

ОЦІНКИ НАБЛИЖЕНЬ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИМИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ПОЛІНОМАМИ НА КЛАСАХ ЗГОРТОК ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ВИСОКОЇ ГЛАДКОСТІ

Анатолій Сердюк, Тетяна Степанюк

Інститут математики НАН України

вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна

e-mail: serdyuk@imath.kiev.ua,

tstepaniuk@imath.kiev.ua, відповідальна за листування

We establish interpolation analogues of Lebesgue-type inequalities on the sets $C_{\beta}^{\psi} L_1$ of 2π -periodic functions f which are convolutions of the generating kernel $\Psi_{\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right)$, $\psi(k) \geq 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, with functions φ from L_1 . In the noted inequalities, for each $x \in \mathbb{R}$, the moduli of deviations $|f(x) - \tilde{S}_{n-1}(f; x)|$ of interpolation Lagrange polynomials $\tilde{S}_{n-1}(f; \cdot)$ are estimated via the best approximations of functions φ by trigonometric polynomials in L_1 -metrics. If the sequences $\psi(k)$ decrease to zero faster than any power function, then in many important cases, the obtained inequalities are asymptotically exact. In these cases, we also establish the asymptotic equalities for exact upper bounds of pointwise approximations by interpolation trigonometric polynomials on the classes of convolutions of the generating kernel Ψ_{β} with functions φ that belong to the unit ball from the space L_1 .

Встановлено інтерполяційні аналоги нерівностей типу Лебега на множинах $C_{\beta}^{\psi} L_1$ 2π -періодичних функцій f , які задано згортками твірного ядра $\Psi_{\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right)$, $\psi(k) \geq 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, з функціями φ із L_1 . У зазначених нерівностях при кожному $x \in \mathbb{R}$ модулі відхилень $|f(x) - \tilde{S}_{n-1}(f; x)|$ інтерполяційних поліномів Лагранжа $\tilde{S}_{n-1}(f; \cdot)$ оцінюють за допомогою найкращих наближень функцій φ тригонометричними поліномами в L_1 -метриках. Коли послідовності $\psi(k)$ спадають до нуля швидше за довільну степеневу функцію, тоді отримані нерівності в низці важливих випадків є асимптотично точними. У таких випадках встановлено також асимптотичні рівності для точних верхніх меж поточкових наближень інтерполяційними тригонометричними поліномами на класах згорток твірного ядра Ψ_{β} із функціями φ , що належать одиничній кулі з простору L_1 .

Вступ. Нехай L_p , $1 \leq p < \infty$, — простір 2π -періодичних сумовних у p -му степені на $[0, 2\pi)$ функцій f з нормою

$$\|f\|_{L_p} = \|f\|_p := \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}};$$

L_∞ — простір вимірних і суттєво обмежених 2π -періодичних функцій f з нормою

$$\|f\|_{L_\infty} = \|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_t |f(t)|;$$

C — простір неперервних 2π -періодичних функцій f з нормою

$$\|f\|_C = \max_t |f(t)|.$$

Нехай $\psi(k)$ — довільна фіксована послідовність невід'ємних дійсних чисел і β — фіксоване дійсне число. Позначимо через $C_\beta^\psi L_p$ множину 2π -періодичних функцій, які при всіх $x \in \mathbb{R}$ зображуються у вигляді згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_\beta(x-t) \varphi(t) dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in L_p, \quad \varphi \perp 1, \quad (1)$$

з твірним ядром Ψ_β вигляду

$$\Psi_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad \psi(k) \geq 0, \quad (2)$$

таким, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty. \quad (3)$$

Якщо функції f і φ пов'язані рівністю (1), то функцію f у цьому співвідношенні називають (ψ, β) -похідною функції φ і позначають через f_β^ψ . З іншого боку, функцію f у рівності (1) називають (ψ, β) -інтегралом функції φ і позначають через $\mathcal{J}_\beta^\psi \varphi$. Поняття (ψ, β) -похідної ((ψ, β) -інтеграла), які означалися в дещо інших термінах (за допомогою мультиплікаторів і зсувів аргументу), введено О. І. Степанцем (див., наприклад, [1–3]). Незважаючи на відмінність підходів до означення (ψ, β) -інтегралів і (ψ, β) -похідних у цій статті, порівняно, наприклад, із [3], зазначимо, що за виконання (2) і (3) (ψ, β) -інтеграли $\mathcal{J}_\beta^\psi \varphi$ для будь-якої $\varphi \in L_1$ можуть відрізнятися між собою залежно від вибору означення лише на множині міри нуль; аналогічно за виконання (2) і (3) і додаткової умови $\psi(k) > 0$ (ψ, β) -похідні f_β^ψ для будь-якої функції f вигляду (1) можуть відрізнятися лише на множині нульової міри.

Підмножину функцій f із $C_\beta^\psi L_p$ таких, що $f_\beta^\psi \in B_p$, де B_p — одинична куля у просторі L_p , тобто

$$B_p := \{\varphi : \|\varphi\|_p \leq 1\},$$

будемо позначати через $C_{\beta,p}^\psi$. Зрозуміло, що умова (3) гарантує неперервність твірного ядра $\Psi_\beta(t)$ вигляду (2), а отже, й істинність вкладення $C_{\beta,p}^\psi L_p \subset C$ ($C_{\beta,p}^\psi \subset C$).

Якщо $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 0$, то ядра $\Psi_\beta(t)$ є відомими ядрами Вейля – Надея $B_{r,\beta}(t)$ вигляду

$$B_{r,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad r > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

При цьому (ψ, β) -похідні f_β^ψ майже скрізь збігаються з (r, β) -похідними f_β^r у сенсі Вейля – Надя, а відповідні класи $C_{\beta,p}^\psi$ позначають через $W_{\beta,p}^r$ (див. [3], § 6–8, розд. 3). Коли $r \in \mathbb{N}$, $r = \beta$, тоді класи $W_{\beta,p}^r$ є відомими класами W_p^r 2π -періодичних функцій f , що мають абсолютно неперервні похідні $f^{(k)}$ до $(r-1)$ -го порядку включно і для яких $f^{(r)} \in B_p$. У зазначеному випадку f_β^r майже скрізь збігаються з $f^{(r)}$.

У випадку, коли $\psi(k) = e^{-\alpha k^r}$, $\alpha > 0$, $r > 0$, ядра $\Psi_\beta(t)$ вигляду (2) є узагальненими ядрами Пуассона, тобто $\Psi_\beta(t) = P_{\alpha,r,\beta}(t)$, де

$$P_{\alpha,r,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k^r} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad \alpha > 0, \quad r > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Породжені такими ядрами множини $C_\beta^\psi L_p$ і $C_{\beta,p}^\psi$ позначатимемо відповідно через $C_\beta^{\alpha,r} L_p$ і $C_{\beta,p}^{\alpha,r}$ і називатимемо множинами узагальнених інтегралів Пуассона, а (ψ, β) -похідні f_β^ψ і (ψ, β) -інтеграли $\mathcal{J}_\beta^\psi \varphi$ позначатимемо через $f_\beta^{\alpha,r}$ і $\mathcal{J}_\beta^{\alpha,r} \varphi$ відповідно.

Для довільних $r > 0$ множини $C_\beta^{\alpha,r} L_p$ і $C_{\beta,p}^{\alpha,r}$ є підмножинами множини 2π -періодичних нескінченно диференційовних дійснозначних функцій D^∞ , множина всіх нескінченно диференційовних 2π -періодичних функцій, тобто $C_\beta^{\alpha,r} \subset C_{\beta,p}^{\alpha,r} L_p \subset D^\infty$ (див., наприклад, [3, 4]). При $r = 1$ множини $C_\beta^{\alpha,r} L_p(C_{\beta,p}^{\alpha,r})$ є множинами інтегралів Пуассона гармонічних функцій і складаються з 2π -періодичних аналітичних функцій, що допускають регулярне продовження у смугу $|\operatorname{Im} z| < \alpha$ комплексної площини (див., наприклад, [3, с. 141]). При $r > 1$ множини $C_\beta^{\alpha,r} L_p(C_{\beta,p}^{\alpha,r})$ є множинами 2π -періодичних цілих функцій (див., наприклад, [3, с. 142]). Як показано у роботі [5], множини $C_\beta^{\alpha,r} L_p$ тісно пов'язані з відомими класами Жевре.

Ми досліджуємо апроксимативні властивості множин $C_\beta^\psi L_1$ і $C_{\beta,1}^\psi$ у випадку, коли у ролі агрегатів наближення виступають класичні інтерполяційні тригонометричні поліноми Лагранжа, задані непарним числом рівномірно розподілених вузлів інтерполяції.

Для будь-якої функції $f(x)$ із C через $\tilde{S}_{n-1}(f; x)$, $n \in \mathbb{N}$, будемо позначати тригонометричний поліном порядку $n-1$, що інтерполює $f(x)$ у вузлах $x_k^{(n-1)} = \frac{2k\pi}{2n-1}$, $k \in \mathbb{Z}$, тобто такий, що

$$\tilde{S}_{n-1}(f; x_k^{(n-1)}) = f(x_k^{(n-1)}), \quad k = 0, 1, \dots, 2n-2. \quad (6)$$

Поліном $\tilde{S}_{n-1}(f; \cdot)$, однозначно заданий інтерполяційними умовами (6), називають інтерполяційним поліномом Лагранжа, він може бути зображений у явному вигляді через ядро Діріхле

$$D_{n-1}(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \cos kt = \frac{\sin\left(n - \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}}$$

таким чином:

$$\tilde{S}_{n-1}(f; x) = \frac{2}{2n-1} \sum_{k=0}^{2n-2} f(x_k^{(n-1)}) D_{n-1}(x - x_k^{(n-1)}). \quad (7)$$

Нехай $\mathcal{T}_{2n-1}$ — простір усіх тригонометричних поліномів t_{n-1} порядку $n-1$ і $E_n(f)_{L_p}$ — найкраще наближення функції $f \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$, у L_p -метриці тригонометричними поліномами $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$, тобто

$$E_n(f)_{L_p} = \inf_{t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}} \|f - t_{n-1}\|_p,$$

а $E_n(f)_C$ — найкраще рівномірне наближення функції $f \in C$ тригонометричними поліномами t_{n-1} , тобто

$$E_n(f)_C = \inf_{t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}} \|f - t_{n-1}\|_C.$$

Позначимо через $\tilde{\rho}_n(f; \cdot)$ відхилення від функції $f \in C$ її інтерполяційного полінома Лагранжа $\tilde{S}_{n-1}(f; \cdot)$:

$$\tilde{\rho}_n(f; x) = f(x) - \tilde{S}_{n-1}(f; x). \quad (8)$$

Для модулів величин вигляду (8) має місце нерівність (див., наприклад, [6–8])

$$|f(x) - \tilde{S}_{n-1}(f; x)| \leq (1 + \bar{L}_n(x)) E_n(f)_C, \quad f \in C, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (9)$$

де

$$\bar{L}_n(x) = \frac{2}{2n-1} \sum_{k=0}^{2n-2} |D_{n-1}(x - x_k^{(n-1)})|. \quad (10)$$

Нерівність (9) є інтерполяційним аналогом класичної нерівності Лебега для сум Фур'є. У ній функцію $\bar{L}_n(x)$ вигляду (10) називають функцією Лебега інтерполяційного оператора $\tilde{S}_{n-1}$ вигляду (7).

