

## СТІЙКІСТЬ ГЛОБАЛЬНОГО АТРАКТОРА РІВНЯННЯ РЕАКЦІЇ-ДИФУЗІЇ ЩОДО ЗБУРЕНЬ НА ГРАНИЦІ ОБЛАСТІ

Олексій Капустян, Анна Краснеєва

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка*

*вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна*

*e-mail: kapustyan@knu.ua, відповідальний за листування,*

*krasnyeyeva@gmail.com*

We consider the qualitative behavior of solutions of the reaction-diffusion parabolic-type equation with nonautonomous bounded disturbances  $d(t)$  at the boundary of the domain. In the undisturbed case ( $d \equiv 0$ ), this problem generates a dissipative dynamical system with a global attractor  $\Theta$  in the phase space  $L^2$ . Under general conditions for input data, we prove a robust estimate for solutions of the disturbed problem, which characterizes the stability of the attractor  $\Theta$  with respect to the quantity  $d(t)$ .

Розглянуто якісну поведінку розв'язків параболічного рівняння типу реакція-дифузія з неавтономними обмеженими збуреннями  $d(t)$  на межі області. У незбуреному випадку ( $d \equiv 0$ ) така задача у фазовому просторі  $L^2$  породжує дисипативну динамічну систему, що має глобальний аттрактор  $\Theta$ . При загальних умовах на вхідні дані доведено робастну оцінку для розв'язків збуреної задачі, що характеризує стійкість аттрактора  $\Theta$  щодо величини  $d(t)$ .

**Вступ.** Важливою частиною якісної теорії дисипативних автономних задач математичної фізики є теорія глобальних атракторів — компактних інваріантних рівномірно притягуючих підмножин нескінченновимірного фазового простору [1, 2]. Для параболічних рівнянь і систем типу реакція-дифузія при досить загальних умовах на вхідні дані, в які входять імпульсні, сингулярні та стохастичні збурення, існування і властивості рівномірно притягуючих множин досліджено в [3–9]. За наявності в задачі неавтономних збурень виникає питання про оцінку відхилення траєкторій збуреної задачі від глобального аттрактора. Для систем звичайних диференціальних рівнянь такі оцінки шукають за допомогою методів теорії стійкості від входу до стану (Input-to-State Stability) [10]. Результати щодо таких робастних оцінок для рівнянь із частинними похідними у випадку глобально асимптотично стійкого положення рівноваги (тривіального аттрактора) одержано в [11]. Для нетривіального аттрактора в роботах [12–15] обґрунтовано схему виведення робастних оцінок у випадку неавтономних збурень у правій частині рівняння. У цій статті ми застосовуємо модифікований варіант цієї схеми для дослідження стійкості аттрактора у випадку збурень на межі області.

**Постановка задачі.** Щодо функції  $y = y(t, x)$ ,  $t > 0$ ,  $x \in (0, l)$ , розглядаємо початково-крайову задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial x^2} &= f(y(t, x)), \\ y|_{x=0} &= d_1(t), \quad y|_{x=l} = d_2(t), \\ y|_{t=0} &= y_0(x). \end{aligned} \tag{1}$$

Тут  $d := \{d_1, d_2\} \in \mathcal{U} \subseteq (L^\infty(\mathbb{R}_+))^2$  визначають збурення, початкова функція  $y_0$  належить до фазовому простору  $X = L^2(0, l)$  із нормою  $\|\cdot\|$ ,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — задана нелінійна функція взаємодії типу реакція-дифузія, тобто  $f \in C^1(\mathbb{R})$ ,  $f(0) = 0$ , та існують константи  $C \geq 0$ ,  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ ,  $p \geq 2$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  такі, що

$$\begin{aligned} \forall s \in \mathbb{R} \quad -C - \alpha_1|s|^p \leq f(s)s \leq C - \alpha_2|s|^p, \\ f'(s) \leq \lambda. \end{aligned} \quad (2)$$

Класичним прикладом є рівняння Чаффе – Інфанте з  $f(s) = \lambda(s - s^3)$  [1].

