

ПРО ПОВНУ ІНТЕГРОВНІСТЬ І ЛІНЕАРИЗАЦІЮ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ КАЛОДЖЕРО – ДЕГАСПЕРІСА

Микола Притула, Ярина Коковська

Львівський національний університет імені Івана Франка

вул. Університетська, 1, Львів, 79602, Україна

*e-mail: mykola.prytula@gmail.com, відповідальний за листування,
yaryna.kokovska@gmail.com*

On the basis of the gradient holonomic method of investigation of integrability of nonlinear dynamical systems on functional manifolds, we establish the exact Lax-type linearization of the nonlinear Calogero-Degasperis dynamical system, its bi-Hamiltonicity and construct an infinite hierarchy of functional independent invariants. As a result, we obtain a compatible pair of the related Poisson structures.

На основі використання градієнтно-голономного методу дослідження інтегровності нелінійних динамічних систем на функціональних многовидах встановлено точну лінеаризацію типу Лакса нелінійної динамічної системи Калоджеро – Дегасперіса, її бігамільтоновість і побудовано нескінченну ієрархію функціональних незалежних інваріантів. Як наслідок, отримано сумісну пару пуассонових структур.

Закони збереження та лінеаризація. На нескінченновимірному гладкому 2π -періодичному многовиді $M \subset C_{2\pi}^{(\infty)}(\mathbf{R}^1; \mathbf{R}^1)$ розглядаємо нелінійну динамічну систему

$$u_t = u_{xxx} + 3u^2 u_{xx} + 9uu_x^2 + 3u^4 u_x = K[u], \quad (1)$$

де $t \in \mathbf{R}$ — еволюційний параметр, $K: M \rightarrow T(M)$ — гладке за Фреше поліноміальне векторне поле.

Рівняння (1) розглянуто в роботі Калоджеро [1] та відоме як рівняння Калоджеро – Дегасперіса [2]. У працях [3, 4] рівняння (1) досліджувалося Лі-груповими методами, було встановлено існування нескінченної ієрархії однорідних, локальних, нелокальних і неоднорідних симетрій. На жаль, встановити гамільтоновість і повну інтегровність потоку (1) не вдалося. Варто згадати роботу [5], у котрій досліджено повну інтегровність нелінійної динамічної системи Бюргерса – Кортевега – де Фріза за допомогою градієнтно-голономного алгоритму [5 – 7]. Ця система по формі аналогічна потоку (1), що стимулює нас застосувати до нього також цей алгоритм. Як покажемо далі, наше зауваження виявилось слушним, тобто за допомогою градієнтно-голономного алгоритму дослідження інтегровності нелінійних динамічних систем на функціональних многовидах ми встановили бігамільтоновість потоку (1) і його повну інтегровність.

А саме, використовуючи методи, розвинуті в [5 – 7], покажемо, що для динамічної системи (1) на функціональному многовиді M існує стандартне зображення типу Лакса, а сама ця система є цілком інтегровним гамільтоновим потоком зі скінченною ієрархією

інволютивних законів збереження. Використовуючи це зображення типу Лакса, можна отримати на функціональному многовиді в явному вигляді солітонні розв'язки динамічної системи (1). Розглянемо задачу існування нескінченної ієрархії інваріантів для нелінійної динамічної системи (1), застосовуючи функціонально-операторні методи з [8–10]. З цією метою опишемо асимптотичні розв'язки лінійного рівняння Нетер–Лакса

$$\varphi_t + K'^* \varphi = 0, \quad (2)$$

де $\varphi \in T^*(M)$, штрих позначає похідну Фреше нелінійного локального функціонала $K : M \rightarrow T(M)$, а $*$ — спряження щодо стандартної білінійної форми на $T^*(M) \times T(M)$. Оператор $K'^* : T^*(M) \rightarrow T^*(M)$ є диференціальним і має згідно з (1) вигляд

$$K'^* = -6uu_{xx} - 3u_x^2 - 6uu_x \partial - 3u^4 \partial + 3u^2 \partial^2 - \partial^3. \quad (3)$$

Це означає, що лінійне диференціальне рівняння (2) може допускати асимптотичний розв'язок $\varphi \in T^*(M)$ у вигляді

$$\varphi(x, t; \lambda) = \exp[\lambda^3 t + \partial^{-1} \sigma], \quad (4)$$

де $\lambda \in \mathbb{C}$ — комплексний параметр, а операцію (невизначеного) інтегрування у випадку періодичного многовиду M означено як

$$\partial^{-1}(\cdot) dx = \frac{1}{2} \left[\int_{x_0}^x (\cdot) dx - \int_x^{x_0+2\pi} (\cdot) dx \right]. \quad (5)$$

