

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ НЕОДНОРІДНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ З ПРЯМОКУТНИМИ МАТРИЦЯМИ І ОДНІЄЮ ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ У ФІКСОВАНИЙ МОМЕНТ ЧАСУ

Михайло Єлішевич

*Київський національний університет будівництва і архітектури
просп. Повітряних сил України, 31, Київ, 03037, Україна
e-mail: m-a-e@i.ua*

The solvability conditions are determined and the general solution and the solution of the Cauchy problem are constructed for the system of linear inhomogeneous first-order differential equations with rectangular matrices and one impulse action at a fixed moment of time.

Визначено умови розв'язності та побудовано загальний розв'язок і розв'язок задачі Коші для системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку з прямокутними матрицями і однією імпульсною дією у фіксований момент часу.

Постановка задачі. Для системи

$$B(t) \frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad t \in [a; b] \setminus t_1, \quad (1)$$

$$x(t_1 + 0) = S_1 x(t_1 - 0) + \eta_1 \quad (2)$$

розглядаємо задачу Коші з початковою умовою

$$x(\tau_0) = x_0, \quad \tau_0 \in [a; b]. \quad (3)$$

Тут t_1 — точка імпульсної дії, $a \leq t_1 \leq b$, $A(t)$, $B(t)$ — прямокутні матриці-функції розмірності $m \times n$, $f(t)$ — вектор-функція розмірності m , $A(t), B(t), f(t) \in C^\infty[a; b] \setminus t_1$ дійсні або комплексні, в точці t_1 можуть мати розриви першого роду, S_1 — стала квадратна матриця порядку n , η_1 , x_0 — сталі вектори розмірності n .

Задачу без імпульсної дії розглянуто в [1, 2]. У [1, с. 53–74] матриці $A(t)$ і $B(t)$ були квадратними, $B(t)$ — виродженою, в [2] — прямокутними. В [3, 4] розглянуто задачу з імпульсною дією. У [3, с. 45–52] матриця $B(t)$ була одиничною, в [4] — квадратною виродженою. У кожній з цих робіт визначено умови розв'язності і побудовано загальний розв'язок і розв'язок задачі Коші однорідної і неоднорідної системи.

Основні означення. Позначимо через I_i нільпотентний блок Жордана порядку i , 0_i — нульовий вектор порядку i ,

$$L(t) = A(t) - B(t) \frac{d}{dt}, \quad L^*(t) = A^*(t) + \frac{d}{dt} B^*(t)$$

— оператори, формально спряжені один до одного.

Для зручності точку t_1 будемо розглядати як дві різні точки $t_1 - 0$ і $t_1 + 0$. Похідні в цих точках розуміємо як праву і ліву відповідно. Якщо $t_1 > a$, то покладемо $t_0 + 0 = a$. Якщо $t_1 < b$, то покладемо $t_2 - 0 = b$.

Означення 1 [1, с. 54]. Вектори $\varphi^{(i)}(t)$, $i = \overline{1, p}$, $p \geq 1$, утворюють у точці $t \in [a; b]$ скінченний жордановий ланцюжок матриці $B(t)$ щодо оператора $L(t)$ довжини p , якщо для них виконуються співвідношення

$$B(t)\varphi^{(1)}(t) = 0,$$

$$B(t)\varphi^{(i)}(t) = L(t)\varphi^{(i-1)}(t), \quad i = \overline{2, p},$$

$$L(t)\varphi^{(p)}(t) \notin \text{Im } B(t).$$

Означення 2. Вектори $\tilde{\varphi}^{(i)}(t)$, $i = \overline{1, \tilde{p}}$, $\tilde{p} \geq 1$, утворюють у точці $t \in [a; b]$ циклічний жордановий ланцюжок матриці $B(t)$ щодо оператора $L(t)$ довжини $\tilde{p}$, якщо для них виконуються співвідношення

$$B(t)\tilde{\varphi}^{(1)}(t) = 0,$$

$$B(t)\tilde{\varphi}^{(i)}(t) = L(t)\tilde{\varphi}^{(i-1)}(t), \quad i = \overline{2, \tilde{p}},$$

$$L(t)\tilde{\varphi}^{(\tilde{p})}(t) = 0.$$

Означення 3. Вектори $\hat{\varphi}^{(i)}(t)$, $i = \overline{1, \hat{p}}$, $\hat{p} \geq 1$, утворюють у точці $t \in [a; b]$ допоміжний ланцюжок матриці $B(t)$ щодо оператора $L(t)$ довжини $\hat{p}$, якщо для них виконуються співвідношення

$$B(t)\hat{\varphi}^{(i)}(t) = L(t)\hat{\varphi}^{(i-1)}(t), \quad i = \overline{2, \hat{p}},$$

$$B(t)\hat{\varphi}^{(1)}(t) \notin \text{Im } L(t),$$

$$L(t)\hat{\varphi}^{(\hat{p})}(t) \notin \text{Im } B(t).$$

Аналогічно визначимо ланцюжки векторів на тих із відрізків $[t_i + 0; t_{i+1} - 0]$, $i = 0, 1$, які не вироджуються в точки.