Позначимо  $y(t, y_0, d)$  розв'язок задачі (1). У незбуреному випадку ( $d \equiv 0$ ) відомо [1], що за умов (2) розв'язки (1) породжують у  $X = L^2(0, l)$  динамічну систему  $\{S(t): X \rightarrow X\}_{t \geq 0}$ ,  $S(t)y_0 = y(t, y_0, 0)$ , яка має в  $X$  глобальний аттрактор, тобто існує компактна множина  $\Theta \subset X$  така, що

$$\forall t \geq 0 \quad S(t)\Theta = \Theta,$$

$$\text{для будь-якої обмеженої } B \subset X \quad \text{dist}(S(t)B, \Theta) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Далі будемо позначати

$$\text{dist}(A_1, A_2) = \sup_{\xi_1 \in A_1} \inf_{\xi_2 \in A_2} \|\xi_1 - \xi_2\|,$$

$$\|A\|_\Theta = \text{dist}(A, \Theta),$$

$$B_r(\Theta) = \{y \in X \mid \|y\|_\Theta \leq r\},$$

$$\mathcal{K} = \{\gamma \in C(\mathbb{R}_+) \mid \gamma(0) = 0, \gamma \text{ строго зростає}\},$$

$$\mathcal{KL} = \{\beta \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+) \mid \beta(0, 0) = 0, \beta(\cdot, t) \in \mathcal{K}, \beta(s, \cdot) \text{ строго спадає до } 0\}.$$

У роботі за деяких додаткових умов на параметри буде доведено локальну стійкість від входу до стану щодо збурень  $d$ , тобто те, що в деякому околі вхідних даних існують функції  $\beta \in \mathcal{KL}$ ,  $\gamma \in \mathcal{K}$  такі, що

$$\forall t \geq 0 \quad \|y(t, y_0, d)\|_\Theta \leq \beta(\|y_0\|_\Theta, t) + \gamma(\|d\|_\infty), \quad (3)$$

де  $\|d\|_\infty = \max\{\|d_1\|_\infty, \|d_2\|_\infty\}$ ,  $\|\cdot\|_\infty$  — норма в  $L^\infty(\mathbb{R}_+)$ .

**Основні результати.** Нехай множина збурень  $U \subset (L^\infty(\mathbb{R}_+))^2$  складається з тих  $d = \{d_1, d_2\} \in (L^\infty(\mathbb{R}_+))^2$ , для яких  $d_i$  абсолютно неперервні,  $d_i(0) = 0$ ,  $i = 1, 2$ , і  $\|d\|_\infty \leq R$ . Тоді  $0 \in U$ ,  $U$  — трансляційно-інваріантна множина, тобто

$$\forall h \geq 0 \quad \forall d \in U \quad d(\cdot + h) \in U.$$

При цьому  $\|d(\cdot + h)\|_\infty \leq \|d\|_\infty$ .

Нехай  $w = w(t, x)$  — розв'язок задачі

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} &= 0, \\ w|_{x=0} &= d_1(t), \quad w|_{x=l} = d_2(t), \\ w|_{t=0} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Оскільки  $d \in U$ , то згідно з принципом максимуму [16]

$$\|w\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{x \in (0,l), t > 0} |w(t, x)| \leq \|d\|_\infty \leq R. \quad (5)$$

Розв'язок (1) будемо розуміти як  $y = v + w$ , де  $w$  — розв'язок (4),  $v = v(t, x)$  — слабкий розв'язок задачі

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} &= f(v(t, x) + w(t, x)), \\ v|_{x=0} &= v|_{x=l} = 0, \\ v|_{t=0} &= y_0(x). \end{aligned} \quad (6)$$

Проаналізуємо розв'язність задачі (6) у випадку довільної функції  $w \in L^\infty((0, l) \times (0, +\infty))$ , що задовольняє (5).

Позначимо клас таких функцій  $w$  через  $W$ .

Для нелінійності  $g(t, x, s) = f(s + w(t, x))$ , де  $w \in W$ , згідно з (5) виконуються умови:  $\forall s \in \mathbb{R}$ , для майже всіх (м.в.)  $t > 0$ ,  $x \in (0, l)$

$$\begin{aligned} -\bar{C} - \bar{\alpha}_1 |s|^p &\leq g(t, x, s) \leq \bar{C} - \bar{\alpha}_2 |s|^p, \\ g'_s(t, x, s) &\leq \lambda, \end{aligned} \quad (7)$$

де константи  $\bar{C} \geq C$ ,  $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2 > 0$  залежать лише від  $R$ .

