
\left\| u^k(t) \right\|^2 + \left\| g(u_t^k) \right\|^2 &\leq \frac{1}{\epsilon} \left\| u^k(t) \right\|^2 + \epsilon \left(C_\phi + K_1 \int_0^t \left\| u^k(s) \right\| ds \right) \\
&\quad + \left\| \phi(0) - g(\phi) \right\|^2 + M(t) + 2 \int_0^t \left(f(u_s^k + p_s^k), u^k(s) + p_s^k(0) \right) ds \\
&\quad + \int_0^t \left\| \sigma(u_s^k + p_s^k) \right\|^2 ds + 2 \int_0^t \left| \left(f(u_s^k + p_s^k), g(u_s^k) + p_s^k(0) \right) \right| ds,
\end{aligned}$$

$$\text{де } C_\phi = K_1 \left(1 + \int_{-h}^0 \left\| \phi(s) \right\|^2 ds \right).$$

Далі, з коерцитивності одержуємо

$$\begin{aligned} \|u^k(t)\|^2 &\leq K_\epsilon \epsilon C_\phi + K_\epsilon \lambda_2 T + K_\epsilon \|\phi(0) - g(\phi)\|^2 \\ &\quad + K_\epsilon M(t) + 2 \int_0^t K_\epsilon (\lambda_1 + K_1) \|u_s^k + p_s^k\|_C^2 ds \\ &\quad + 2 \int_0^t K_\epsilon \left| \left(f(u_s^k + p_s^k), g(u_s^k) + p_s^k(0) \right) \right| ds, \end{aligned}$$

де $K_\epsilon = \frac{1}{1 - 1/\epsilon}$.

Уведемо такі позначення: $I = K_\epsilon \epsilon C_\phi + K_\epsilon \|\phi(0) - g(\phi)\|^2 + K_\epsilon \lambda_2 T$, $K_{\epsilon, \delta} = \max(2K_\epsilon, 2K_\epsilon(\delta + K))$ і $M_1(t) = K_\epsilon M(t)$.

Тоді матимемо

$$\begin{aligned} \|u^k(t)\|^2 &\leq I + M_1(t) + K_{\epsilon, \delta} \int_0^t \left(\sup_{s_1 \in [0, s]} \|u_{s_1}^k\|_C^2 + \sup_{s_1 \in [0, s]} \|p_{s_1}^k\|_C^2 \right) ds \\ &\quad + 2K_{\epsilon, \delta} \int_0^t \left| \left(f(u_s^k + p_s^k), g(u_s^k) + p_s^k(0) \right) \right| ds. \end{aligned}$$

Врахувавши тепер лему 1, отримаємо

$$\begin{aligned} \|u^k(t)\|^2 &\leq I + M_1(t) \\ &\quad + K_{\epsilon, \delta} t \|\phi\|_C^2 + K_{\epsilon, \delta} \int_0^t \left(\sup_{s_1 \in [0, s]} \|u^k(s_1)\|^2 + \sup_{s_1 \in [0, s]} \|p_{s_1}^k(0)\|^2 \right) ds \\ &\quad + 2K_{\epsilon, \delta} \int_0^t \left| \left(f(u_s^k + p_s^k), g(u_s^k) + p_s^k(0) \right) \right| ds. \end{aligned}$$

Позначимо $I_1 = I + K_{\epsilon, \delta} T \|\phi\|_C^2$. Тоді

$$\begin{aligned} \|u^k(t)\|^2 &\leq M_1(t) + K_{\epsilon, \delta} \int_0^t \sup_{s_1 \in [0, s]} \|u^k(s_1)\|^2 ds \\ &\quad + K_{\epsilon, \delta} \int_0^t \sup_{s_1 \in [0, s]} \|p_{s_1}^k(0)\|^2 ds \\ &\quad + 2K_{\epsilon, \delta} \int_0^t \left| \left(f(u_s^k + p_s^k), g(u_s^k) + p_s^k(0) \right) \right| ds. \end{aligned}$$

Аналогічно з (6) розкладемо вираз $|(f(u_s^k + p_s^k), g(u_s^k) + p_s^k(0))|$ для $t \in [0, \tau(R)]$. Далі з уведеними позначеннями $I_2 = I_1 + K_2 T$, $K_{R,\epsilon,\delta} = \max(K_{\epsilon,\delta}, K_1, K_R L)$ і $K_{1,\epsilon,\delta} = \max(K_{\epsilon,\delta}, K_1)$ маємо

$$\begin{aligned} \|u^k(t)\|^2 &\leq M_1(t) + 2K_{1,\epsilon,\delta} \int_0^t \sup_{0 \leq s_1 \leq s} \|u^k(s_1)\|^2 ds \\ &\quad + 2(K_{R,\epsilon,\delta}) \int_0^t \left(\sup_{0 \leq s_1 \leq s} (\|p_{s_1}^k(0)\|^2 + \|p_{s_1}^k(0)\|) \right) ds + I_2 \end{aligned}$$

для $t \in [0, \tau_k(R)] \cap [0, T]$.