Асимптотичну поведінку функції Лебега $\bar{L}_n(x)$ при $n \rightarrow \infty$ описує формула

$$\bar{L}_n(x) = \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \ln n + \mathcal{O}(1), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (11)$$

де $\mathcal{O}(1)$ — величина, рівномірно обмежена по x і по n (див., наприклад, [7, с. 66; 9]).

З урахуванням (11) нерівність (9) можна записати у вигляді

$$|\tilde{\rho}_n(f; x)| \leq \left(\frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \ln n + \mathcal{O}(1) \right) E_n(f)_C, \quad f \in C, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

Незважаючи на простоту й загальність, нерівність (12), як довів С. М. Нікольський [10], є асимптотично точною на класах диференційовних функцій W_∞^r , $r \in \mathbb{N}$.

Однак для класів нескінченно диференційовних, аналітичних або цілих функцій оцінки відхилень $|\tilde{\rho}_n(f; x)|$, що базуються на використанні нерівностей (9) (або (12)), перестають бути асимптотично точними і навіть можуть бути не точними за порядком.

У цій статті для функцій з множин $C_\beta^\psi L_1$, $\beta \in \mathbb{R}$, встановлено інтерполяційні аналоги нерівностей типу Лебега, в яких оцінки зверху величин $|\tilde{\rho}_n(f; x)|$, $x \in \mathbb{R}$, можна виразити через найкращі наближення $E_n(f_\beta^\psi)_{L_1}$. Тут також доведено асимптотичну непокрещуваність отриманих нерівностей на множинах $C_\beta^\psi L_1$ у випадках, коли послідовності $\psi(k)$ підпорядковані умові

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} k \psi(k+n)}{\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k)} = 0. \quad (13)$$

Як показано в [11], умову (13) задовольняє низка важливих послідовностей $\psi(k)$, які прямують до нуля при $k \rightarrow \infty$ швидше за довільну степеневу функцію.

Також у роботі знайдено розв'язок задачі Колмогорова – Нікольського для інтерполяційних поліномів Лагранжа $\tilde{S}_{n-1}(f; x)$ вигляду (7) на класах $C_{\beta,1}^{\psi}$ за умови, що ψ задовольняють умову (13), тобто встановлено асимптотичні при $n \rightarrow \infty$ рівності для величин

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,1}^{\psi}; x) = \sup_{f \in C_{\beta,1}^{\psi}} |\tilde{\rho}_n(f; x)|, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (14)$$

Зазначимо, що точні порядкові рівності для величин

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,p}^{\psi})_{L_s} = \sup_{f \in C_{\beta,p}^{\psi}} \|f - \tilde{S}_{n-1}(f)\|_s$$

і

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,p}^{\psi})_C = \sup_{f \in C_{\beta,p}^{\psi}} \|f - \tilde{S}_{n-1}(f)\|_C$$

при різних співвідношеннях між параметрами p і s , $0 < p, s < \infty$, впливають із робіт [12, 13].

Вивченню апроксимативних властивостей сум $\tilde{S}_{n-1}(f)$, на множинах (ψ, β) -диференційовних функцій, присвячено роботи [14–26].

Зокрема, у роботах [15, 19, 25, 26] встановлено асимптотичні рівності для величин $\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,\infty}^{\psi}; x)$, коли $C_{\beta,\infty}^{\psi}$ є класами нескінченно диференційовних, аналітичних і цілих функцій. У роботах [14, 16–18, 27] знайдено аналогічні рівності для величин $\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,1}^{\psi})_{L_1}$. Для класів аналітичних і цілих функцій $C_{\beta,p}^{\psi}$, $1 \leq p \leq \infty$, асимптотичні рівності для величин $\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,p}^{\psi}; x)$ встановлено в [20, 21]. На класах цілих функцій $C_{\beta,1}^{\psi}$ точну асимптотику величин $\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,1}^{\psi})_{L_p}$ при $1 \leq p \leq \infty$ встановлено в [24]. Крім того, у роботах [22, 23] знайдено точні значення величин $\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,2}^{\psi}; x)$. Незважаючи на інтенсивність досліджень у зазначеному напрямі, в загальному питанні про точну асимптотику величин $\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,1}^{\psi}; x)$ при $n \rightarrow \infty$ у випадку, коли послідовності $\psi(k)$ спадають до нуля швидше за будь-яку степеневу функцію, але повільніше за будь-яку геометричну прогресію, за виключенням деяких конкретних випадків, дотепер залишалося відкритим.

Зазначимо також, що ця робота тісно пов'язана із результатами роботи авторів [11], у якій за виконання умови (13) було знайдено асимптотично непокрашувані нерівності типу Лебега для сум Фур'є на множинах $C_{\beta}^{\psi} L_1$, а також знайдено розв'язок задачі Колмогорова – Нікольського для сум Фур'є S_{n-1} на класах $C_{\beta,1}^{\psi}$, тобто досліджено точну асимптотику величин

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta,1}^{\psi})_C = \sup_{f \in C_{\beta,1}^{\psi}} \|f - S_{n-1}(t)\|_C$$

при $n \rightarrow \infty$. Проблема, пов'язані із розв'язанням цієї задачі, присвячено роботи [3, 11, 28–39].

2. Наближення інтерполяційними поліномами Лагранжа на множинах згорток періодичних функцій.

Теорема 1. Нехай $\sum_{k=1}^{\infty} k\psi(k) < \infty$, $\psi(k) \geq 0$, $k = 1, 2, \dots$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$. Тоді для всіх $x \in \mathbb{R}$ і довільної функції $f \in C_{\beta}^{\psi} L_1$ має місце нерівність

$$|\tilde{\rho}_n(f; x)| \leq \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=(2k+1)n-k}^{\infty} \psi(\nu) \right) E_n(f_{\beta}^{\psi})_{L_1}. \quad (15)$$

Крім того, для довільної функції $f \in C_\beta^\psi L_1$ можна вказати функцію $\mathcal{F}(\cdot) = \mathcal{F}(f; n; x, \cdot)$ таку, що $E_n(\mathcal{F}_\beta^\psi)_{L_1} = E_n(f_\beta^\psi)_{L_1}$, і для неї виконується рівність

$$|\tilde{\rho}_n(\mathcal{F}; x)| = \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) + \frac{\xi}{n} \sum_{k=1}^{\infty} k \psi(k+n) \right) E_n(f_\beta^\psi)_{L_1}. \quad (16)$$

Тут величина $\xi = \xi(f; n; \psi; \beta; x)$ є такою, що $-(1+2\pi) \leq \xi \leq 1$.

Доведення. У роботі [26] (лема 1) доведено, що для довільної функції $f \in C_\beta^\psi L_1$, $\psi(k) > 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} k \psi(k) < \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, у кожній точці $x \in \mathbb{R}$ має місце таке інтегральне зображення величини $\tilde{\rho}_n(f; x)$:

$$\tilde{\rho}_n(f; x) = \frac{2}{\pi} \sin \frac{2n-1}{2} x \int_{-\pi}^{\pi} \delta_n(t+x) \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \cos(kt + \gamma_n) + r_n(t) \right) dt, \quad (17)$$

у якому $\delta_n(\tau) = f_\beta^\psi(\tau) - t_{n-1}(\tau)$, t_{n-1} — довільний тригонометричний поліном із множини $\mathcal{T}_{2n-1}$, а r_n і γ_n означені рівностями

$$r_n(t) = r_n(\psi; \beta; x; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=(2k+1)n-k}^{\infty} \psi(\nu) \sin \left(\nu t + \left(k + \frac{1}{2} \right) (2n-1)x + \frac{\beta\pi}{2} \right) \quad (18)$$

і

$$\gamma_n = \gamma_n(\beta; x) = \frac{(2n-1)x + \pi(\beta-1)}{2} \quad (19)$$

відповідно.

Проаналізувавши доведення згаданої леми роботи [26], легко переконатися, що вона залишається вірною і за умови $\psi(k) \geq 0$.

Покладаючи в (17) як t_{n-1} поліном t_{n-1}^* найкращого наближення у просторі L_1 функції f_β^ψ , тобто такий, що

$$\|f_\beta^\psi - t_{n-1}^*\|_1 = E_n(f_\beta^\psi)_{L_1} = \inf_{t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}} \|f_\beta^\psi - t_{n-1}\|_1, \quad (20)$$

і застосовуючи нерівність Гельдера (див., наприклад, [7, с. 391])

$$\int_{-\pi}^{\pi} |h(t)g(t)| dt \leq \|h\|_p \|g\|_{p'}, \quad h \in L_p, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad g \in L_{p'}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad (21)$$

при $p = \infty$, для довільної функції $f \in C_\beta^\psi L_1$ на підставі (17)–(21) отримуємо

$$\begin{aligned} |\tilde{\rho}_n(f; x)| &\leq \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \left(\left\| \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \cos(kt + \gamma_n) \right\|_{\infty} + \|r_n(t)\|_{\infty} \right) E_n(f_\beta^\psi)_{L_1} \\ &\leq \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=(2k+1)n-k}^{\infty} \psi(\nu) \right) E_n(f_\beta^\psi)_{L_1} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=(2k+1)n-k}^{\infty} \psi(\nu) \right) E_n(f_{\beta}^{\psi})_{L_1}, \quad (22)$$

де r_n і γ_n означені формулами (18) і (19) відповідно.