Умови (7) гарантують [4], що  $\forall y_0 \in X$ ,  $w \in W$  задача (6) має єдиний слабкий розв'язок  $v = v(t, x) \in \mathbb{C}([0, +\infty); X)$ , причому  $\forall t \geq \tau \geq 0$  виконуються оцінки

$$\left( \|v(t)\|^2 - \frac{\bar{C}l}{\lambda_1} \right) e^{2\lambda_1 t} \leq \left( \|v(\tau)\|^2 - \frac{\bar{C}l}{\lambda_1} \right) e^{2\lambda_1 \tau}, \quad (8)$$

$$\|v(t)\|^2 + 2 \int_\tau^t \|v(s)\|_{H_0^1}^2 ds + 2\bar{\alpha}_2 \int_\tau^t \|v(s)\|_{L^p}^p ds \leq \|v(\tau)\|^2 + 2\bar{C}l(t - \tau), \quad (9)$$

де  $\lambda_1 > 0$  — константа з нерівності Пуанкаре.

Позначимо для  $t \geq \tau \geq 0$ ,  $y_\tau \in X$ ,  $d \in U$

$$S_d(t, \tau, y_\tau) = v(t) + w(t), \quad (10)$$

де  $w$  — розв'язок (4) на  $[\tau, +\infty)$ ,  $w(\tau) = 0$ ,  $v$  — розв'язок (6) на  $[\tau, +\infty)$ ,  $v(\tau) = y_\tau$ .

Тоді  $\{S_d\}_{d \in U}$  є сім'єю напівпроцесів [12], тобто

$$\begin{aligned} S_d(\tau, \tau, y_\tau) &= y_\tau, \quad \tau \geq 0, \\ S_d(t, s, S_d(s, \tau, y_\tau)) &= S_d(t, \tau, y_\tau), \quad t \geq s \geq \tau, \\ S_d(t + h, \tau + h, y_\tau) &= S_d(\cdot + h)(t, \tau, y_\tau), \quad t \geq \tau, \quad h \geq 0. \end{aligned} \quad (11)$$

При  $d \equiv 0$   $S_0(t, 0, y_0) = S(t)y_0 = u(t)$  визначає розв'язок незбуреної задачі

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} &= f(u(t, x)), \\ u|_{x=0} &= u|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} &= y_0(x). \end{aligned} \quad (12)$$

Розв'язок (12) задовольняє оцінки (8), (9) і, крім того, виконується нерівність

$$\forall t \geq 0 \quad \|S_0(t, 0, y_0^{(1)}) - S_0(t, 0, y_0^{(2)})\| \leq e^{\lambda t} \|y_0^{(1)} - y_0^{(2)}\|. \quad (13)$$

Напівгрупа  $\{S(t): X \rightarrow X\}_{t \geq 0}$ , породжена (12), за умов (2) має глобальний аттрактор  $\Theta$  [1], причому згідно з оцінкою (8)

$$\forall \xi \in \Theta \quad \|\xi\| \leq \frac{\bar{C}l}{\lambda_1}.$$

Також для  $t \geq \tau \geq 0$ ,  $w \in W$ ,  $y_\tau \in X$  введемо до розгляду  $V_w(t, \tau, y_\tau) = v(t)$ , де  $v$  — розв'язок (6) з початковими даними  $v(\tau) = y_\tau$  і  $w \in W$ . Оскільки  $W$  є трансляційно-інваріантною множиною, то  $\{V_w\}_{w \in W}$  є сім'єю напівпроцесів у сенсі (11),  $V_0(t, 0, y_0) = S_0(t, 0, y_0)$ .

Зауважимо, що множина  $W$  включає в себе розв'язки (4) і якщо  $w$  — розв'язок (4), то

$$\forall t \geq 0, \quad \forall y_0 \in X \quad S_d(t, 0, y_0) = V_w(t, 0, y_0) + w(t). \quad (14)$$

Наступний результат для довільної сім'ї напівпроцесів  $\{S_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$ , де  $\Sigma \subseteq L^\infty$  трансляційно-інваріантна,  $0 \in \Sigma$ , обумовлює властивість локальної робастної стійкості аттрактора  $\Theta$  напівгрупи  $S_0$ , що задовольняє (13).