У цій роботі розглядаємо випадок, коли можуть існувати скінченні, циклічні й допоміжні ланцюжки, але $\text{rank } B(t) = \text{const}$, $\text{rank } L(t) = \text{const}$ на кожному з відрізків $[t_i + 0; t_{i+1} - 0]$, $i = 0, 1$, якщо він не вироджується в точку, внаслідок чого кількості й довжини вказаних ланцюжків на цьому відрізку сталі.

Деякі теореми наводимо без доведень, оскільки вони аналогічні доведенням попередніх теорем.

Отриманий результат. Спочатку розглянемо випадок, коли $a < t_1 < b$.

Розглянемо окремо кожен із відрізків $[t_k + 0; t_{k+1} - 0]$, $k = 0, 1$. Нехай k фіксоване, $t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0]$. Аналогічно [2] вважатимемо, що існують:

– $\check{r}_k$, $\check{r}_k \geq 0$, циклічних ланцюжків матриці $B(t)$ щодо оператора $L(t)$ одиничної довжини, що складаються з векторів $\check{\varphi}_{ki}(t)$, $i = \overline{1, \check{r}_k}$;

- $\check{r}_k, \check{r}_k \geq 0$, циклічних ланцюжків матриці $B^*(t)$ щодо оператора $L^*(t)$ одиничної довжини, що складаються з векторів $\check{\psi}_{ki}(t)$, $i = \overline{1, \check{r}_k}$;
- $\tilde{r}_k, \tilde{r}_k \geq 0$, циклічних ланцюжків матриці $B(t)$ щодо оператора $L(t)$ довжин $(\tilde{s}_{ki} + 1)$, $i = \overline{1, \tilde{r}_k}$, $0 < \tilde{s}_{k1} \leq \dots \leq \tilde{s}_{k\tilde{r}_k}$, що складаються з векторів $\tilde{\varphi}_{ki}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \tilde{s}_{ki} + 1}$, $i = \overline{1, \tilde{r}_k}$;
- $\hat{r}_k, \hat{r}_k \geq 0$, циклічних ланцюжків матриці $B^*(t)$ щодо оператора $L^*(t)$ довжин $(\hat{s}_{ki} + 1)$, $i = \overline{1, \hat{r}_k}$, $0 < \hat{s}_{k1} \leq \dots \leq \hat{s}_{k\hat{r}_k}$, що складаються з векторів $\hat{\psi}_{ki}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \hat{s}_{ki} + 1}$, $i = \overline{1, \hat{r}_k}$;
- $r_k, r_k \geq 0$, скінченних ланцюжків матриці $B(t)$ щодо оператора $L(t)$ довжин s_{ki} , $i = \overline{1, r_k}$, $s_{k1} \geq \dots \geq s_{kr_k} > 0$, що складаються з векторів $\varphi_{ki}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_{ki}}$, $i = \overline{1, r_k}$.

Позначимо

$$s_k = \sum_{i=1}^{r_k} s_{ki}, \quad \tilde{s}_k = \sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} \tilde{s}_{ki}, \quad \hat{s}_k = \sum_{i=1}^{\hat{r}_k} \hat{s}_{ki},$$

$$\alpha_k = n - \check{r}_k - \tilde{r}_k - \tilde{s}_k - s_k - \hat{s}_k = m - \check{r}_k - \hat{r}_k - \hat{s}_k - s_k - \tilde{s}_k.$$

Згідно з [2, 5] існують також:

- r_k скінченних ланцюжків матриці $B^*(t)$ щодо оператора $L^*(t)$ довжин s_{ki} , $i = \overline{1, r_k}$, що складаються з векторів $\psi_{ki}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_{ki}}$, $i = \overline{1, r_k}$;
- $\hat{r}_k$ допоміжних ланцюжків матриці $B(t)$ щодо оператора $L(t)$ довжин $\hat{s}_{ki}$, $i = \overline{1, \hat{r}_k}$, що складаються з векторів $\hat{\varphi}_{ki}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \hat{s}_{ki}}$, $i = \overline{1, \hat{r}_k}$;
- $\tilde{r}_k$ допоміжних ланцюжків матриці $B^*(t)$ щодо оператора $L^*(t)$ довжин $\tilde{s}_{ki}$, $i = \overline{1, \tilde{r}_k}$, що складаються з векторів $\tilde{\psi}_{ki}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \tilde{s}_{ki}}$, $i = \overline{1, \tilde{r}_k}$;
- $\check{r}_k$ векторів $\check{\varphi}_{ki}(t) \notin \text{Im } B(t) \cup \text{Im } L(t)$, $i = \overline{1, \check{r}_k}$;
- $\check{r}_k$ векторів $\check{\psi}_{ki}(t) \notin \text{Im } B^*(t) \cup \text{Im } L^*(t)$, $i = \overline{1, \check{r}_k}$;
- α_k векторів $q_{ki}(t)$, $i = \overline{1, \alpha_k}$;
- α_k векторів $p_{ki}(t)$, $i = \overline{1, \alpha_k}$,