Очевидно, що для довільної фіксованої точки $x_0 \in \mathbb{R}$ операція (5) має необхідну властивість $\partial \cdot \partial^{-1} = 1$, $\partial = \partial/\partial x$ і

$$\sigma(x, t; \lambda) \simeq \sum_{j=-1}^{\infty} \sigma_j[u] \lambda^{-j} = \lambda \sigma_{-1} + \sigma_0 + \lambda^{-1} \sigma_1 + \dots \quad (6)$$

— відповідне асимптотичне розвинення при $|\lambda| \rightarrow \infty$. Підставляючи (6) у (4), з (2) знаходимо нескінченну систему рекурентних співвідношень

$$\begin{aligned} & \delta_{j,-3} - 6uu_{xx} \delta_{j,0} - 3u_x^2 \delta_{j,0} + \partial^{-1} \sigma_{j,t} \\ & - 6uu_x \sigma_j - 3u^4 \sigma_j + 3u^2 \sigma_{j,x} - \sigma_{j,xx} \\ & + 3u^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{j-k} \sigma_k - 3 \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{j-k} \sigma_{k,x} - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sigma_{j-k-s} \sigma_k \sigma_s = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

для всіх $j \cup \{-3\} \in \mathbb{Z}_+$.

Розв'язуючи послідовно рекурентні рівняння (7), одержуємо

$$\begin{aligned} \sigma_{-1} &= 1, & \sigma_0 &= u^2, & \sigma_1 &= -2(u^2)_x, & \sigma_2 &= 2(uu_x)_x, \\ \sigma_3 &= -2(uu_{xx})_x - 4(u^3 u_x)_x - \frac{2}{3}(u^6)_x \end{aligned} \quad (8)$$

і т. д.

З огляду на зображення (4) і вирази (8) отримуємо, що існує лише один нетривіальний закон збереження

$$\gamma = \frac{1}{2} \partial_{2\pi}^{-1}(u) := \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} u^2 dx. \quad (9)$$

Запишемо розв'язок (4), який отримуємо з динамічної системи (1), у вигляді

$$\varphi(x, t; \lambda) = \psi \exp(\lambda^3 t + \partial^{-1} u^2), \quad (10)$$

де функція $\psi(x, t; \lambda) := \exp[\partial^{-1}(\sigma - u^2 + \lambda)]$, очевидно, є однозначною. Оскільки $\varphi := \text{grad } \gamma[u] \in T^*(M)$, де γ є законом збереження динамічної системи (1), то з (9) маємо, що $\text{grad}\left(\frac{1}{2} \int u^2 dx\right) = u$, тобто

$$\varphi(x, t; \lambda) = u. \quad (11)$$

Підставляючи (11) у рівняння Нетер – Лакса (2), переконуємося, що має місце рівність

$$\varphi_t + K'^* \varphi = u_t - K[u] = 0.$$

Для подальшого аналізу зображення (10) використаємо тепер підстановку типу Гопфа – Коула

$$u = -\frac{\partial}{\partial x} \ln \psi = -\psi^{-1} \psi_x. \quad (12)$$

Підставимо вираз (12) у рівняння (1); отримуємо

$$\psi_t + \lambda^3 \psi - \psi_{xxx} = 0, \quad (13)$$

тобто лінійне гіперболічне рівняння третього порядку з постійними коефіцієнтами. Динамічна система (1) має розв'язок типу біжучої хвилі, але не має регулярних солітонів і для неї справджується тільки один поліноміальний локально визначений закон збереження (9). Покажемо, що проте для динамічної системи (1) існує нескінченна ієрархія інваріантів, яким відповідають нерегулярні аналоги солітонних розв'язків нетривіальної структури. А саме, ми встановили таке твердження.

Твердження 1. Динамічна система (1) є гамільтоновою щодо пуассонової структури [8, 9]

$$\vartheta(u) = B' \vartheta_0 B'^* = 4u \partial u - \partial u^{-1} \partial u^{-1} \partial + 2[\partial, u^{-1} \partial u],$$

$$\text{де } B(u, \psi) = u^2 - \left(\ln \left(\frac{\psi}{u} \right) \right)_x, \quad B'_u = 2u + \partial_x \cdot \frac{1}{u}.$$

Доведення. Дійсно, оскільки оператор $\vartheta: T^*(M) \rightarrow T(M)$ є косимплектичним, то досить перевірити його нетеровість

$$\vartheta' K - \vartheta K'^* - K' \vartheta = 0, \quad (14)$$

що легко встановити простим обчисленням.

Наслідок 1. Динамічна система (1) припускає еквівалентний запис

$$\frac{du}{dt} = -\vartheta \operatorname{grad} H,$$

де функція Гамільтона $H = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} u^2 dx$.

Доведення наслідку ґрунтується на простому факті гамільтоновості динамічної системи (13) і перетворення Гопфа – Коула (12).