**Лема 1** [14]. Нехай існують  $\alpha \in \mathcal{K}$ , неперервна  $\eta: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\eta(r, t)}{t} < \infty$  такі, що  $\forall y \in X: \|y\| \leq r$ ,  $\forall \sigma \in \Sigma: \|\sigma\|_\infty \leq r$ ,

$$\forall t \in [0, 1] \quad \|S_\sigma(t, 0, y) - S_0(t, 0, y)\| \leq \eta(r, t)\alpha(\|\sigma\|_\infty). \quad (15)$$

Тоді існують  $r_0 > 0$ ,  $\beta \in \mathcal{KL}$ ,  $\gamma \in \mathcal{K}$  такі, що  $\forall y_0 \in B_{r_0}(\Theta)$ ,  $\forall \sigma \in \Sigma: \|\sigma\|_\infty \leq r_0$ ,

$$\forall t \geq 0 \quad \|S_\sigma(t, 0, y_0)\|_\Theta \leq \beta(\|y_0\|_\Theta, t) + \gamma(\|\sigma\|_\infty). \quad (16)$$

**Теорема 1.** Нехай виконуються умови (2) і, крім того,

$$\exists C_1 > 0 \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad |f'(s)| \leq C_1(1 + |s|). \quad (17)$$

Тоді сім'я напівпроцесів  $S_d$ , означена в (10), задовольняє властивість локальної стійкості від входу до стану (16).

**Доведення.** Достатньо встановити оцінку (16) для сім'ї напівпроцесів  $\{V_w\}_{w \in W}$ . Тоді для  $S_d(t, 0, y_0) = V_w(t, 0, y_0) + w(t)$  з урахуванням включення  $0 \in \Theta$  і оцінки (5) маємо

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0 \quad \|S_d(t, 0, y_0)\|_\Theta &\leq \|V_w(t, 0, y_0)\|_\Theta + \|w(t)\|_\Theta \\ &\leq \beta(\|y_0\|_\Theta, t) + \gamma(\|w\|_\infty) + \|w(t)\| \leq \beta(\|y_0\|_\Theta, t) + \gamma_1(\|d\|_\infty), \end{aligned} \quad (18)$$

де  $\gamma_1(s) = \gamma(s) + s$ ,  $\gamma_1 \in \mathcal{K}$ .

Таким чином, згідно з лемою 1 потрібно встановити оцінку (15) для  $V_w$ .

Нехай  $v(t) = V_w(t, 0, y_0)$ ,  $u(t) = S_0(t, 0, y_0)$ ,  $\|y_0\| \leq r$ . Тоді для  $z(t) = v(t) - u(t)$  маємо задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial z(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 z(t, x)}{\partial x^2} &= f(v(t, x) + w(t, x)) - f(u(t, x)), \\ z|_{x=0} &= z|_{x=l} = 0, \\ z|_{t=0} &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Домножуючи (19) на  $z(t)$  у  $L^2(0, l)$ , для майже всіх  $t > 0$  одержуємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z(t)\|^2 + \|z(t)\|_{H_0^1}^2 &= \int_0^l f'(\theta)(z + w)z \, dx \\ &\leq \lambda \|z(t)\|^2 + \int_0^l |f'(\theta)| |z| |w| \, dx. \end{aligned} \quad (20)$$

Оскільки  $|\theta| \leq |v| + |u| + R$ , то з (8), (17), (20) отримуємо з урахуванням неперервності  $t \mapsto \|z(t)\|$  оцінку

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, 1] \quad \|z(t)\|^2 &\leq 2\lambda \int_0^t \|z(s)\|^2 \, ds + 2\|w\|_\infty \int_0^t \|f'(\theta)\| \|z(s)\| \, ds \\ &\leq 2\lambda \int_0^t \|z(s)\|^2 \, ds + 2\|w\|_\infty \max_{s \in [0, 1]} \|z(s)\| \int_0^t \|f'(\theta)\| \, ds \\ &\leq 2\lambda \int_0^t \|z(s)\|^2 \, ds + 2\|w\|_\infty \max_{s \in [0, 1]} \|z(s)\| C(r) t, \end{aligned}$$

де  $C(r) = 4C_1(R\sqrt{l} + r + \sqrt{C})$ .