Далі доведемо справедливість другої частини теореми 1. Користуючись інтегральним зображенням (17) і враховуючи ортогональність функції $r_n(t)$ вигляду (18) до будь-якого тригонометричного полінома $t_n \in \mathcal{T}_{2n-1}$ для довільної функції $f \in C_{\beta}^{\psi} L_1$, у кожній точці $x \in \mathbb{R}$ можемо записати

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_n(f; x) &= f(x) - \tilde{S}_{n-1}(f; x) \\ &= 2 \sin \frac{2n-1}{2} x \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{\beta}^{\psi}(t+x) \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \cos(kt + \gamma_n) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta_n(t+x) r_n(t) dt \right), \end{aligned} \quad (23)$$

де $\delta_n(\cdot) = f_{\beta}^{\psi}(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)$, t_{n-1} — довільний поліном із $\mathcal{T}_{2n-1}$, а $r_n(t)$ і γ_n означені рівностями (18) і (19) відповідно.

Із формул (18)–(21) випливає оцінка

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \delta_n(t+x) r_n(t) dt \right| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} \left(f_{\beta}^{\psi}(t+x) - t_{n-1}^*(t+x) \right) r_n(t) dt \right| \\ &\leq \|r_n\|_{\infty} E_n(f_{\beta}^{\psi})_{L_1} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=(2k+1)n-k}^{\infty} \psi(\nu) \right) E_n(f_{\beta}^{\psi})_{L_1}. \end{aligned} \quad (24)$$

А отже, згідно з (24) можна записати

$$\int_{-\pi}^{\pi} \delta_n(t+x) r_n(t) dt = \xi_1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=(2k+1)n-k}^{\infty} \psi(\nu) \right) E_n(f_{\beta}^{\psi})_{L_1}, \quad (25)$$

де $\xi_1 = \xi_1(f; n; \psi, \beta; x)$ така, що $-1 < \xi_1 \leq 1$.

Для функції

$$g_x(\cdot) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{\beta}^{\psi}(t+\cdot) \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos(kt + \gamma_n) dt, \quad (26)$$

яка, очевидно, належить до множини $C_{2\gamma_n/\pi}^{\psi} L_1$, при будь-якому фіксованому $x \in \mathbb{R}$ відхилення $\rho(g_x; \cdot)$ її частинних сум Фур'є $S_{n-1}(g_x, \cdot)$ підпорядковане рівності

$$\rho(g_x; \cdot) = g_x(\cdot) - S_{n-1}(g_x, \cdot) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{\beta}^{\psi}(t+\cdot) \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \cos(kt + \gamma_n) dt, \quad (27)$$

і, зокрема,

$$\rho(g_x; x) = g_x(x) - S_{n-1}(g_x, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{\beta}^{\psi}(t+x) \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \cos(kt + \gamma_n) dt. \quad (28)$$

Відповідно до теореми 2.1 з [11] для функції $g_x(\cdot)$ із множини $C_{2\gamma_n/\pi}^\psi L_1$ при кожному $n \in \mathbb{N}$ існує функція $G(\cdot) = G(f, n; x; \cdot)$ така, що

$$E_n(G_{2\gamma_n/\pi}^\psi)_{L_1} = E_n(f_\beta^\psi)_{L_1}, \quad (29)$$

і для якої

$$\begin{aligned} \|\rho_n(G, \cdot)\|_C &= \|G(\cdot) - S_{n-1}(G; \cdot)\|_C \\ &= \left(\frac{1}{\pi} \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) + \frac{\xi_2}{n} \sum_{k=1}^{\infty} k\psi(k+n) \right) E_n(f_\beta^\psi)_{L_1}, \end{aligned} \quad (30)$$

де величина $\xi_2 = \xi_2(f; n; \psi; \beta; x)$ така, що $-2 \leq \xi_2 \leq 0$.

Виберемо точку x_0 таким чином, що виконується рівність

$$|\rho_n(G; x_0)| = \|\rho_n(G; \cdot)\|_C. \quad (31)$$

Розглянемо функцію $\mathcal{F}(t)$, означену рівністю

$$\mathcal{F}(t) := \mathcal{J}_\beta^\psi G_{2\gamma_n/\pi}^\psi(t - x + x_0), \quad (32)$$

яка, очевидно, належить множині $C_\beta^\psi L_1$, і покажемо, що вона є шуканою функцією. Для функції $\mathcal{F}(t)$ з урахуванням формул (29), (32) та інваріантності L_1 -норми щодо зсуву аргументу маємо

$$E_n(\mathcal{F}_\beta^\psi)_{L_1} = E_n(G_{2\gamma_n/\pi}^\psi)_{L_1} = E_n(f_\beta^\psi)_{L_1}. \quad (33)$$

Отже, на основі (23), (25), (29), (30), (31) і (33) для довільного заданого значення аргументу $x \in \mathbb{R}$ маємо

$$\begin{aligned} |\tilde{\rho}_n(\mathcal{F}; x)| &= 2 \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \left(\left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_{2\gamma_n/\pi}^\psi(x_0 + t) \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \cos(kt + \gamma_n) dt \right| \right. \\ &\quad \left. + \frac{\xi_1}{\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=(2k+1)n-k}^{\infty} \psi(\nu) \right) E_n(f_\beta^\psi)_{L_1} \right) \\ &= 2 \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \left(|\rho_n(G, x_0)| + \frac{\xi_1}{\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=(2k+1)n-k}^{\infty} \psi(\nu) \right) E_n(f_\beta^\psi)_{L_1} \right) \\ &= 2 \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \left(\|\rho_n(G, \cdot)\|_C + \frac{\xi_1}{\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=(2k+1)n-k}^{\infty} \psi(\nu) \right) E_n(f_\beta^\psi)_{L_1} \right) \\ &= 2 \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \left(\left(\frac{1}{\pi} \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) + \frac{\xi_2}{n} \sum_{k=1}^{\infty} k\psi(k+n) \right) E_n(f_\beta^\psi)_{L_1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\xi_1}{\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=(2k+1)n-k}^{\infty} \psi(\nu) \right) E_n(f_\beta^\psi)_{L_1} \right) \end{aligned}$$

$$= 2 \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \left(\frac{1}{\pi} \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) + \frac{\xi_2}{n} \sum_{k=1}^{\infty} k \psi(k+n) + \frac{\xi_1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=(2k+1)n-k}^{\infty} \psi(\nu) \right) \\ \times E_n(f_{\beta}^{\psi})_{L_1}, \quad (34)$$

де $-2 \leq \xi_2 \leq 0$, $-1 \leq \xi_1 \leq 1$.

У подальшому нам буде корисним таке твердження.

Лема 1. Нехай $\sum_{k=1}^{\infty} k \psi(k) < \infty$, $\psi(k) \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} k \psi(k+n) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=(2k+1)n-k}^{\infty} \psi(\nu). \quad (35)$$

Доведення. Нерівність (35) випливає з наступного ланцюжка перетворень:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} k \psi(k+n) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=(2k+1)n-k}^{(2k+1)n-k+2n-2} (\nu-n) \psi(\nu) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{2n-2} (2kn-k+\nu) \psi((2k+1)n-k+\nu) \\ &\geq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{2n-2} (2n-1)k \psi((2k+1)n-k+\nu) \\ &= \frac{2n-1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} k \sum_{\nu=0}^{2n-2} \psi((2k+1)n-k+\nu) \\ &= \frac{2n-1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} k \sum_{\nu=(2k+1)n-k}^{(2k+1)n-k+2n-2} \psi(\nu) \\ &= \frac{2n-1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} k \sum_{\nu=(2k+1)n-k}^{\infty} \psi(\nu) \\ &= \left(2 - \frac{1}{n}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=(2k+1)n-k}^{\infty} \psi(\nu) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=(2k+1)n-k}^{\infty} \psi(\nu). \end{aligned}$$

Лему 1 доведено.

Згідно з (35)

$$\frac{\xi_1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=(2k+1)n-k}^{\infty} \psi(\nu) + \frac{\xi_2}{n} \sum_{k=1}^{\infty} k \psi(k+n) = \frac{\xi}{\pi n} \sum_{k=1}^{\infty} k \psi(k+n), \quad (36)$$

де $\xi = \xi(f; n; \psi; \beta; x)$ така, що $-(1+2\pi) \leq \xi \leq 1$. З (34) і (36) випливає (16).

Теорему 1 доведено.

Зауважимо, що з урахуванням формули (35) і нерівності (15) впливає нерівність

$$|\tilde{\rho}_n(f; x)| \leq \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \left(\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{\infty} k \psi(k) \right) E_n(f_{\beta}^{\psi})_{L_1}. \quad (37)$$

Дійсно, (37) впливає з (15) і того, що на основі (35)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=(2k+1)n-k}^{\infty} \psi(\nu) &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} k \psi(k+n) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} k \psi(k+n) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{\infty} (k-n) \psi(k) = \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{\infty} k \psi(k) - \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k), \end{aligned}$$

а отже,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=(2k+1)n-k}^{\infty} \psi(\nu) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{\infty} k \psi(k). \quad (38)$$

Нерівність (37), будучи більш грубою оцінкою у порівнянні з (15), у деяких випадках є більш зручною для використання, залишаючись асимптотично непокращуваною при $n \rightarrow \infty$.

Іноді буває корисним формулювати нерівності типу Лебега в термінах (ψ, β) -інтегралів $\mathcal{J}_{\beta}^{\psi} \varphi$ від довільної сумовної функції φ . Теорему 1 у цьому випадку можна сформулювати таким чином.