Зі стохастичної леми Гронуолла (випадок 3) для $t \in [0, \tau(R)]$ отримаємо

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T \wedge \tau_k(R)} \|u^k(t)\|^{2\alpha} \right) (c_\alpha + 1) e^{K_{1,\epsilon,\delta} \alpha T} \\ &\quad + \mathbb{E} \left(I_2 + 2K_{R,\epsilon,\delta} \int_0^T \mathbf{1}_{[0, \tau_k(R)]}(s) \left(\sup_{0 \leq s_1 \leq s} (\|p_{s_1}^k(0)\|^2 + \|p_{s_1}^k(0)\|) \right) ds \right), \end{aligned}$$

якщо

$$\begin{aligned} Z(t) &= \|u^k(t)\|^2, \quad M(t) = M_1(t), \\ H(t) &= 2(K_{R,\epsilon,\delta}) \int_0^t \left(\sup_{0 \leq s_1 \leq s} (\|p_{s_1}^k(0)\|^2 + \|p_{s_1}^k(0)\|) \right) ds + I_2. \end{aligned}$$

Отже, існує стала $K > 0$ така, що для всіх $k \geq K$ виконується нерівність

$$\mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T \wedge \tau_k(R)} \|u^k(t)\|^{2\alpha} \right) \leq (c_\alpha + 1) e^{K_{1,\epsilon,\delta} \alpha T} I_2,$$

оскільки $p_s^k(0)$ не залежить від R .

Крім того, з нерівності Чебишова одержуємо

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T \wedge \tau_k(R)} \|u^k(t)\|^{2\alpha} \geq \left(\frac{R}{3} \right)^{2\alpha} \mathbf{P}(\tau_k(R) \leq T).$$

Оскільки $p_{s_1}^k(0) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\tau_k(R) \leq T) \leq \left(\frac{3}{R} \right)^{2\alpha} (c_\alpha + 1) e^{K_{1,\epsilon,\delta} \alpha T} I_2,$$

а отже, $\lim_{R \rightarrow \infty} \limsup_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\tau_k(R) \leq T) = 0$.

Звідси випливає існування такого натурального K , що для всіх $k \geq K$ виконується нерівність

$$E \sup_{t \in [0, T]} \|u^k(t)\|^{2\alpha} \leq (c_\alpha + 1)e^{K_{1, \epsilon, \delta} \alpha T} I_2, \quad (9)$$

яку й потрібно було встановити.

Розглянемо тепер таку ймовірність:

$$P\left(\left\{\sup_{t \in [0, T]} \|u^k(t)\| > N\right\}\right).$$

З нерівності Чебишова випливає, що для деякого $0 < \alpha < \infty$:

$$P\left(\left\{\sup_{t \in [0, T]} \|u^k(t)\| > N\right\}\right) \leq \frac{1}{N^\alpha} E\left(\sup_{t \in [0, T]} \|u^k(t)\|^\alpha\right),$$

тому

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\left\{\sup_{t \in [0, T]} \|u^k(t)\| > N\right\}\right) = 0,$$

з чого отримуємо, що послідовність u^k рівномірно обмежена на $[0, T]$ за ймовірністю.

Покажемо тепер, що для довільного $\epsilon > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{k \in N} \mathbf{P}\left\{\sup_{t, t_1 \in [0, T]; |t - t_1| \leq \delta} \|u^k(t) - u^k(t_1)\| > \epsilon\right\} = 0. \quad (10)$$

Далі з нерівності Чебишова маємо

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left\{\sup_{t, t_1 \in [0, T]; |t - t_1| \leq \delta} \|u^k(t) - u^k(t_1)\| > \epsilon\right\} \\ &= \mathbf{P}\left\{\sup_{t, t_1 \in [0, T]; |t - t_1| \leq \delta; t > t_1} \|u^k(t) - u^k(t_1)\| > \epsilon\right\} \\ &\leq \frac{1}{\epsilon^2} E\left(\sup_{t, t_1 \in [0, T]; |t - t_1| \leq \delta; t > t_1} \|u^k(t) - u^k(t_1)\|^2\right). \end{aligned}$$

Позначимо $\mu := t - t_1$. Тоді

$$\begin{aligned} & E\|u^k(t + \mu) - u^k(t)\|^2 \\ &\leq M\left(E\|g(u_{t+\mu}^k) - g(u_t^k)\|^2 + E\int_t^{t+\mu} \|f(u_s^k + p_s^k)\|^2 ds + E\int_t^{t+\mu} \|\sigma(u_s^k + p_s^k)\|^2 ds\right) \quad (11) \end{aligned}$$