Тоді з нерівності Гронуолла маємо

$$\forall t \in [0, 1] \quad \|z(t)\|^2 \leq 2\|w\|_\infty \max_{s \in [0, 1]} \|z(s)\| C(r) e^{2\lambda} t.$$

Отже,

$$\forall t \in [0, 1] \quad \|z(t)\| \leq 2C(r) e^{2\lambda} t \|w\|_\infty. \quad (21)$$

З (21), покладаючи  $\eta(r, t) = 2C(r) e^{2\lambda} t$ ,  $\alpha(p) = p$ , одержуємо (15).

Теорему 1 доведено.

**Зауваження.** Умова (17) є досить жорсткою і не охоплює, зокрема, рівняння Чаффе–Інфанте. Її можна позбутись, якщо дещо звужити клас вхідних даних. Вибір такого класу,

очевидно, має бути продиктовано властивостями глобального атрактора  $\Theta$  як рівномірно притягуючої множини. Оскільки за умов (2) глобальний аттрактор  $\Theta$  є обмеженою множиною в  $L^\infty(0, l)$ , то можемо розглядати клас обмежених початкових функцій. Ще одним аргументом на користь вибору такого класу може слугувати той факт, що довільний розв'язок (6) належить класу  $\mathbb{C}((0, T]; H_0^1(0, l))$  [3]. Отже, згідно з вкладенням  $H_0^1(0, l) \subset L^\infty(0, l)$  у кожен додатний момент часу розв'язок (6) належить  $L^\infty(0, l)$ .

Введемо до розгляду множину

$$Y = \{y \in L^\infty(0, l) \mid \|y\|_\infty \leq M\}, \quad M = \left\{ \frac{\bar{C}}{\bar{\alpha}_2} \right\}^{\frac{1}{p}}. \quad (22)$$

**Теорема 2.** *Нехай виконуються умови (2). Тоді сім'я напівпроцесів  $\{S_d\}_{d \in U}$ , означена у (10), має властивість*

$$\begin{aligned} \exists r > 0, \quad \exists \beta \in \mathcal{KL}, \quad \exists \gamma \in \mathcal{K} \quad \forall y_0 \in Y: \quad y_0 \in B_r(\Theta), \quad \forall d \in U: \quad \|d\|_\infty \leq r, \\ \forall t \geq 0 \quad \|S_d(t, 0, y_0)\|_\Theta \leq \beta(\|y_0\|_\Theta, t) + \gamma(\|d\|_\infty). \end{aligned} \quad (23)$$

**Доведення.** Аналогічно до (18), достатньо встановити оцінку (23) для сім'ї напівпроцесів  $\{V_w\}_{w \in W}$ .

Спочатку покажемо, що будь-якого  $w \in W$  виконується вкладення

$$\forall t \geq \tau \geq 0 \quad V_w(t, \tau, Y) \subset Y. \quad (24)$$

Нехай  $v = v(t, x)$  — розв'язок (6) на  $[\tau, +\infty)$  з початковим значенням  $v(\tau) \in Y$ . Домножимо (6) у  $L^2(0, l)$  на  $(v - M)_+ = \max\{0, v - M\}$ . Тоді з [1] для м.в.  $t > \tau$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(v - M)_+\|^2 + \|(v - M)_+\|_{H_0^1}^2 = \int_0^l g(t, x)(v(t, x) - M)_+ dx, \quad (25)$$

де  $g(t, x) = f(v(t, x) + w(t, x))$ .

Якщо  $v(t, x) \leq M$ , то  $g(t, x)(v(t, x) - M)_+ = 0$ .

Якщо  $v(t, x) > M$ , то згідно з (7) одержуємо

$$\begin{aligned} g(t, x)(v(t, x) - M)_+ &= g(t, x)(v(t, x) \frac{v(t, x) - M}{v(t, x)}) \\ &= g(t, x)v(t, x) \left(1 - \frac{M}{v(t, x)}\right) \\ &\leq (\bar{C} - \bar{\alpha}_2 |v(t, x)|^p) \left(1 - \frac{M}{v(t, x)}\right) \\ &\leq (\bar{C} - \bar{\alpha}_2 M^p) \left(1 - \frac{M}{v(t, x)}\right) = 0. \end{aligned}$$

Оскільки  $v(\tau, x) \leq M$  для м.в.  $x \in (0, l)$ , то з (25) маємо, що  $\forall t > \tau \quad \|(v(t) - M)_+\|^2 \leq 0$ , тобто  $v(t, x) < M$  майже скрізь.