Теорема 1'. Нехай $\sum_{k=1}^{\infty} k \psi(k) < \infty$, $\psi(k) \geq 0$, $k = 1, 2, \dots$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$. Тоді для всіх $x \in \mathbb{R}$ і довільної функції $\varphi \in L_1$ має місце нерівність

$$|\tilde{\rho}_n(\mathcal{J}_{\beta}^{\psi} \varphi; x)| \leq \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=(2k+1)n-k}^{\infty} \psi(\nu) \right) E_n(\varphi)_{L_1}. \quad (39)$$

Крім того, для довільної функції $\varphi \in L_1$ можна вказати функцію $\Phi(\cdot) = \Phi(\varphi; n; \psi; \beta)$ із L_1^0 таку, що $E_n(\varphi)_{L_1} = E_n(\Phi)_{L_1}$, і для якої виконується рівність

$$|\tilde{\rho}_n(\Phi; x)| = \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) + \frac{\xi}{n} \sum_{k=1}^{\infty} k \psi(k+n) \right) E_n(\varphi)_{L_1}, \quad (40)$$

де величина $\xi = \xi(\varphi; n; \psi; \beta; x)$ є такою, що $-(1+2\pi) \leq \xi \leq 1$.

Теорема 2. Нехай $\sum_{k=1}^{\infty} k \psi(k) < \infty$, $\psi(k) \geq 0$, $k = 1, 2, \dots$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$. Тоді для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,1}^{\psi}; x) = \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) + \frac{\Theta}{n} \sum_{k=1}^{\infty} k \psi(k+n) \right), \quad (41)$$

де величина $\Theta = \Theta(n; \psi; \beta; x)$ є такою, що $-(1+\pi) \leq \Theta \leq 1$.

Доведення теореми 2. Будемо відштовхуватися від інтегрального зображення (17), у якому $f \in C_{\beta,1}^\psi$. Розглянувши точні верхні межі модулів обох частин рівності (17) при $t_{n-1} \equiv 0$ по класу $C_{\beta,1}^\psi$ і врахувавши інваріантність множини

$$B_1^0 = \left\{ \varphi \in L_1 : \|\varphi\|_1 \leq 1, \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) dt = 0 \right\}$$

стосовно зсуву аргументу, будемо мати

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,1}^\psi; x) &= \sup_{f \in C_{\beta,1}^\psi} |\tilde{\rho}_n(f; x)| \\ &= 2 \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \left(\sup_{\varphi \in B_1^0} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \cos(kt + \gamma_n) dt + \frac{\xi_3}{\pi} \|r_n(\cdot)\|_C \right), \end{aligned} \quad (42)$$

де $r_n(t)$ і γ_n означено рівностями (18) і (19) відповідно, а для величини $\xi_3 = \xi_3(n; \psi; \beta, x)$ виконується нерівність $|\xi_3| \leq 1$.

Із співвідношень двоїстості (див., наприклад, [7], § 1.4.4) маємо

$$\sup_{\varphi \in B_1^0} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \cos(kt + \gamma_n) dt = \frac{1}{\pi} \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \left\| \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \cos(kt + \gamma_n) - \lambda \right\|_{\infty}. \quad (43)$$

З леми 2.1 роботи [11] випливає, що при $\psi(k) \geq 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} k\psi(k) < \infty$, при всіх $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$ виконується формула

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \left\| \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \cos(kt + \gamma_n) - \lambda \right\|_{\infty} = \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) + \frac{\Theta_1 \pi}{n} \sum_{k=1}^{\infty} k\psi(k+n), \quad (44)$$

у якій для величини $\Theta_1 = \Theta_1(n, \beta, \psi, x)$ виконується двостороння оцінка $-1 \leq \Theta_1 \leq 0$.

Враховуючи (18) і (35), маємо

$$|r_n(t)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=(2k+1)n-k}^{\infty} \psi(\nu) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} k\psi(k+n).$$

Об'єднавши формули (42)–(44), отримуємо (41).

Теорему 2 доведено.

Очевидно, що за виконання умови (13) формули (16), (40) і (41) є асимптотичними рівностями.

3. Нерівності Лебега для інтерполяційних поліномів на класах згорток нескінченно диференційовних, аналітичних і цілих функцій. У цьому пункті наведемо приклади функціональних множин $C_{\beta}^\psi L_1$, для яких оцінки (15), (16) є асимптотично точними.

3.1. Наслідки з теореми 1 для множин нескінченно диференційовних функцій. У цьому підпункті будемо розглядати випадок, коли послідовності $\psi(k)$, що породжують множини $C_{\beta}^\psi L_1$, є звуженням на множину натуральних чисел деяких додатних неперервних опуклих

донизу функцій $\psi(t)$ неперервного аргументу $t \geq 1$, які прямують до нуля при $t \rightarrow \infty$. Множину всіх таких функцій ψ позначаємо через $\mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{M} = \left\{ \psi \in C[1, \infty) : \psi(t) > 0, \psi(t_1 - 2\psi((t_1 + t_2)/2) + \psi(t_2) \geq 0 \right. \\ \left. \forall t_1, t_2 \in [1, \infty), \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0 \right\}. \quad (45)$$

Наслідуючи О. І. Степанця (див., наприклад, [3, с. 160]), кожній функції $\psi \in \mathfrak{M}$ поставимо у відповідність характеристику

$$\mu(t) = \mu(\psi; t) = \frac{t}{\eta(t) - t},$$

де $\eta(t) = \eta(\psi; t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right)$, ψ^{-1} — обернена до ψ функція, і покладемо

$$\mathfrak{M}_{\infty}^+ = \{\psi \in \mathfrak{M} : \mu(t) \uparrow \infty, t \rightarrow \infty\}.$$

Через $\mathfrak{M}^{\alpha}$ позначимо підмножину всіх функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, для яких величина

$$\alpha(t) = \alpha(\psi; t) := \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|}, \quad \psi'(t) := \psi'(t+0), \quad (46)$$

спадає до нуля при $t \rightarrow \infty$:

$$\mathfrak{M}^{\alpha} = \{\psi \in \mathfrak{M} : \alpha(\psi; t) \downarrow 0, t \rightarrow \infty\}. \quad (47)$$

Згідно з теоремою 2 роботи [4] випливає, що твердження про існування послідовності $\psi \in \mathfrak{M}^{\alpha}$ (або $\psi \in \mathfrak{M}_{\infty}^+$) такої, що для функції f вірне включення $f \in C_{\beta}^{\psi} L_1$ при будь-якому $\beta \in \mathbb{R}$, еквівалентне твердженню про включення $f \in D^{\infty}$, де D^{∞} , як і раніше, множина всіх нескінченно диференційовних 2π -періодичних дійснозначних функцій. А отже, множини $C_{\beta}^{\psi} L_1$ при $\psi \in \mathfrak{M}^{\alpha}$ (або $\psi \in \mathfrak{M}_{\infty}^+$) є множинами нескінченно диференційовних періодичних функцій. У [40] доведено включення

$$\mathfrak{M}_{\infty}^+ \subset \mathfrak{M}^{\alpha} \subset \mathfrak{M}^{\infty} = \left\{ \psi \in \mathfrak{M} : \forall r > 0 \lim_{t \rightarrow \infty} t^r \psi(t) = 0 \right\}, \quad (48)$$

яке означає, що функції ψ із $\mathfrak{M}^{\alpha}$ спадають до нуля швидше, ніж довільна степенева функція.

Як показано в [3, с. 166], для довільної функції ψ із $\mathfrak{M}_{\infty}^+$ має місце порядкова рівність

$$\eta(t) - t \asymp \lambda(t), \quad t \geq 1, \quad (49)$$

де $\lambda(t)$ — характеристика вигляду

$$\lambda(t) = \lambda(\psi; t) := \frac{\psi(t)}{|\psi'(t)|}. \quad (50)$$

У цьому підпункті нас буде цікавити випадок, коли $\psi \in \mathfrak{M}^{\alpha}$, а характеристика $\lambda(t)$ монотонно зростає до нескінченності при $t \rightarrow \infty$. При цих обмеженнях функції $\psi(t)$ спадають до нуля швидше довільної степеневої функції, але повільніше будь-якої геометричної прогресії.

Теорема 3. Нехай $\psi \in \mathfrak{M}$, характеристики $\alpha(t)$ вигляду (46) і $\lambda(t)$ вигляду (50) задовольняють умови

$$\alpha(t) \downarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad (51)$$

$$\lambda(t) \uparrow \infty, \quad t \rightarrow \infty. \quad (52)$$

Тоді для довільної функції $f \in C_\beta^\psi L_1$, $\beta \in \mathbb{R}$, у кожній точці $x \in \mathbb{R}$ при всіх $n \in \mathbb{N}$ таких, що

$$\alpha(n) \leq \frac{1}{4}, \quad (53)$$

має місце нерівність

$$|\tilde{\rho}_n(f; x)| \leq \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \psi(n) \lambda(n) \left(1 + 4\alpha(n) + \frac{1}{\lambda(n)} \right) E_n(f_\beta^\psi)_{L_1}. \quad (54)$$

Крім того, для довільної функції $f \in C_\beta^\psi L_1$ можна вказати функцію $\mathcal{F}(\cdot) = \mathcal{F}(f; n; x, \cdot)$ таку, що $E_n(\mathcal{F}_\beta^\psi)_{L_1} = E_n(f_\beta^\psi)_{L_1}$ і виконується рівність

$$|\tilde{\rho}_n(\mathcal{F}; x)| = \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \psi(n) \lambda(n) \left(1 + \xi_3 \alpha(n) + \frac{\xi_4}{\lambda(n)} \right) E_n(f_\beta^\psi)_{L_1}, \quad (55)$$

де $-4(1+2\pi) \leq \xi_3 < \frac{8}{3}(1+\pi)$, $-(1+2\pi) \leq \xi_4 \leq 2(1+\pi)$.

Доведення теореми 3. Умова (51) для $\psi \in \mathfrak{M}$ гарантує виконання всіх умов теореми 1. Покажемо спочатку, що (54) випливає із (37).

У роботі [11, с. 561] доведено, що за виконання умов (51)–(53) має місце оцінка

$$\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{\infty} k \psi(k) = \psi(n) \lambda(n) \left(1 + \Theta_2 \alpha(n) + \frac{\Theta_3}{\lambda(n)} \right), \quad (56)$$

де $0 \leq \Theta_2 \leq 4$, $0 \leq \Theta_3 \leq 1$. Із (37), (56) випливає (54).