для деякого $M > 0$. Враховуючи умову (N1) і нерівність (9), тоді маємо, що інтеграли в (11) оцінюються як $C\mu$, а отже,

$$E\|u^k(t + \mu) - u^k(t)\|^2 \leq E\|g(u_{t+\mu}^k) - g(u_t^k)\|^2 + C\mu.$$

Тепер оцінимо $E\|g(u_{t+\mu}^k) - g(u_t^k)\|^2$. Отримуємо

$$E\|g(u_{t+\mu}^k) - g(u_t^k)\|^2 \leq EL^2 \sup_{\theta \in [-h, 0]} \|u^k(t + \mu + \theta) - u^k(t + \theta)\|^2.$$

Нехай $t + \theta = s$. Тоді

$$\begin{aligned} & E \left(\sup_{s \in [-h, 0]} \|u^k(t + \mu + \theta) - u^k(t + \theta)\|^2 \right) \\ &= E \left\| \sup_{s \in [t-h, t]} \|u^k(s + \mu) - u^k(s)\| \right\|^2 \\ &\leq E \sup_{s \in [t-h, 0]} \|u^k(s + \mu) - u^k(s)\|^2 + E \sup_{s \in [0, t]} \|u^k(s + \mu) - u^k(s)\|^2. \end{aligned}$$

В останньому виразі оцінимо перший доданок. Розглянемо два випадки.

1) $s + \mu \leq 0$:

$$LE \sup_{s \in [t-h, -\mu]} \|u^k(s + \mu) - u^k(s)\|^2 = LE \sup_{s \in [t-h, \mu]} \|\phi(s + \mu) - \phi(s)\|^2.$$

Вираз справа прямує до нуля при $\mu \rightarrow 0$ завдяки рівномірній неперервності функції ψ . Тому

$$\begin{aligned} & E \sup_{s \in [t-h, 0]} \|u^k(s + \mu) - u^k(s)\|^2 \\ &\leq E \sup_{s \in [t-h, -\mu]} \|u^k(s + \mu) - u^k(s)\|^2 + E \sup_{s \in [-\mu, 0]} \|u^k(s + \mu) - u^k(s)\|^2 \\ &\leq E \sup_{s \in [t-h, -\mu]} \|\phi(s + \mu) - \phi(s)\|^2 + E \sup_{s \in [-\mu, 0]} \|u^k(s + \mu) - u^k(s)\|^2. \end{aligned}$$

Отже, вираз

$$E \sup_{s \in [t-h, 0]} \|u^k(s + \mu) - u^k(s)\|^2$$

прямує до нуля при $\mu \rightarrow 0$.

2) $s + \mu \geq 0$: Оскільки $s \in [-\mu, 0]$, то $s \rightarrow 0$, якщо $\mu \rightarrow 0$. Далі

$$E\|u^k(s + \mu) - u^k(s)\|^2 = E\|u^k(s + \mu) - \phi(s)\|^2 \leq E\|u^k(s + \mu) - \phi(0)\|^2 + E\|\phi(0) - \phi(s)\|^2.$$

Вираз $\|\phi(0) - \phi(s)\|$ прямує до нуля при $\mu \rightarrow 0$ завдяки рівномірній неперервності функції ϕ на $[-h, 0]$.

Тепер оцінимо $E\|u^k(s + \mu) - \phi(0)\|^2$. Очевидно, для всіх $t \in [0, \mu]$ справедлива оцінка

$$E\|u^k(t) - \phi(0) - (g(\phi) - g(u_t^k))\|^2 \leq C\mu.$$

Маємо

$$\begin{aligned} \left\| u^k(t) - \phi(0) - (g(\phi) - g(u_t^k)) \right\| &\geq \left\| u^k(t) - \phi(0) \right\| - \left\| g(\phi) - g(u_t^k) \right\| \\ &\geq \left\| u^k(t) - \phi(0) \right\| - L \sup_{\theta \in [-h, 0]} \left\| u^k(t + \theta) - \phi(\theta) \right\|. \end{aligned}$$

Тому

$$E \left\| u^k(t) - \phi(0) \right\|^2 \leq 2 \left(L^2 \sup_{\theta \in [-h, 0]} \left\| u^k(t + \theta) - \phi(\theta) \right\|^2 + C\mu \right).$$

Далі

$$\begin{aligned} \sup_{\theta \in [-h, 0]} \left\| u^k(t + \theta) - \phi(\theta) \right\| &\leq \sup_{\theta \in [-h, -t]} \left\| u^k(t + \theta) - \phi(\theta) \right\| + \sup_{\theta \in [-t, 0]} \left\| u^k(t + \theta) - \phi(\theta) \right\| \\ &\leq \sup_{\theta \in [-h, -t]} \left\| \phi(t + \theta) - \phi(\theta) \right\| + \sup_{\theta \in [-t, 0]} \left\| u^k(t + \theta) - \phi(\theta) \right\|. \end{aligned}$$

Перший доданок прямує до нуля при $\mu \rightarrow 0$.