Домножуючи (6) на  $(v+M)_- = \min\{0, v+M\}$ , з (7) аналогічно до попередніх міркувань одержуємо, що  $v(t, x) \geq -M$  майже скрізь. Звідси маємо (24).

Тоді для  $z(t) = V_w(t, 0, y_0) - S_0(t, 0, y_0)$  при  $y_0 \in Y$  з нерівності (20) виводимо, що

$$\forall t \in [0, 1] \quad \|z(t)\| \leq 2C(M)e^{2\lambda}t\|w\|_\infty, \quad (26)$$

де  $C(M) = \max_{|\theta| \leq 2M+R} \|f'(\theta)\|$ .

Тоді результати роботи [12] гарантують для довільного  $r_0 > 0$  існування функцій  $\underline{\psi}$ ,  $\bar{\psi}$ ,  $\alpha$ ,  $\sigma \in \mathcal{K}$ , ліпшицевої (з константою 1) функції  $\mathbb{V}: B_{r_0}(\Theta) \rightarrow \mathbb{R}_+$  таких, що

$$\forall y_0 \in B_{r_0}(\Theta) \cap Y \quad \forall w \in W \quad \underline{\psi}(\|y_0\|_\Theta) \leq \mathbb{V}(y_0) \leq \bar{\psi}(\|y_0\|_\Theta), \quad (27)$$

$$\dot{\mathbb{V}}_w(y_0) := \overline{\lim}_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\mathbb{V}(V_w(t, 0, y_0)) - \mathbb{V}(V_w(y_0))) \leq -\alpha(\|y_0\|_\Theta + \sigma(\|w\|_\infty)). \quad (28)$$

Тоді для  $\sigma_1(p) = \alpha^{-1}(2\sigma(p))$ ,  $\alpha_1(p) = \frac{1}{2}\alpha(p)$  маємо

$$\|y_0\|_\Theta \geq \sigma_1(\|w\|_\infty) \implies \dot{\mathbb{V}}_w(y_0) \leq -\alpha_1(\|y_0\|_\Theta). \quad (29)$$

Враховуючи нерівність  $\sup_{\xi \in \Theta} \|\xi\| \leq \frac{\bar{C}l}{\lambda_1}$ , виберемо  $r_0$  з умови

$$\left(\frac{r_0}{2} + \frac{\bar{C}l}{\lambda_1}\right)^2 + \frac{\bar{C}l}{\lambda_1} < r_0^2$$

і покладемо

$$Y_w := \{y \in B_{r_0}(\Theta) \cap Y \mid \mathbb{V}(y) \leq \bar{\psi}(\sigma_1(\|w\|_\infty))\}.$$

З (27) виводимо існування такого  $r_1 \leq r_0$ , що

$$w \in W: \quad \|w\|_\infty \leq r_1, \quad y \in Y_w \implies \|y\|_\Theta \leq \frac{r_0}{2}.$$

Нехай  $\|y_0\|_\Theta \leq \frac{r_0}{2}$ . Розглянемо два можливі випадки.

*Випадок 1.* Покажемо, що в цьому випадку

$$\forall t \geq \tau \geq 0 \quad V_w(t, \tau, Y_w) \subset Y_w. \quad (30)$$

Нехай  $y_\tau \in Y_w$  і  $v(t)$  — розв'язок (6) на  $[\tau; +\infty)$  з початковим значенням  $v(\tau) = y_\tau$ . Згідно з (24)  $v(t) \in Y \quad \forall t \geq \tau$ . Крім того, згідно з оцінкою (8) і вибором  $r_0$  маємо

$$\begin{aligned} \|y_\tau\|_\Theta \leq \frac{r_0}{2} &\implies \|y_\tau\| \leq \frac{r_0}{2} + \frac{\bar{C}l}{\lambda_1} \\ &\implies \forall t \geq \tau \quad \|v(t)\|_\Theta \leq \|v(t)\| \leq \sqrt{\left(\frac{r_0}{2} + \frac{\bar{C}l}{\lambda_1}\right)^2 + \frac{\bar{C}l}{\lambda_1}} < r_0 \\ &\implies v(t) \in B_{r_0}(\Theta) \cap Y. \end{aligned}$$