Використовуючи ідею полігамільтоновості динамічної системи (13), легко встановлюємо [6], що динамічна система (1) є також узгоджено бігамільтоновою з таким гамільтоновим представленням

$$\frac{du}{dt} = -\eta \operatorname{grad} \tilde{H},$$

де імплектичний нетерів оператор $\eta: T^*(M) \rightarrow T(M)$ визначено виразом

$$\begin{aligned} \eta &= (2u + \partial u^{-1}) \partial^3 (2u - u^{-1} \partial) \\ &= 4u \partial^3 u - 2u \partial^3 u^{-1} \partial + 2\partial u^{-1} \partial^3 u - \partial u^{-1} \partial^3 u^{-1} \partial, \end{aligned} \quad (15)$$

а функція Гамільтона $\tilde{H} = \int u \exp(-\partial^{-1} u^2) dx$.

Теж прямим обчисленням переконуємося, що оператор $\eta: T^*(M) \rightarrow T(M)$, визначений виразом (15), задовольняє рівняння нетеровості вигляду (14).

Отже, тепер можемо сконструювати нескінченну ієрархію квазілокальних інваріантів $\gamma_j \in D(M)$, $j \in \mathbf{Z}_+$, динамічної системи (1), де, за визначенням,

$$\operatorname{grad} \gamma_{j+1} := (\vartheta^{-1} \eta)^j \operatorname{grad} \gamma_j, \quad j \in \mathbf{Z}_+, \quad \gamma_j := \tilde{H} \in D(M).$$

Беручи до уваги рівність

$$\varphi = u = \psi(x, t; \lambda) \exp(\lambda x + \lambda^3 t + \partial^{-1} u^2),$$

знаходимо, що

$$(u/\psi)_x = (\lambda + u^2) \frac{u}{\psi},$$

а це еквівалентне лінійній спектральній задачі типу Лакса

$$\psi_x = \left(\frac{u_x}{u} - u^2 - \lambda \right) \psi. \quad (16)$$

Одержані лінійні системи рівнянь (13) і (16) є сумісними та еквівалентними динамічній системі (1).

Твердження 2. Динамічна система (1) є повністю інтегровним бігамільтоновим потоком на функціональному многовиді M , представлення типу Лакса якого задано системою рівнянь (13), (16).

Висновки. У цій статті на прикладі нелінійної динамічної системи Калоджеро – Дегасперіса продемонстровано ефективність градієнтно-голономного алгоритму як критерію повної інтегровності нелінійних динамічних систем на функціональних многовидах. Зокрема показано, що як побічний результат ми також отримуємо відповідне представлення типу Лакса в явному вигляді, що в багатьох випадках є визначальним для аналітичного дослідження розв'язків заданої нелінійної динамічної системи.

Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів. Усі необхідні дані містяться в статті. Всі автори зробили рівномірний внесок у цю роботу. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Література

1. F. Calogero, *The evolution partial differential equation $u_t = u_{3x} + 3(u^2 u_{xx} + 3u u_x^2) + 3u^4 u_x$* , J. Math. Phys., **29**, 538 (1987).
2. F. Calogero, A. Degasperis, *Reduction technique for matrix nonlinear evolution equations solvable by the spectral transform*, J. Math. Phys., **22**, 23–31 (1981).
3. M. Euler, N. Euler, P. G. L. Leach, *Properties of the Calogero–Degasperis–Ibragimov–Shabat differential sequence*, Lobachevskii J. Math., **32**, № 1, 61–70 (2011).
4. A. Sergyeyev, J. A. Sanders, *A remark on nonlocal symmetries for the Calogero–Degasperis–Ibragimov–Shabat equation*, J. Nonlinear Math. Phys., **10/1**, 78–85 (2003).
5. М. М. Притула, А. К. Прикарпатський, М. І. Вовк, *Про повну інтегровність та лінеаризацію нелінійного рівняння типу Бюргерса–Кортевега–де Фріза*, Мат. методи та фіз.-мех. поля, **51**, № 1, 99–102 (2008).
6. О. Є. Гентош, М. М. Притула, А. К. Прикарпатський, *Диференціально-геометричні та Лі-алгебраїчні основи дослідження інтегровних нелінійних динамічних систем на функціональних многовидах*, Видавництво Львівського університету, Львів (2006).
7. П. І. Голод, А. І. Клімич, *Математичні основи теорії симетрій*, Наукова думка, Київ (1992).
8. А. М. Самойленко, Я. А. Прикарпатський, *Алгебраїчні аспекти цілком інтегровних динамічних систем та їх збурень*, Інститут математики НАН України, Київ (2002).
9. A. K. Prykarpatsky, I. Y. Mykytiuk, *Algebraic integrability of nonlinear dynamical systems on manifolds: classical and quantum aspects*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht (1998).
10. D. Blackmore, A. K. Prykarpatsky, V. Hr. Samoylenko, *Nonlinear dynamical systems of mathematical physics*, World Scientific Publishing, Hackensack, NJ (2011).

Одержано 12.07.23,
після доопрацювання — 17.08.23