Отже,

$$\sup_{\theta \in [-t, 0]} \left\| u^k(t + \theta) - \phi(\theta) \right\| \leq \sup_{\theta \in [-t, 0]} \left\| u^k(t + \theta) - \phi(0) \right\| + \sup_{\theta \in [-t, 0]} \left\| \phi(0) - \phi(\theta) \right\|.$$

В останньому виразі другий доданок прямує до 0, а перший оцінюється таким чином:

$$\sup_{\theta \in [-t, 0]} \left\| u^k(t + \theta) - \phi(0) \right\| = \sup_{s \in [0, t]} \left\| u^k(s) - \phi(0) \right\| \leq \sup_{t \in [0, \mu]} \left\| u^k(t) - \phi(0) \right\|.$$

Враховуючи тепер нерівність $L < 1$, можемо зробити висновок, що

$$E \sup_{t \in [0, \mu]} \left\| u^k(t) - \phi(0) \right\|^2 \rightarrow 0$$

при $\mu \rightarrow 0$.

Отже, $E \sup_{s \in [t-h, 0]} \left\| u^k(s + \mu) - u^k(s) \right\|^2$ прямує до 0 при $\mu \rightarrow 0$, з чого випливає, що $E \left\| g(u_{t+\mu}^k) - g(u_t^k) \right\|^2$ також прямує до 0, а тому $E \left\| u^k(t + \mu) - u^k(t) \right\|^2$ прямує до 0 при $\mu \rightarrow 0$, що й доводить (10).

Отже, згідно з теоремою Скорохода [18] можна стверджувати, що існує ймовірнісний простір $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathbf{P}})$, на якому можна задати вінерівський процес $\hat{W}$, фільтрацію $\hat{\mathcal{F}}_t^{\hat{W}}$, послідовність стохастичних процесів $\{\hat{u}^{l(k)} \mid k \geq 1\}$ і процес $\hat{u}$ такі, що

$$\hat{u}^{l(k)} \stackrel{\mathcal{L}}{\approx} u^{l(k)}$$

і $\hat{u}^{l(k)}$ прямують майже всюди до $\hat{u}$.

Доведемо тепер, що $\hat{u}$ є розв'язком задачі (1), (2). Для цього потрібно обґрунтувати граничний перехід у (3). Дійсно, згідно з оцінкою (9) можемо стверджувати, що моменти послідовності $\hat{u}^{l(k)}$ рівномірно обмежені, відповідно математичні сподівання підінтегральних функцій у виразі (3) також обмежені, завдяки оцінкам степеневого зростання для них,

а тому з теореми Лебега про мажоровану збіжність випливає, що нестохастичний інтеграл у (3) збігається. Збіжність стохастичного інтеграла випливає з відповідних його властивостей (ізоморфізм Іто).

Отже, здійснюючи у (3) граничний перехід, отримуємо, що $\hat{u}$ є розв'язком задачі (1), (2).

Більш того, якщо розв'язок єдиний, то згідно з теоремою Ямада – Ватанабе [19] можна зробити висновок, що існує розв'язок і в оригінальному ймовірнісному просторі. Тому далі доведемо єдиність слабкого розв'язку.

3.2. Єдиність. Нехай $u^1(t)$ і $u^2(t)$ — два різні розв'язки (1), (2) з однаковими початковими даними.

Використавши енергетичну рівність для $\|(u^1(t) - g(u_t^1)) - (u^2(t) - g(u_t^2))\|^2$ отримаємо

$$\begin{aligned} & \|(u^1(t) - g(u_t^1)) - (u^2(t) - g(u_t^2))\|^2 \\ &= 2 \int_0^t ((u^1(s) - g(u_s^1)) - (u^2(s) - g(u_s^2)), (\sigma(u_s^1) - \sigma(u_s^2)) dW(s)) \\ & \quad + 2 \int_0^t (f(u_s^1) - f(u_s^2), (u^1(s) - g(u_s^1)) - (u^2(s) - g(u_s^2))) ds \\ & \quad + \int_0^t \|\sigma(u_s^1) - \sigma(u_s^2)\|^2 ds. \end{aligned} \quad (12)$$

Далі, розкривши норму $\|(u^1(t) - g(u_t^1)) - (u^2(t) - g(u_t^2))\|^2$ через скалярний добуток, подамо її у вигляді

$$\|u^1(t) - u^2(t)\|^2 + \|g(u_t^1) - g(u_t^2)\|^2 - 2(u^1(t) - u^2(t), g(u_t^2) - g(u_t^1)).$$