Припустимо, що властивість (30) не виконується. Це означає, що для деяких  $\epsilon > 0$  і  $t > \tau$

$$\mathbb{V}(v(t)) > \bar{\psi}(\sigma_1(\|w\|_\infty)) + \epsilon.$$

Покладемо

$$t_1 = \inf \{t > \tau \mid \mathbb{V}(v(t)) > \bar{\psi}(\sigma_1(\|w\|_\infty)) + \epsilon\}.$$

Тоді з (27) маємо

$$\bar{\psi}(\|v(t_1)\|_\Theta) > \mathbb{V}(v(t_1)) > \bar{\psi}(\sigma_1(\|w\|_\infty)) \geq \bar{\psi}(\sigma_1(\|w(\cdot + t_1)\|_\infty)).$$

З іншого боку з (28) і (29) виводимо

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{t} (\mathbb{V}(v(t_1 + t)) - \mathbb{V}(v(t))) &= \overline{\lim}_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{t} (\mathbb{V}(V_{w(\cdot+t_1)}(t, 0, v(t_1)) - \mathbb{V}(v(t_1)))) \\ &= \dot{\mathbb{V}}_{w(\cdot+t_1)}(v(t_1)) \leq -\alpha_1(\|v(t_1)\|_\Theta) < 0. \end{aligned}$$

З останньої нерівності одержуємо, що для деякого  $\delta > 0$

$$\mathbb{V}(v(t_1 + t)) \leq \mathbb{V}(v(t_1)) = \bar{\psi}(\sigma_1(\|w\|_\infty)) + \epsilon \quad \forall t \in [0, \delta),$$

що суперечить означенню точки  $t_1$ .

Отже, в межах цього випадку з (30) виводимо, що

$$\forall t \geq 0 \quad \|V_w(t, 0, y_0)\|_\Theta \leq \underline{\psi}^{-1}(\bar{\psi}(\sigma_1(\|w\|_\infty))).$$

Завдяки останньому переконуємося у виконанні (23) з  $r = \min\left\{\frac{r_0}{2}, r_1\right\}$ , довільною  $\beta \in \mathcal{KL}$  і  $\gamma = \underline{\psi}^{-1}(\bar{\psi}(\sigma_1))$ .

*Випадок 2.*  $y_0 \in B_{\frac{r_0}{2}}(\Theta) \cap Y$ , але  $y_0 \notin Y_w$ .

Тоді згідно з (8) і вибором  $r_0$  маємо, що  $\forall t \geq 0 \quad \|v(t)\|_\Theta < r_0$  і  $v(t) \in Y$ .

Оскільки  $Y_w$  замкнена, то наше припущення означає, що існує  $0 < T \leq +\infty$  таке, що

$$\forall t \in [0, T) \quad \|v(t)\|_\Theta \geq \sigma_1(\|w\|_\infty).$$

Тоді з (29) для неперервної функції  $q(t) = \mathbb{V}(v(t))$  маємо

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{\tau \rightarrow 0+} \frac{1}{\tau} (q(t + \tau) - q(t)) &= \overline{\lim}_{\tau \rightarrow 0+} \frac{1}{\tau} (\mathbb{V}(V_{w(\cdot+t)}(\tau, 0, v(t)) - \mathbb{V}(v(t))) \\ &\leq -\alpha_1(\|v(t)\|_\Theta) \leq -\alpha_1(\bar{\psi}^{-1}(\mathbb{V}(v(t)))) = -\alpha_1(\bar{\psi}_{-1}(q(t))). \end{aligned} \quad (31)$$

Згідно з [11] існує  $\bar{\beta} \in \mathcal{KL}$ , яка залежить від  $\alpha_1$ ,  $\bar{\psi}$ , така, що

$$\forall t \in [0, T) \quad q(t) \leq \bar{\beta}(q(0), t).$$

Тобто згідно з (27)

$$\forall t \in [0, T) \quad \|v(t)\|_\Theta \leq \underline{\psi}^{-1}(\bar{\beta}(\bar{\psi}(\|y_0\|_\Theta), t)).$$

Іншими словами,  $\exists \beta \in \mathcal{KL}$  така, що

$$\forall t \in [0, T) \quad \|V_w(t, 0, y_0)\|_\Theta \leq \beta(\|y_0\|_\Theta, t). \quad (32)$$

Якщо  $T = \infty$ , то доведення закінчене. Інакше при  $t = T$   $V_w(T, 0, y_0) \in Y_w$ ; отже, згідно з випадком 1 при  $t \geq T$

$$V_w(t, T, V_w(T, 0, y_0)) \in Y_w,$$

тобто

$$\|V_w(t, 0, y_0)\|_\Theta \leq \gamma(\|w\|_\infty) \quad \forall t \geq T. \quad (33)$$

З (32) і (33) маємо шукану оцінку (23).