Щоб переконатись у справедливості рівності (55), застосуємо формулу (16) і використаємо формули (85), (91) з [11], згідно з якими для довільної $\psi \in \mathfrak{M}$, підпорядкованої умовам (51), (52) при всіх $n \in \mathbb{N}$, що задовольняють умову (53), мають місце оцінки

$$\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) = \psi(n) \lambda(n) \left(1 + \Theta_4 \alpha(n) + \frac{\Theta_5}{\lambda(n)} \right), \quad 0 \leq \Theta_4 \leq \frac{4}{3}, \quad 0 \leq \Theta_5 \leq 1, \quad (57)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} k \psi(k+n) = \psi(n) \lambda(n) \left(\Theta_6 \alpha(n) + \frac{\Theta_7}{\lambda(n)} \right), \quad -\frac{4}{3} \leq \Theta_6 \leq 4, \quad -1 \leq \Theta_7 \leq 1. \quad (58)$$

З урахуванням (57) і (58), із рівності (16) отримуємо

$$\begin{aligned} |\tilde{\rho}_n(\mathcal{F}; x)| &= \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) + \frac{\xi}{n} \sum_{k=1}^{\infty} k \psi(k+n) \right) E_n(f_\beta^\psi)_{L_1} \\ &= \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \psi(n) \lambda(n) \left(1 + (\Theta_4 + \xi \Theta_6) \alpha(n) + (\Theta_5 + \xi \Theta_7) \frac{1}{\lambda(n)} \right) E_n(f_\beta^\psi)_{L_1}. \end{aligned} \quad (59)$$

Із (59) випливає (55).

Теорему 3 доведено.

Важливими множинами $C_\beta^\psi L_1$, для яких функції ψ ($\psi \in \mathfrak{M}$) задовольняють усі умови теореми 3, є множини узагальнених інтегралів Пуассона $C_\beta^{\alpha,r} L_1$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $r \in (0, 1)$. У цьому випадку для $\psi(t) = e^{-\alpha t^r}$ при довільних $t \geq 1$ маємо

$$\lambda(t) = \frac{t^{1-r}}{\alpha r}, \quad \alpha(t) = \frac{1}{\alpha r t^r}, \quad (60)$$

а отже, $\lambda(t) \uparrow \infty$, $\alpha(t) \downarrow 0$, $t \rightarrow \infty$. З урахуванням (60) умова (53) може бути записана у вигляді $n \geq \left(\frac{4}{\alpha r}\right)^{\frac{1}{r}}$.

Наслідок 1. Нехай $0 < r < 1$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді для довільної функції $f \in C_\beta^{\alpha,r} L_1$, $\beta \in \mathbb{R}$, у кожній точці $x \in \mathbb{R}$ при всіх $n \in \mathbb{N}$ таких, що $n \geq \left(\frac{4}{\alpha r}\right)^{\frac{1}{r}}$, виконується нерівність

$$|\tilde{\rho}_n(f; x)| \leq e^{-\alpha n^r} n^{1-r} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \left(\frac{2}{\pi \alpha r} + \mathcal{O}(1) \left(\frac{1}{(\alpha r)^2} \frac{1}{n^r} + \frac{1}{n^{1-r}} \right) \right) E_n(f_\beta^{\alpha,r})_{L_1}. \quad (61)$$

Крім того, для довільної функції $f \in C_\beta^{\alpha,r} L_1$ можна вказати функцію $\mathcal{F}(\cdot) = \mathcal{F}(f; n; x, \cdot)$ із множини $C_\beta^{\alpha,r} L_1$ таку, що $E_n(\mathcal{F}_\beta^{\alpha,r})_{L_1} = E_n(f_\beta^{\alpha,r})_{L_1}$ і при $n \geq n_*(\alpha, r, 1)$ виконується рівність

$$|\tilde{\rho}_n(\mathcal{F}; x)| = e^{-\alpha n^r} n^{1-r} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \left(\frac{2}{\pi \alpha r} + \mathcal{O}(1) \left(\frac{1}{(\alpha r)^2} \frac{1}{n^r} + \frac{1}{n^{1-r}} \right) \right) E_n(f_\beta^{\alpha,r})_{L_1}. \quad (62)$$

У (61), (62) величини $\mathcal{O}(1)$ рівномірно обмежені по всіх розглядуваних параметрах.

Зауважимо, що формули (61), (62) при дещо інших обмеженнях на параметр n впливають також із теореми 2.3 роботи авторів [35].

Можна навести цілий ряд прикладів функцій ψ із $\mathfrak{M}$, для яких виконуються умови (51) і (52). Зокрема,

$$\psi(t) = (t+2)^{-\ln \ln(t+2)}, \quad t \geq 1, \quad (63)$$

$$\psi(t) = e^{-\ln^2(t+1)}, \quad t \geq 1, \quad (64)$$

$$\psi(t) = e^{-\frac{t+2}{\ln(t+2)}}, \quad t \geq 1. \quad (65)$$

Для усіх перелічених функцій ψ теорема 3 дозволяє записати асимптотично непокращувані нерівності типу Лебега для інтерполяційних поліномів Лагранжа на множинах $C_\beta^\psi L_1$, $\beta \in \mathbb{R}$.

3.2. Наслідки з теореми 1 для множин аналітичних і цілих функцій. У цьому підпункті будемо розглядати випадки, коли послідовності $\psi(k)$ спадають до нуля приблизно як геометричні прогресії або швидше за них. Як показано в [2, с. 32; 40, с. 1697], якщо при деяких K і α $\psi(k)$ задовольняє умову

$$\psi(k) \leq K e^{-\alpha k}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \alpha > 0, \quad K > 0, \quad (66)$$

то множини $C_\beta^{\alpha,r} L_1$ складаються з аналітичних функцій, які регулярно продовжуються у смугу $|\operatorname{Im} z| < \alpha$. Типовим прикладом функції $\psi(k)$, що задовольняє умову (66), може слугувати функція

$$\psi(k) = e^{-\alpha k}, \quad \alpha > 0, \quad (67)$$

яка породжує множину інтегралів Пуассона $C_\beta^{\alpha,1} L_1$.

Оскільки для функції вигляду (67) виконуються рівності

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=(2k+1)n-k}^{\infty} \psi(\nu) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=(2k+1)n-k}^{\infty} e^{-\alpha\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha(2k+1)n-k}}{1-e^{-\alpha}} \\ &= \frac{e^{-\alpha n}}{1-e^{-\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha(2n-1)k} = \frac{e^{-\alpha n}}{(1-e^{-\alpha})(1-e^{-\alpha(2n-1)})}, \end{aligned} \quad (68)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} k\psi(k+n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\alpha(k+n)} = \frac{e^{-\alpha n}}{n} \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\alpha k} = \frac{e^{-\alpha(n+1)}}{n(1-e^{-\alpha})^2}, \quad (69)$$

то з теореми 1 одержуємо таке твердження.

Теорема 4. Нехай $\alpha > 0$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді для всіх $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ і довільної функції $f \in C_{\beta}^{\alpha,1}$ має місце нерівність

$$|\tilde{\rho}_n(f; x)| \leq \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \frac{e^{-\alpha n}}{(1-e^{-\alpha})(1-e^{-\alpha(2n-1)})} E_n(f_{\beta}^{\alpha,1})_{L_1}. \quad (70)$$

Крім того, для довільної функції $f \in C_{\beta}^{\alpha,1} L_1$ можна вказати функцію $\mathcal{F}(\cdot) = \mathcal{F}(f; n; x, \cdot)$ із множини $C_{\beta}^{\alpha,1} L_1$ таку, що $E_n(\mathcal{F}_{\beta}^{\alpha,1})_{L_1} = E_n(f_{\beta}^{\alpha,1})_{L_1}$ і для якої виконується рівність

$$|\tilde{\rho}_n(\mathcal{F}; x)| = \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| e^{-\alpha n} \left(\frac{1}{1-e^{-\alpha}} + \frac{\xi}{n} \frac{e^{-\alpha}}{(1-e^{-\alpha})^2} \right) E_n(f_{\beta}^{\alpha,1})_{L_1}, \quad (71)$$

де для величини $\xi = \xi(f, n, \alpha, \beta; x)$ має місце оцінка $-(1+2\pi) \leq \xi \leq 1$.

Важливим частинним випадком функцій ψ , підпорядкованих умові (66), є функції $\psi(k)$, що задовольняють умову Даламбера $\mathcal{D}_q$, $q \in [0, 1)$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q, \quad \psi(k) > 0. \quad (72)$$

Якщо $\psi(k)$ задовольняє умову (72) при деякому $q \in [0, 1)$, то будемо записувати, що $\psi \in \mathcal{D}_q$.

Наслідок 2. Нехай $\psi \in \mathcal{D}_q$, $q \in (0, 1)$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді для всіх $x \in \mathbb{R}$ і довільної функції $f \in C_{\beta}^{\psi} L_1$ при всіх n таких, що

$$\frac{1}{n} + \varepsilon_n < \frac{1-q}{2}, \quad (73)$$

де

$$\varepsilon_n := \sup_{k \geq n} \left| \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q \right|, \quad (74)$$

має місце нерівність

$$|\tilde{\rho}_n(f; x)| \leq \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \psi(n) \left(\frac{2}{\pi(1-q)} + \mathcal{O}(1) \left(\frac{q}{n(1-q)^2} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} \right) \right) E_n(f_{\beta}^{\psi})_{L_1}. \quad (75)$$

Крім того, для довільної функції $f \in C_\beta^\psi L_1$ можна вказати функцію $\mathcal{F}(\cdot) = \mathcal{F}(f; n; x, \cdot)$ таку, що $E_n(\mathcal{F}_\beta^\psi)_{L_1} = E_n(f_\beta^\psi)_{L_1}$ і для якої виконується рівність

$$|\tilde{\rho}_n(\mathcal{F}; x)| = \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \psi(n) \left(\frac{2}{\pi(1-q)} + \mathcal{O}(1) \left(\frac{q}{n(1-q)^2} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} \right) \right) E_n(f_\beta^\psi)_{L_1}. \quad (76)$$

Доведення. У роботі [11, с. 557] показано, що коли $\psi \in \mathcal{D}_q$, $q \in (0, 1)$, тоді для всіх n , що задовольняють умову (73), справджуються рівності

$$\begin{aligned} & \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) + \frac{\mathcal{O}(1)}{n} \sum_{k=1}^{\infty} k \psi(k+n) \\ &= \psi(n) \left(\frac{1}{1-q} + \mathcal{O}(1) \left(\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} + \frac{q}{n(1-q)^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (77)$$

Використавши нерівність (35) і оцінку (77), із формул (15), (16) одержуємо оцінки (75), (76) відповідно.