Тоді з (12) матимемо

$$\begin{aligned} & \|u^1(t) - u^2(t)\|^2 + \|g(u_t^1) - g(u_t^2)\|^2 \\ & \leq 2 \int_0^t ((u^1(s) - g(u_s^1)) - (u^2(s) - g(u_s^2)), (\sigma(u_s^1) - \sigma(u_s^2)) dW(s)) \\ & \quad + 2 \int_0^t (f(u_s^1) - f(u_s^2), u^1(s) - u^2(s)) ds \\ & \quad + 2 \int_0^t (f(u_s^1) - f(u_s^2), g(u_s^2) - g(u_s^1)) ds \\ & \quad + \int_0^t \|\sigma(u_s^1) - \sigma(u_s^2)\|^2 ds + 2(u^1(t) - u^2(t), g(u_t^2) - g(u_t^1)). \end{aligned} \quad (13)$$

Позначимо перший доданок справа у (13) через $M(t)$ і використаємо монотонність для другого та четвертого доданків справа. Отже,

$$\begin{aligned} & \|u^1(t) - u^2(t)\|^2 + \|g(u_t^1) - g(u_t^2)\|^2 \\ & \leq M(t) + 2 \int_0^t (f(u_s^1) - f(u_s^2), g(u_s^2) - g(u_s^1)) ds \\ & \quad + 2(u^1(t) - u^2(t), g(u_t^2) - g(u_t^1)) + C_1 \int_0^t \|u_s^1 - u_s^2\|_C^2 ds. \end{aligned} \quad (14)$$

Третій доданок у (14) можна оцінити так:

$$\begin{aligned} & 2(u^1(t) - u^2(t), g(u_t^2) - g(u_t^1)) \\ & \leq 2|(u^1(t) - u^2(t), g(u_t^2) - g(u_t^1))| \\ & \leq \frac{1}{\epsilon} \|u^1(t) - u^2(t)\|^2 + \epsilon \|g(u_t^2) - g(u_t^1)\|^2 \\ & \leq \frac{1}{\epsilon} \|u^1(t) - u^2(t)\|^2 + L_1 \epsilon \int_{-h}^0 (\|u_t^2(\theta) - u_t^1(\theta)\|^2) d\theta \\ & = \frac{1}{\epsilon} \|u^1(t) - u^2(t)\|^2 + L_1 \epsilon \int_{-h}^0 (\|u^2(t+\theta) - u^1(t+\theta)\|^2) d\theta \\ & = \frac{1}{\epsilon} \|u^1(t) - u^2(t)\|^2 + L_1 \epsilon \int_{t-h}^t (\|u^2(s) - u^1(s)\|^2) ds \\ & \leq \frac{1}{\epsilon} \|u^1(t) - u^2(t)\|^2 + L_1 \epsilon \int_0^t (\|u^2(s) - u^1(s)\|^2) ds \\ & \quad + L_1 \epsilon \int_{-h}^0 (\|u^2(s) - u^1(s)\|^2) ds \\ & = \frac{1}{\epsilon} \|u^1(t) - u^2(t)\|^2 + L_1 \epsilon \int_0^t \left(\sup_{s_1 \in [0, s]} \|u^2(s_1) - u^1(s_1)\|^2 \right) ds. \end{aligned} \quad (15)$$

Тому для будь-якого $\epsilon > 1$ можемо стверджувати, що

$$\begin{aligned} \|u^1(t) - u^2(t)\|^2 &\leq M(t) + 2K_\epsilon \int_0^t (f(u_s^1) - f(u_s^2), g(u_s^2) - g(u_s^1)) ds \\ &\quad + C_1 K_\epsilon \int_0^t \sup_{s_1 \in [0, s]} \|u^1(s_1) - u^2(s_1)\|^2 ds. \end{aligned}$$

Для будь-якого $R > 0$ визначимо моменти зупинки

$$\tau(R) = \inf_{s \in [0, T]} \left(\sup_{0 \leq s_1 \leq s} \|u_{s_1}^1\|_C \geq R \wedge \sup_{0 \leq s_1 \leq s} \|u_{s_1}^2\|_C \geq R \right).$$

Відповідно $\sup_{t \in [0, T]} \|u_t^1\|_C \leq R$ і $\sup_{t \in [0, T]} \|u_t^2\|_C \leq R$ на $[0, \tau(R)] \cap [0, T]$.