Теорему 2 доведено.



Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів. Усі необхідні дані містяться в статті. Всі автори зробили рівномірний внесок у цю роботу і заявляють про відсутність спеціального фінансування для її виконання.

### Література

1. J. C. Robinson, *Infinite-dimensional dynamical systems. An introduction to dissipative parabolic PDEs and the theory of global attractors*, Cambridge University Press, Cambridge (2001).
2. R. Temam, *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, Appl. Math. Sci., **68**, Springer (1997).
3. A. V. Kapustyan, P. O. Kasyanov, J. Valero, *Structure of the global attractor for weak solutions of a reaction-diffusion equation*, Appl. Math. Inform. Sci., **9**, 2257 – 2264 (2015).
4. O. V. Kapustyan, N. V. Gorban, P. O. Kasyanov, *Uniform trajectory attractor for non-autonomous reaction-diffusion equations with Caratheodory's nonlinearity*, Nonlinear Anal., **98**, 13 – 26 (2014).
5. P. O. Kasyanov, L. Toscano, N. V. Zadoianchuk, *Long-time behaviour of solutions for autonomous evolution hemivariational inequality with multidimensional reaction-displacement law*, Abstr. Appl. Anal., 450984 (2012).
6. O. B. Капустян, М. О. Перестюк, *Глобальні аттрактори імпульсних нескінченновимірних систем*, Укр. мат. журн., **68**, No. 4, 517–528 (2016); **English translation:** Ukr. Math. J., **68**, No. 4, 583–597 (2016)).
7. S. Dashkovskiy, O. A. Kapustian, O. V. Kapustyan, N. V. Gorban, *Attractors for multivalued impulsive systems: existence and applications to reaction-diffusion system*, Math. Probl. Eng., Article No. 7385450 (2021).
8. O. A. Kapustian, O. V. Kapustyan, A. Yu. Ryzhov, V. V. Sobchuk, *Approximate optimal control for a parabolic system with perturbations in the coefficients on the Half-Axis*, Axioms, **11**, № 4, 175 – 000 (2022).
9. O. Misiats, O. Stanzhytskiy, N. K. Yip, *Invariant measures for stochastic reaction–diffusion equations with weakly dissipative nonlinearities*, Stochastics, **92**, № 8, 1197 – 1222 (2020).
10. E. D. Sontag, *Mathematical control theory. Deterministic finite-dimensional systems*, Springer-Verlag, New York (1998).
11. S. Dashkovskiy, A. Mironchenko, *Input-to-state stability of infinite-dimensional control systems*, Math. Control Signals Systems, **25**, 1 – 35 (2013).
12. S. Dashkovskiy, O. Kapustyan, J. Schmid, *A local input-to-state stability result w.r.t. attractors of nonlinear reaction-diffusion equations*, Math. Control Signals Systems, **32**, 309 – 326 (2020).
13. O. Kapustyan, S. Dashkovskiy, J. Schmid, *Asymptotic gain results for global attractors of semilinear systems*, Math. Control Relat. Fields, **12**, № 3, 763 – 788 (2022).
14. O. Kapustyan, S. Dashkovskiy, *Robustness of global attractors: abstract framework and application to dissipative wave equation*, Evol. Equat. Control Theory, **11**, № 5, 1565 – 1577 (2022).
15. O. B. Капустян, Т. В. Юсипів, *Стійкість до збурень для атрактора дисипативної системи типу PDE–ODE*, Нелін. коливання, **24**, № 3, 336 – 341 (2023); **English translation:** J. Math. Sci., **272**, № 2, 236 – 243 (2023).
16. L. C. Evans, *Partial differential equations*, AMS (1997).

Одержано 10.04.24