Наслідок 2 доведено.

Важливими прикладами ядер $\Psi_\beta(t)$ вигляду (2), коефіцієнти $\psi(k)$ яких належать до множини $\mathcal{D}_q$, $0 < q < 1$, є, зокрема:

– полігармонічні ядра Пуассона

$$P_{q,\beta}(l, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_l(k) \cos \left(kt - \frac{\beta\pi}{2} \right), \quad l \in \mathbb{N}, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad (78)$$

де

$$\psi_l(k) = q^k \left(1 + \sum_{j=1}^{l-1} \frac{(1-q^2)^j}{j! 2^j} \prod_{\nu=0}^{j-1} (k+2\nu) \right), \quad 0 < q < 1, \quad (79)$$

– ядра аналітичних функцій

$$\mathcal{P}_{q,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{q^k + q^{-k}} \cos \left(kt - \frac{\beta\pi}{2} \right), \quad 0 < q < 1, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad (80)$$

– ядра Неймана

$$N_{q,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k} \cos \left(kt - \frac{\beta\pi}{2} \right), \quad 0 < q < 1, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad (81)$$

та ін.

Якщо $C_\beta^\psi L_1$ є множинами згортки з усіма наведеними ядрами, то наслідок 2 дозволяє записати для них асимптотично непокрашувані інтерполяційні нерівності типу Лебега. Зазначимо, що формули (75), (76) вперше одержано в роботі [20]. У ній же також отримано асимптотично непокрашувані нерівності типу Лебега для інтерполяційних поліномів на класах згортки $C_\beta^\psi L_p$, $1 \leq p \leq \infty$, породжених ядрами (78), (81), а також усіма ядрами Ψ_β вигляду (2), де $\psi \in \mathcal{D}_q$, $q \in (0, 1)$. Теорема 1 дозволяє записати в явному вигляді двосторонні оцінки для величин $\mathcal{O}(1)$ у формулах (75), (76).

Розглянемо функцію $\psi(k)$ вигляду

$$\psi(k) = \begin{cases} q_1^k, & \text{якщо } k = 2m - 1, \quad m \in \mathbb{N}, \\ q_2^k, & \text{якщо } k = 2m, \quad m \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (82)$$

де числа q_1, q_2 такі, що

$$1 > q_1 > q_2 > 0. \quad (83)$$

Зрозуміло, що функції ψ вигляду (82) задовольняють умову (66) при $\alpha > \ln \frac{1}{q_1}$, $K = 1$, але водночас, ні при яких $q \in (0, 1)$ не задовольняють ні умови Даламбера (72), ні більш загальної, ніж $\mathcal{D}_q$, умови Коші $\mathcal{C}_q$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\psi(k)} = q, \quad q \in [0, 1). \quad (84)$$

Водночас теорема 1 дозволяє записати асимптотично непокрашувані нерівності Лебега для інтерполяційних поліномів на множинах $C_{\beta}^{\psi} L_1$ для ψ вигляду (82). Для цього досить переконатись у справедливості граничного співвідношення (13).

Неважко пересвідчитися, що для ψ вигляду (82)

$$\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) = \begin{cases} \frac{q_2^n}{1 - q_2^2} + \frac{q_1^{n+1}}{1 - q_1^2}, & \text{якщо } n = 2\ell, \quad \ell \in \mathbb{N}, \\ \frac{q_1^n}{1 - q_1^2} + \frac{q_2^{n+1}}{1 - q_2^2}, & \text{якщо } n = 2\ell - 1, \quad \ell \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (85)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} k\psi(k+n) = \begin{cases} \frac{1}{n} \left(\frac{2q_2^{n+2}}{(1 - q_2^2)^2} + \frac{2q_1^{n+3}}{(1 - q_1^2)^2} + \frac{q_1^{n+1}}{1 - q_1^2} \right), & \text{якщо } n = 2\ell, \quad \ell \in \mathbb{N}, \\ \frac{1}{n} \left(\frac{2q_1^{n+2}}{(1 - q_1^2)^2} + \frac{2q_2^{n+3}}{(1 - q_2^2)^2} + \frac{q_2^{n+1}}{1 - q_2^2} \right), & \text{якщо } n = 2\ell - 1, \quad \ell \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (86)$$

Із (46), (85) і (86) одержуємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} k\psi(k+n)}{\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k)} = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \left(\frac{q_1^{n+2}}{1 - q_1^2} + \frac{2q_1^{n+3}}{(1 - q_1^2)^2} \right)}{\frac{q_1^{n+1}}{1 - q_1^2}} = 0, & \text{якщо } n = 2\ell, \quad \ell \in \mathbb{N}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \frac{2q_1^{n+2}}{(1 - q_1^2)^2}}{\frac{q_1^n}{1 - q_1^2}} = 0, & \text{якщо } n = 2\ell - 1, \quad \ell \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (87)$$

Із (87) випливає (13).

Розглянемо далі випадок, коли $\psi(k)$ задовольняють умову $\mathcal{D}_0$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = 0. \quad (88)$$

У цьому випадку множини $C_\beta^\psi L_1$ складаються із функцій, регулярних в усій комплексній площині, тобто з цілих функцій (див., наприклад, [40, с. 1703]).

Для $\psi \in \mathcal{D}_0$ із теореми 1 одержуємо таке твердження.

Наслідок 3. Нехай $\psi \in \mathcal{D}_0$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$. Тоді при всіх $x \in \mathbb{R}$ для довільної функції $f \in C_\beta^\psi L_1$ має місце нерівність

$$|\tilde{\rho}_n(f; x)| \leq \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \left(\psi(n) + \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} k\psi(k) \right) E_n(f_\beta^\psi)_{L_1}. \quad (89)$$

Крім того, для довільної функції $f \in C_\beta^\psi L_1$, $\psi \in \mathcal{D}_0$ можна вказати функцію $\mathcal{F}(\cdot) = \mathcal{F}(f; n; x, \cdot)$ таку, що $E_n(\mathcal{F}_\beta^\psi)_{L_1} = E_n(f_\beta^\psi)_{L_1}$ і для якої виконується рівність

$$|\tilde{\rho}_n(\mathcal{F}; x)| = \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \left(\psi(n) + \frac{\mathcal{O}(1)}{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} k\psi(k) \right) E_n(f_\beta^\psi)_{L_1}. \quad (90)$$

У формулі (90) величина $\mathcal{O}(1)$ рівномірно обмежена за всіма параметрами.

Доведення. Нерівність (89) випливає безпосередньо з (37). Далі, оскільки

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) + \frac{\mathcal{O}(1)}{n} \sum_{k=1}^{\infty} k\psi(k+n) &= \psi(n) + \frac{\mathcal{O}(1)}{n} \left(n \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k) + \sum_{k=1}^{\infty} k\psi(k+n) \right) \\ &= \psi(n) + \frac{\mathcal{O}(1)}{n} \left(n \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k) + \sum_{k=n+1}^{\infty} (k-n)\psi(k) \right) \\ &= \psi(n) + \frac{\mathcal{O}(1)}{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} k\psi(k), \end{aligned} \quad (91)$$

то (90) є наслідком із (16). Той факт, що (90) є асимптотичною рівністю при $n \rightarrow \infty$, випливає із формули

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} k\psi(k)}{\psi(n)} = 0, \quad \psi \in \mathcal{D}_0, \quad (92)$$

встановленої в [11, с. 553].

Зауважимо, що вперше асимптотично непокрашувані нерівності типу Лебега для інтерполяційних поліномів Лагранжа на множинах $C_\beta^\psi L_1$ за умови $\psi \in \mathcal{D}_0$ із залишковими членами, записаними в дещо іншій формі (у порівнянні з (89), (90)), одержано в [20]. Там також наведено зазначені нерівності і на множинах узагальнених інтегралів Пуассона $C_\beta^\psi L_1$ при $\alpha > 0$, $r > 1$, $\beta \in \mathbb{R}$. При цьому вказані результати можна одержати як частинний випадок ($p = 1$) більш загальних інтерполяційних нерівностей типу Лебега, які формулюються для множин $C_\beta^\psi L_p$, $1 \leq p \leq \infty$, $\psi \in \mathcal{D}_0$.

Зазначимо також, що можна навести приклади функцій $\psi(k)$, для яких

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\psi(k)} = 0, \quad (93)$$

які не задовольняють умову $\mathcal{D}_0$ і для яких виконується граничне співвідношення (13). З огляду на (93), як випливає з [3, с. 141], множини $C_\beta^\psi L_1$ є множинами цілих функцій і для них на основі (13) теорема 1 дозволяє записати асимптотично точні нерівності Лебега для інтерполяційних поліномів Лагранжа, незважаючи на те, що $\psi \notin \mathcal{D}_0$.

4. Розв'язок задачі Колмогорова – Нікольського для інтерполяційних поліномів Лагранжа на класах згорток нескінченно диференційовних, аналітичних і цілих функцій. Наведемо приклади важливих функціональних компактів $C_{\beta,1}^{\psi}$, для яких формула (41) дозволяє записати асимптотичні рівності для $\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,1}^{\psi}; x)_C$ при $n \rightarrow \infty$.

4.1. Наслідки з теореми 2 для класів нескінченно диференційовних функцій. У наступному твердженні наведено асимптотичну рівність для величин $\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,1}^{\psi}; x)_C$, $\psi \in \mathfrak{M}^{\alpha}$, при $n \rightarrow \infty$ за умови $\lambda(t) \uparrow \infty$.

Теорема 5. Нехай $\beta \in \mathbb{R}$, $\psi \in \mathfrak{M}^{\alpha}$ і для характеристик $\alpha(t)$ і $\lambda(t)$, означених формулами (46) і (50) відповідно, виконано умови (51) і (52). Тоді при всіх $n \in \mathbb{N}$, підпорядкованих умові (53), має місце оцінка

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,1}^{\psi}; x) = \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \psi(n) \lambda(n) \left(1 + \xi_1^* \alpha(n) + \frac{\xi_2^*}{\lambda(n)} \right), \quad (94)$$

де $-4(1+\pi) \leq \xi_1^* \leq \frac{4}{3}(2+\pi)$, $-(1+\pi) \leq \xi_2^* \leq 2+\pi$.