Беручи до уваги, що g ліпшицева в рівномірній нормі, а f локально ліпшицева, з леми 1 отримуємо

$$(f(u_s^1) - f(u_s^2), g(u_s^2) - g(u_s^1)) \leq C_R \sup_{s \in [0, s_1]} \|u^1(s) - u^2(s)\|^2.$$

Тоді

$$\|u^1(t) - u^2(t)\|^2 \leq M(t) + C_{1,R} \int_0^t E \sup_{s_1 \in [0, s]} \|u^1(s_1) - u^2(s_1)\|^2 ds.$$

Відповідно зі стохастичної леми Гронуолла можемо зробити висновок, що

$$E \left(\sup_{t \in [0, T] \cap [0, \tau(R)]} \|u^1(t) - u^2(t)\|^{2\alpha} \right) = 0. \quad (16)$$

Звідси доходимо висновку, що $u^1 = u^2$ до моменту зупинки $\tau(R)$, а оскільки розв'язки неперервні і, як наслідок, обмежені, то $\lim_{R \rightarrow \infty} (\tau(R)) = T$. А отже, рівність (16) справедлива для всіх $t \in [0, T]$. Таким чином,

$$P \left(\sup_{t \in [0, T]} \|u^1(t) - u^2(t)\| > 0 \right) = 0.$$

З теореми Ямада – Ватанабе [19] тепер випливає існування і єдиність сильного розв'язку, що й завершує доведення теореми 1.

3.3. Неперервна залежність від початкових умов. Нехай u^n, u — розв'язки рівняння (1) із відповідними початковими умовами ϕ^n і ϕ . Запишемо для $\|u^n(t) - g(u_t^n) - u(t) + g(u_t)\|^2$ енергетичну рівність. Маємо

$$\begin{aligned} &\|(u^n(t) - g(u_t^n)) - (u(t) - g(u_t))\|^2 \\ &= \|\phi^n(0) - g(\phi^n) - \phi(0) + g(\phi)\|^2 \\ &\quad + 2 \int_0^t ((u^n(s) - g(u_s^n)) - (u(s) - g(u_s)), (\sigma(u_s^n) - \sigma(u_s)) dW(s)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \int_0^t (f(u_s^n) - f(u_s), (u^n(s) - g(u_s^n)) - (u(s) - g(u_s))) ds \\
& + \int_0^t \|\sigma(u_s^n) - \sigma(u_s)\|^2 ds.
\end{aligned}$$

Позначимо другий доданок справа як $M(t)$:

$$\begin{aligned}
& \|(u^n(t) - g(u_t^n)) - (u(t) - g(u_t))\|^2 \\
& = \|\phi^n(0) - g(\phi^n) - \phi(0) + g(\phi)\|^2 + M(t) \\
& + 2 \int_0^t (f(u_s^n) - f(u_s), u^n(s) - u(s)) ds \\
& + 2 \int_0^t (f(u_s^n) - f(u_s), -g(u_s^n) + g(u_s)) ds \\
& + \int_0^t \|\sigma(u_s^n) - \sigma(u_s)\|^2 ds.
\end{aligned}$$

Згрупуємо доданки 4 і 6 справа і використаємо монотонність:

$$\begin{aligned}
& \|(u^n(t) - g(u_t^n)) - (u(t) - g(u_t))\|^2 \\
& \leq \|\phi^n(0) - g(\phi^n) - \phi(0) + g(\phi)\|^2 + M(t) \\
& + 2 \int_0^t (f(u_s^n) - f(u_s), -g(u_s^n) + g(u_s)) ds + 2 \int_0^t \delta \|u_s^n - u_s\|_C^2 ds.
\end{aligned}$$

Розкладемо ліву частину через скалярний добуток і оцінимо аналогічно до (15):

$$\begin{aligned}
& 2(u^n(t) - u(t), g(u_t) - g(u_t^n)) \\
& \leq 2|(u^n(t) - u(t), g(u_t) - g(u_t^n))| \\
& \leq \frac{1}{\epsilon} \|u^n(t) - u(t)\|^2 + \epsilon \|g(u_t^n) - g(u_t)\|^2 \\
& \leq \frac{1}{\epsilon} \|u^n(t) - u(t)\|^2 + L_1 \epsilon \int_{-h}^0 (\|u_t^n(\theta) - u_t(\theta)\|^2) d\theta \\
& = \frac{1}{\epsilon} \|u^n(t) - u(t)\|^2 + L_1 \epsilon \int_{-h}^0 (\|u^n(t + \theta) - u(t + \theta)\|^2) d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\epsilon} \|u^n(t) - u(t)\|^2 + L_1 \epsilon \int_{t-h}^t \left(\|u^n(s) - u(s)\|^2 \right) ds \\
&\leq \frac{1}{\epsilon} \|u^n(t) - u(t)\|^2 + L_1 \epsilon \int_0^t \left(\|u^n(s) - u(s)\|^2 \right) ds \\
&\quad + L_1 \epsilon \int_{-h}^0 \left(\|u^n(s) - u(s)\|^2 \right) ds = \frac{1}{\epsilon} \|u^n(t) - u(t)\|^2 \\
&\quad + L_1 \epsilon \int_0^t \left(\|u^n(s) - u(s)\|^2 \right) ds + L_1 \epsilon \int_{-h}^0 \left(\|\phi^n(s) - \phi(s)\|^2 \right) ds \\
&\leq \frac{1}{\epsilon} \|u^n(t) - u(t)\|^2 + L_1 \epsilon \int_0^t \left(\sup_{s_1 \in [0, s]} \|u^n(s_1) - u(s_1)\|^2 \right) ds \\
&\quad + L_1 \epsilon \int_{-h}^0 \left(\|\phi^n(s) - \phi(s)\|^2 \right) ds.
\end{aligned}$$