Доведення теореми 5. За виконання умов теореми 5 $\psi \in \mathfrak{M}^{\alpha}$, тому, як випливає із (48), справджуються всі умови теореми 2, згідно з якою має місце рівність (41).

Далі, як зазначалося при доведенні теореми 2, за виконання умов (51), (52) при всіх номерах n , що задовольняють нерівність (53), мають місце оцінки (57), (58). Тому на основі (41) для довільних $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,1}^{\psi}; x) &= \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \left(\psi(n) \lambda(n) \left(1 + \Theta_4 \alpha(n) + \frac{\Theta_5}{\lambda(n)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \Theta \psi(n) \lambda(n) \left(\Theta_6 \alpha(n) + \frac{\Theta_7}{\lambda(n)} \right) \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \psi(n) \lambda(n) \left(1 + (\Theta_4 + \Theta \Theta_6) \alpha(n) + (\Theta_5 + \Theta \Theta_7) \frac{1}{\lambda(n)} \right). \end{aligned} \quad (95)$$

Оцінка (94) випливає із (95).

Теорему 5 доведено.

Наведемо наслідок з теореми 5 у випадку, коли $\psi(t) = e^{-\alpha t^r}$, $\alpha > 0$, $0 < r < 1$, тобто коли класи $C_{\beta,1}^{\psi}$ є класами узагальнених інтегралів Пуассона $C_{\beta,1}^{\alpha,r}$. Як уже зазначалося раніше, в цьому випадку характеристики $\alpha(t)$ і $\lambda(t)$, $t \geq 1$, мають вигляд (60), а нерівність (53) еквівалентна нерівності $n \geq \left(\frac{4}{\alpha r} \right)^{\frac{1}{r}}$. Тому з теореми 5 одержуємо таке твердження.

Наслідок 4. Нехай $0 < r < 1$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді при всіх $x \in \mathbb{R}$ і номерах n таких, що $n \geq \left(\frac{4}{\alpha r} \right)^{\frac{1}{r}}$, справедлива рівномірна по всіх розглядуваних параметрах оцінка

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,1}^{\alpha,r}; x) = \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| e^{-\alpha n^r} n^{1-r} \left(\frac{1}{\pi \alpha r} + \mathcal{O}(1) \left(\frac{1}{(\alpha r)^2} \frac{1}{n^r} + \frac{1}{n^{1-r}} \right) \right). \quad (96)$$

Зазначимо, що асимптотичні рівності для величин $\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,p}^{\alpha,r}; x)$, $r \in (0, 1)$, при $n \rightarrow \infty$ і довільних $1 \leq p \leq \infty$ отримано в [19, 25, 35]. При цьому теорема 5 дозволяє записати в явному вигляді двосторонні оцінки для величини $\mathcal{O}(1)$ у формулі (96).

Наведемо ще декілька прикладів застосування теореми 5 для різних функцій ψ із $\mathfrak{M}$, які задовольняють умови (51), (52). А саме: розглянемо ψ вигляду (63)–(65).

Для зазначених функцій $\psi(t)$ характеристики $\lambda(t)$ і $\alpha(t)$ відображено в таблиці:

№	$\psi(t)$	$\alpha(t)$	$\lambda(t)$
1.	$(t+2)^{-\ln \ln(t+2)}$	$\frac{t+2}{t} \frac{1}{1+\ln \ln(t+2)}$	$\frac{t+2}{1+\ln \ln(t+2)}$
2.	$e^{-\ln^2(t+1)}$	$\frac{t+1}{t} \frac{1}{2\ln(t+1)}$	$\frac{t+1}{2\ln(t+1)}$
3.	$e^{-\frac{t+2}{\ln(t+2)}}$	$\frac{\ln^2(t+2)}{t(\ln(t+2)-1)}$	$\frac{\ln^2(t+2)}{\ln(t+2)-1}$

Із теореми 5 з урахуванням наведених у таблиці значень $\alpha(t)$ і $\lambda(t)$, отримуємо таке твердження.

Наслідок 5. Нехай $\psi(k) = (k+2)^{-\ln \ln(k+2)}$, $k = 1, 2, \dots$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$. Тоді для всіх $x \in \mathbb{R}$ при $n \rightarrow \infty$ виконується асимптотична рівність

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,1}^\psi; x) = \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \psi(n) \frac{n}{\ln \ln(n+2)} \left(1 + \mathcal{O}(1) \frac{n}{\ln \ln(n+2)} \right). \quad (97)$$

Наслідок 6. Нехай $\psi(k) = e^{-\ln^2(k+1)}$, $k = 1, 2, \dots$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$. Тоді для всіх $x \in \mathbb{R}$ при $n \rightarrow \infty$ справджується асимптотична рівність

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,1}^\psi; x) = \frac{1}{\pi} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \frac{\psi(n)n}{\ln(n+1)} \left(1 + \mathcal{O}(1) \frac{1}{\ln(n+1)} \right). \quad (98)$$

Наслідок 7. Нехай $\psi(k) = e^{-\frac{k+2}{\ln(k+2)}}$, $k = 1, 2, \dots$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$. Тоді для всіх $x \in \mathbb{R}$ при $n \rightarrow \infty$ виконується асимптотична рівність

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,1}^\psi; x) = \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \psi(n) \ln(n+2) \left(1 + \mathcal{O}(1) \frac{1}{\ln(n+2)} \right). \quad (99)$$

У формулах (97)–(99) величини $\mathcal{O}(1)$ рівномірно обмежені по усіх розглядуваних параметрах.

Наведемо наслідки з теореми 2 у випадку, коли $\psi(k) = e^{-\alpha k}$, $\alpha > 0$, тобто коли класи $C_{\beta,1}^\psi$ є класами інтегралів Пуассона $C_{\beta,1}^{\alpha,1}$.

Наслідок 8. Нехай $\alpha > 0$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді при всіх $x \in \mathbb{R}$ і довільних $n \in \mathbb{N}$ справджується рівність

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,1}^{\alpha,1}; x) = \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| e^{-\alpha n} \left(\frac{1}{1-e^{-\alpha}} + \frac{\Theta}{n} \frac{e^{-\alpha}}{(1-e^{-\alpha})^2} \right), \quad (100)$$

де для величини $\Theta = \Theta(n; \alpha; \beta; x)$ виконуються нерівності $-(1+\pi) \leq \Theta \leq 1$.

Доведення. Покладемо у формулі (41) $\psi(k) = e^{-\alpha k}$, $\alpha > 0$, і використаємо рівність (69). Будемо мати оцінки

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,1}^{\alpha,1}; x) &= \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \left(\sum_{k=n}^{\infty} e^{-\alpha k} + \frac{\Theta}{n} \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\alpha(k+n)} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \left(\frac{e^{-\alpha n}}{1 - e^{-\alpha}} + \frac{\Theta}{n} \frac{e^{-\alpha(n+1)}}{(1 - e^{-\alpha})^2} \right).\end{aligned}\quad (101)$$

Зі (101) випливає (100).

Наслідок 8 доведено.

Нехай далі $\psi(k)$, що породжують класи $C_{\beta,1}^{\psi}$, задовольняють умову $\mathcal{D}_q$ вигляду (72) при $q \in (0, 1)$. Тоді з теореми 2 одержуємо такий наслідок.

Наслідок 9. Нехай $\psi \in \mathcal{D}_q$, $q \in (0, 1)$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді для всіх $x \in \mathbb{R}$ при всіх $n \in \mathbb{N}$ таких, що задовольняють нерівність (73), має місце оцінка

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,1}^{\psi}; x) = \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \psi(n) \left(\frac{2}{\pi(1-q)} + \mathcal{O}(1) \left(\frac{q}{n(1-q)^2} + \frac{\varepsilon_n}{n(1-q)^2} \right) \right), \quad (102)$$

в якій ε_n означено формулою (74), а $\mathcal{O}(1)$ — рівномірно обмежена за всіма параметрами величина.

Оцінка (102) є наслідком із теореми 2 і рівності (77).

Як зазначено в пп. 3.2, прикладами ядер $\Psi_{\beta}(t)$ вигляду (2), коефіцієнти $\psi(k)$ яких задовольняють умову $\mathcal{D}_q$, $q \in (0, 1)$, є полігармонічні ядра Пуассона $P_{q,\beta}(\ell, t)$ вигляду (78), ядра аналітичних функцій $\mathcal{P}_{q,\beta}(t)$ вигляду (80), ядра Неймана $N_{q,\beta}(t)$ вигляду (81) та ін. На підставі формули (102) для класів згорток $C_{\beta,1}^{\psi}$, породжених усіма переліченими ядрами, можна записати асимптотичні рівності величин $\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,1}^{\psi}; x)$, $x \in \mathbb{R}$, при $n \rightarrow \infty$. Вперше асимптотичні рівності для величин вигляду (14) на таких класах одержано в роботі [20].

Приклад функції $\psi(k)$ вигляду (82) показує, що теорема 2 дозволяє знаходити сильну асимптотику величин $\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,1}^{\psi}; x)$, $x \in \mathbb{R}$, при $n \rightarrow \infty$ і для випадків, коли ні умова $\mathcal{D}_q$ вигляду (72), ні умова Коші $\mathcal{C}_q$ вигляду (84) не виконуються. В зазначеному випадку на основі (41), (85) і (86) має місце асимптотична при $n \rightarrow \infty$ рівність

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,1}^{\psi}; x) = \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \frac{\max\{\psi(n), \psi(n+1)\}}{1 - \left(\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (\psi(k))^{\frac{1}{k}} \right)^2} \left(1 + \frac{\mathcal{O}(1)}{n \left(1 - \left(\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (\psi(k))^{\frac{1}{k}} \right)^2 \right)} \right). \quad (103)$$

Формула (103) є наслідком із рівності (41) і співвідношень (85)–(87). Нехай далі $\psi(k)$ задовольняє умову $\mathcal{D}_0$ вигляду (88). Для таких ψ виконуються формули (91), (92) і тому з теореми 2 одержуємо такий наслідок.

Наслідок 10. Нехай $\psi \in \mathcal{D}_0$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$. Тоді при всіх $x \in \mathbb{R}$ справджується асимптотична при $n \rightarrow \infty$ рівність

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,1}^{\psi}; x) = \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \left(\psi(n) + \frac{\mathcal{O}(1)}{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} k \psi(k) \right), \quad (104)$$

в якій $\mathcal{O}(1)$ — рівномірно обмежена за всіма параметрами величина.

Зазначимо, що вперше асимптотичні рівності для величини $\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,1}^\psi; x)$ при $n \rightarrow \infty$ із більш тонкою оцінкою залишкового члена одержано в [20]. Там також наведено асимптотичні рівності величин (14) на класах узагальнених інтегралів Пуассона $C_{\beta,1}^{\alpha,r}$ при $\alpha > 0$ і $r > 1$.

Варто зауважити, що формула (41) іноді дозволяє записувати асимптотичні рівності для величин $\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,1}^\psi; x)$ для функцій ψ , які задовольняють умову (93) і водночас не задовольняють умови $\mathcal{D}_0$.

Співставлення отриманих у цьому пункті результатів для величин $\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,1}^\psi; x)$ — точних верхніх меж відхилень інтерполяційних поліномів на класах $C_{\beta,1}^\psi$ із отриманими в [11] результатами щодо аналогічних величин $\mathcal{E}_n(C_{\beta,1}^\psi)$ для частинних сум Фур'є S_{n-1}

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta,1}^\psi) = \sup_{f \in C_{\beta,1}^\psi} |f(x) - S_{n-1}(f; x)| \quad (105)$$

показує, що за умови (13) величини (14) і (105) пов'язані граничним співвідношенням

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,1}^\psi; x)}{2 \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \mathcal{E}_n(C_{\beta,1}^\psi)} = 1.$$

Від імені всіх авторів відповідальна за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів. Усі необхідні дані містяться в статті. Всі автори зробили рівномірний внесок у цю роботу. Дослідження Анатолія Сердюка частково підтримано грантом H2020-MSCA-RISE-2019, проєкт № 873071 (SOMPATY: spectral optimization: from mathematics to physics and advanced technology), фондом Фольксвагена (VolkswagenStiftung), програма “From modeling and analysis to approximation”, і грантом від Simons Foundation (1030291, A.S.).

Література

1. А. И. Степанец, *Классификация периодических функций и скорость сходимости их рядов Фурье*, Изв. АН СССР. Сер. мат., **50**, № 1, 101 – 136 (1986).
2. А. И. Степанец, *Классификация и приближение периодических функций*, Наукова думка, Киев (1987).
3. А. И. Степанец, *Методы теории приближений: в 2 ч.*, Праці Інституту математики НАН України, **40**, ч. I (2002).
4. О. І. Степанець, А. С. Сердюк, А. Л. Шидліч, *Про деякі нові критерії нескінченної диференційовності періодичних функцій*, Укр. мат. журн., **59**, № 10, 1399 – 1409 (2007).
5. А. И. Степанец, А. С. Сердюк, А. Л. Шидлич, *О связи классов $(\psi, \bar{\beta})$ -дифференцируемых функций с классами Жевре*, Укр. мат. журн., **61**, № 1, 140 – 145 (2009).
6. С. Н. Бернштейн, *О тригонометрическом интерполировании по способу наименьших квадратов*, Докл. АН СССР, **4**, № 1-2, 1 – 8 (1934).
7. Н. П. Корнейчук, *Точные константы в теории приближения*, Наука, Москва (1987).
8. А. И. Степанец, *Методы теории приближений: в 2 ч.*, Праці Інституту математики НАН України, **40**, ч. II (2002).
9. С. М. Никольский, *О некоторых методах приближения тригонометрическими суммами*, Изв. АН СССР. Сер. мат., **4**, № 6, 509 – 520 (1940).
10. С. М. Никольский, *Приближение периодических функций тригонометрическими полиномами*, Тр. Мат. ин-та АН СССР, **15**, 3 – 75 (1945).

11. А. С. Сердюк, Т. А. Степанюк, *Рівномірні наближення сумами Фур'є на множинах згорток періодичних функцій високої гладкості*, Укр. мат. журн., **75**, № 4, 542–567 (2023).
12. I. I. Šarapudinov, *On the best approximation and polynomials of the least quadratic deviation*, Anal. Math., **9**, 223–234 (1983).
13. K. I. Oskolkov, *Inequalities of the “large size” type and applications to problems of trigonometric approximation*, Anal. Math., **12**, 143–166 (1986).
14. А. С. Сердюк, *Наближення аналітичних функцій інтерполяційними тригонометричними поліномами в метриці L* , Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр., Інститут математики НАН України, Київ, **3**, 240–250 (1998).
15. А. С. Сердюк, *Про асимптотично точні оцінки похибки наближення інтерполяційними тригонометричними поліномами функцій високої гладкості*, Доп. НАН України, № 8, 29–33 (1999).
16. А. С. Сердюк, *Наближення періодичних функцій високої гладкості інтерполяційними тригонометричними поліномами в метриці L_1* , Укр. мат. журн., **52**, № 7, 994–998 (2000).
17. А. С. Сердюк, *Наближення інтерполяційними тригонометричними поліномами нескінченно диференційовних періодичних функцій в інтегральній метриці*, Укр. мат. журн., **53**, № 12, 1654–1663 (2001).
18. А. С. Сердюк, *Наближення періодичних аналітичних функцій інтерполяційними тригонометричними поліномами в метриці простору L* , Укр. мат. журн., **54**, № 5, 692–700 (2002).
19. А. С. Сердюк, *Наближення нескінченно диференційовних періодичних функцій інтерполяційними тригонометричними поліномами*, Укр. мат. журн., **56**, № 4, 495–505 (2004).
20. А. С. Сердюк, *Наближення інтерполяційними тригонометричними поліномами на класах періодичних аналітичних функцій*, Укр. мат. журн., **64**, № 5, 698–712 (2012).
21. А. С. Сердюк, В. А. Войтович, *Наближення класів цілих функцій інтерполяційними аналогами сум Валле Пуассена*, Теорія наближення функцій та суміжні питання: Збірник праць Інституту математики НАН України, Київ, **7**, № 1, 274–297 (2010).
22. А. С. Сердюк, І. В. Соколенко, *Наближення класів класів (ψ, β) -диференційовних функцій інтерполяційними тригонометричними поліномами*, Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Збірник праць Інституту математики НАН України, Київ, **13**, № 1, 289–299 (2016).
23. А. С. Сердюк, І. В. Соколенко, *Апроксимація класів згорток періодичних функцій лінійними методами, побудованими на основі коефіцієнтів Фур'є–Лагранжа*, Аналіз та застосування: Збірник праць Інституту математики НАН України, Київ, **14**, № 1, 238–248 (2017).
24. А. С. Сердюк, І. В. Соколенко, *Наближення інтерполяційними тригонометричними поліномами в метриках просторів L_p на класах періодичних цілих функцій*, Укр. мат. журн., **71**, № 2, 283–292 (2019).
25. О. І. Степанець, А. С. Сердюк, *Оцінка залишку наближення інтерполяційними тригонометричними многочленами на класах нескінченно диференційовних функцій*, Теорія наближення функцій та її застосування: Праці Інституту математики НАН України, **31**, 446–460 (2000).
26. А. И. Степанец, А. С. Сердюк, *Приближение периодических аналитических функций интерполяционными тригонометрическими многочленами*, Укр. мат. журн., **59**, № 12, 1689–1701 (2000).
27. В. П. Моторный, *Приближение периодических функций интерполяционными многочленами в L_1* , Укр. мат. журн., **42**, № 6, 781–786 (1990).
28. A. Kolmogoroff, *Zur Grössenordnung des Restgliedes Fourierschen Reihen differenzierbarer Funktionen*, Ann. Math. (2), **36**, № 2, 521–526 (1935).
29. С. М. Никольский, *Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем*, Изв. АН СССР. Сер. мат., **10**, № 3, 207–256 (1946).
30. А. С. Сердюк, *Наближення класів аналітичних функцій сумами Фур'є в рівномірній метриці*, Укр. мат. журн., **57**, № 8, 1079–1096 (2005).
31. А. С. Сердюк, *Наближення класів аналітичних функцій сумами Фур'є в метриці простору L_p* , Укр. мат. журн., **57**, № 10, 1395–1408 (2005).

32. А. С. Сердюк, І. В. Соколенко, *Наближення сумами Фур'є на класах диференційовних у сенсі Вейля – Надя функцій із високим показником гладкості*, Укр. мат. журн., **74**, № 5, 685 – 700 (2022).
33. А. С. Сердюк, Т. А. Степанюк, *Наближення класів узагальнених інтегралів Пуассона сумами Фур'є в метриках просторів L_s* , Укр. мат. журн., **69**, № 5, 695 – 704 (2017).
34. A. S. Serdyuk, T. A. Stepanyuk, *Uniform approximations by Fourier sums on classes of generalized Poisson integrals*, Anal. Math., **45**, № 1, 201 – 236 (2019).
35. А. С. Сердюк, Т. А. Степанюк, *Наближення узагальнених інтегралів Пуассона інтерполяційними тригонометричними поліномами*, Укр. мат. журн., **75**, № 7, 946 – 969 (2023).
36. А. И. Степанец, А. С. Сердюк, *Приближение суммами Фурье и наилучшие приближения на классах аналитических функций*, Укр. мат. журн., **52**, № 3, 375 – 395 (2000).
37. А. И. Степанец, А. С. Сердюк, *Неравенства Лебега для интегралов Пуассона*, Укр. мат. журн., **52**, № 6, 798 – 808 (2000).
38. С. Б. Стечкин, *Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций*, Приближение функций полиномами и сплайнами, Сб. статей, Труды Математического института АН СССР, **145**, 126 – 151 (1980).
39. С. А. Теляковский, *О приближении суммами Фурье функций высокой гладкости*, Укр. мат. журн., **41**, № 4, 510 – 518 (1989).
40. А. И. Степанец, А. С. Сердюк, А. Л. Шидлич, *Классификация бесконечно дифференцируемых периодических функций*, Укр. мат. журн., **60**, № 12, 1686 – 1708 (2008).

Одержано 20.08.23,
після доопрацювання — 01.11.23