Для будь-якого $R > 0$ визначимо моменти зупинки

$$\tau_n(R) = \inf_{s \in [0, T]} \left(\sup_{0 \leq s_1 \leq s} \|u_{s_1}^n\|_C \geq R \wedge \sup_{0 \leq s_1 \leq s} \|u_{s_1}\|_C \geq R \right).$$

Відповідно $\sup_{t \in [0, T]} \|u_t^n\|_C \leq R$ і $\sup_{t \in [0, T]} \|u_t\|_C \leq R$ на $[0, \tau_n(R)] \cap [0, T]$.

Провівши тепер міркування, аналогічні до встановлення єдиності, з використанням ліпшицевості g , локальної ліпшицевості f та леми 1 одержимо

$$\begin{aligned}
\|u^n(t) - u(t)\|^2 &\leq \|\phi^n(0) - g(\phi^n) - \phi(0) + g(\phi)\|^2 \\
&\quad + K_\epsilon \int_{-h}^0 \left(\|\phi^n(s) - \phi(s)\|^2 \right) ds + M(t) + 2C_{R,1} \int_0^t \|u_s^n - u_s\|_C^2 ds.
\end{aligned}$$

Звідси за допомогою стохастичної леми Гронуолла (випадок 3) отримаємо

$$\begin{aligned}
&E \left(\sup_{t \in [0, \tau_n(R)]} \|u^n(t) - u(t)\|^2 \right)^\alpha \\
&\leq (C_\alpha + 1) e^{\alpha C_{R,1} T} E \left(\|\phi^n(0) - g(\phi^n) - \phi(0) + g(\phi)\|^2 \right. \\
&\quad \left. + K_\epsilon \int_{-h}^0 \left(\|\phi^n(s) - \phi(s)\|^2 \right) ds \right)^\alpha.
\end{aligned}$$

Окрім цього, маємо

$$K_\epsilon \int_{-h}^0 \left(\|\phi^n(s) - \phi(s)\|^2 \right) ds \leq K_\epsilon h \|\phi^n - \phi\|_C^2.$$

А тому випливає, що для $\alpha \in (0, 1)$

$$E \left(\sup_{t \in [0, \tau_n(R)]} \|u^n(t) - u(t)\|^{2\alpha} \right) \leq C(T, R) \left(\|\phi^n(0) - \phi(0)\|^{2\alpha} + \|\phi^n - \phi\|_C^{2\alpha} \right).$$

Розглянемо ймовірність

$$P \left\{ \sup_{t \in [0, \tau_n(R)]} \|u^n(t) - u(t)\| > \epsilon \right\}.$$

З нерівності Чебишова для всіх $\beta \in (0, +\infty)$ отримаємо

$$\begin{aligned} P \left\{ \sup_{t \in [0, \tau_n(R)]} \|u^n(t) - u(t)\| > \epsilon \right\} &\leq \frac{1}{\epsilon^\beta} E \left(\sup_{t \in [0, \tau_n(R)]} \|u^n(t) - u(t)\| \right)^\beta \\ &\leq \frac{1}{\epsilon^{2\alpha}} E \left(\sup_{t \in [0, \tau_n(R)]} \|u^n(t) - u(t)\|^{2\alpha} \right) \\ &\leq \frac{1}{\epsilon^{2\alpha}} C(T, R) \left(\|\phi^n(0) - \phi(0)\|^{2\alpha} + \|\phi^n - \phi\|_C^{2\alpha} \right). \end{aligned}$$

Відповідно можемо стверджувати, що оскільки $\phi^n \rightarrow \phi$ при $n \rightarrow \infty$ незалежно від R , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \sup_{t \in [0, \tau_n(R)]} \|u^n(t) - u(t)\| > \epsilon \right\} = 0. \quad (17)$$

А тому маємо потрібну збіжність за ймовірністю для всіх t до моменту зупинки $\tau_n(R)$. Але оскільки u^n і u є розв'язками задачі (1), (2), то, як і вище, $\lim_{R \rightarrow \infty} \tau_n(R) = T$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тому в (17) маємо збіжність за ймовірністю при всіх $t \in [0, T]$. А того що u^n і u — розв'язки задач (1), (2), то завдяки їхній єдиності можна стверджувати, що

$$\sup_{n \geq 1} E \sup_{t \in [0, T]} \|u^n(t)\|^4 < \infty.$$

Тому з теореми Віталі випливає

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \sup_{t \in [0, T]} \|u^n(t) - u(t)\|^2 = 0.$$

Останнє й доводить теорему.

Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів. Усі необхідні дані містяться в статті. Всі автори зробили рівномірний внесок у цю роботу.

Дослідження Андрія Станжицького частково підтримано грантом Відділення цільової підготовки Київського національного університету імені Тараса Шевченка при НАН України ЗМ-2024 “Якісний аналіз і керування у нелінійних інтегро-диференціальних рівняннях із імпульсними та стохастичними збуреннями”, державний реєстраційний номер 0124U002140.

Дослідження Юрія Перестюка виконано у рамках проекту науково-дослідної роботи № 24БФ038-01 “Асимптотична поведінка, стійкість і керованість у нескінченновимірних еволюційних системах із детермінованими та випадковими збуреннями”.

Література

1. J. K. Hale, *Theory of functional differential equations*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg (1977).
2. E. F. Tsar'kov, *Random perturbations of functional differential equations*, Zinatne, Riga (1989).
3. O. M. Stanzhytskyi, G. O. Petryna, N. L. Denysenko, *Asymptotic behavior of the solutions of stochastic functional-differential equations*, J. Math. Sci. (N.Y.), **278**, № 6, 1102 – 1112 (2024).
4. G. O. Petryna, M. V. Hrysenko, O. M. Stanzhytskyi, *On the asymptotic equivalence of ordinary and functional stochastic differential equations*, J. Optim. Differ. Equat. Appl., **31**(1), 125 – 142 (2023).
5. О. М. Станжицький, *Дослідження експоненціальної дихотомії стохастичних систем Іто за допомогою квадратичних форм*, Укр. мат. журн., **53**, № 11, 1545 – 1555 (2001); **English translation:** Ukr. Math. J., **53**, № 11, 1882 – 1894 (2001).
6. O. Butkovsky, M. Scheutzw, *Invariant measures for stochastic functional differential equations*, Electron. J. Probab., **22** (2017).
7. O. Misiats, O. Stanzhytskyi, N. K. Yip, *Asymptotic analysis and homogenization of invariant measure*, Stoch. Dyn., **19**, № 2 (2019).
8. J. Clark, O. Misiats, V. Mogylova, O. Stanzhytskyi, *Asymptotic behavior of stochastic functional differential evolution equation*, Electron. J. Differential Equations, **2023**, № 35, 1 – 21 (2023).
9. J. Cui, L. Yan, X. Sun, *Existence and stability for stochastic partial differential equations with infinite delay*, Abstr. Appl. Anal., Article ID 235937 (2014); DOI: <https://doi.org/10.1155/2014/235937>.
10. T. Taniguchi, K. Liu, A. Truman, *Existence, uniqueness, and asymptotic behavior of mild solutions to stochastic functional differential equations in Hilbert spaces*, J. Differential Equations, **181**, 72 – 91 (2002).
11. A. O. Stanzhytsky, *On weak and strong solutions of paired stochastic functional differential equations in infinite-dimensional spaces*, J. Optim. Differ. Equat. Appl., **29**(2), 48 – 75 (2021).
12. O. M. Stanzhytskyi, V. V. Mogilova, A. O. Tsukanova, *On comparison results for neutral stochastic differential equations of reaction-diffusion type in $L^2(d)$* , Understanding Complex Systems, Springer, Cham (2019), pp. 351 – 395.
13. A. Stanzhytsky, O. Misiats, O. Stanzhytskyi, *Invariant measure for neutral stochastic functional differential equations with non-Lipschitz coefficients*, Evol. Equat. Control Theory, **11**, № 6, 1929 – 1953 (2022).
14. A. Anguraj, A. Vinodkumar, *Existence, uniqueness and stability of impulsive stochastic partial neutral functional differential equations with infinite delays*, J. Appl. Math. Inform., **28**, 75 – 739 (2010).
15. A. M. Samoilenko, N. I. Mahmudov, O. M. Stanzhytskyi, *Existence, uniqueness and controllability results for neutral FSDES in Hilbert spaces*, Dynam. Systems Appl., **17**, 53 – 70 (2008).
16. K. Liu, *Stationary solutions of neutral stochastic partial differential equations with delays in the highest-order derivatives*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, **23**, 3915 – 3934 (2018).
17. S. Mehri, M. Scheutzw, *A stochastic Gronwall lemma and well-posedness of path-dependent SDEs driven by martingale noise*, arXiv:1908.10646v1 (2019).
18. A. V. Skorohod, *Random linear operators*, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht (1984).
19. T. Yamada, S. Watanabe, *On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations*, J. Math. Kyoto University, **11**, 155 – 167 (1971).

Одержано 01.03.24