таких, що елементи кожної з наступних множин належать $C^\infty[t_k + 0; t_{k+1} - 0]$ і лінійно незалежні:

1) $q_{ki}(t)$, $i = \overline{1, \alpha_k}$, $\check{\varphi}_{ki}(t)$, $i = \overline{1, \check{r}_k}$, $\tilde{\varphi}_{ki}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \tilde{s}_{ki} + 1}$, $i = \overline{1, \tilde{r}_k}$, $\varphi_{ki}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_{ki}}$, $i = \overline{1, r_k}$, $\hat{\varphi}_{ki}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \hat{s}_{ki}}$, $i = \overline{1, \hat{r}_k}$;

2) $B(t)q_{ki}(t)$, $i = \overline{1, \alpha_k}$, $\check{\varphi}_{ki}(t)$, $i = \overline{1, \check{r}_k}$, $L(t)\tilde{\varphi}_{ki}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \tilde{s}_{ki}}$, $i = \overline{1, \tilde{r}_k}$, $L(t)\varphi_{ki}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_{ki}}$, $i = \overline{1, r_k}$, $B(t)\hat{\varphi}_{ki}^{(1)}(t)$, $i = \overline{1, \hat{r}_k}$, $L(t)\hat{\varphi}_{ki}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \hat{s}_{ki}}$, $i = \overline{1, \hat{r}_k}$;

3) $p_{ki}(t)$, $i = \overline{1, \alpha_k}$, $\check{\psi}_{ki}(t)$, $i = \overline{1, \check{r}_k}$, $\tilde{\psi}_{ki}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \tilde{s}_{ki} + 1}$, $i = \overline{1, \tilde{r}_k}$, $\psi_{ki}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_{ki}}$, $i = \overline{1, r_k}$, $\hat{\psi}_{ki}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \hat{s}_{ki}}$, $i = \overline{1, \hat{r}_k}$;

4) $B^*(t)p_{ki}(t)$, $i = \overline{1, \alpha_k}$, $\check{\psi}_{ki}(t)$, $i = \overline{1, \check{r}_k}$, $L^*(t)\tilde{\psi}_{ki}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \tilde{s}_{ki}}$, $i = \overline{1, \tilde{r}_k}$, $L^*(t)\psi_{ki}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_{ki}}$, $i = \overline{1, r_k}$, $B^*(t)\hat{\psi}_{ki}^{(1)}(t)$, $i = \overline{1, \hat{r}_k}$, $L^*(t)\hat{\psi}_{ki}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \hat{s}_{ki}}$, $i = \overline{1, \hat{r}_k}$.

Пари множин 1) і 4), 2) і 3) відповідно представляють собою біортогональні системи:

$$(B(t)q_{ki}(t), p_{ku}(t)) = (q_{ki}(t), B^*(t)p_{ku}(t)) = \delta_{iu}, \quad i, u = \overline{1, \alpha_k},$$

$$(\check{\varphi}_{ki}(t), \check{\psi}_{ku}(t)) = \delta_{iu}, \quad i, u = \overline{1, \check{r}_k},$$

$$(\tilde{\varphi}_{ki}(t), \tilde{\psi}_{ku}(t)) = \delta_{iu}, \quad i, u = \overline{1, \tilde{r}_k},$$

$$\left(\tilde{\varphi}_{ki}^{(j)}(t), L^*(t)\hat{\psi}_{ku}^{(v)}(t)\right) = \left(L(t)\tilde{\varphi}_{ki}^{(j)}(t), \hat{\psi}_{ku}^{(v)}(t)\right) = \delta_{iu}\delta_{j+v, \tilde{s}_{ki}+1}, \quad j, v = \overline{1, \tilde{s}_{ki}}, \quad i, u = \overline{1, \tilde{r}_k},$$

$$\left(\tilde{\varphi}_{ki}^{(\tilde{s}_{ki}+1)}(t), B^*(t)\hat{\psi}_{ku}^{(1)}(t)\right) = \delta_{iu}, \quad i, u = \overline{1, \tilde{r}_k},$$

$$\left(\hat{\varphi}_{ki}^{(j)}(t), L^*(t)\tilde{\psi}_{ku}^{(v)}(t)\right) = \left(L(t)\hat{\varphi}_{ki}^{(j)}(t), \tilde{\psi}_{ku}^{(v)}(t)\right) = \delta_{iu}\delta_{j+v, \hat{s}_{ki}+1}, \quad j, v = \overline{1, \hat{s}_{ki}}, \quad i, u = \overline{1, \hat{r}_k},$$

$$\left(B(t)\hat{\varphi}_{ki}^{(1)}(t), \tilde{\psi}_{ku}^{(\hat{s}_{ki}+1)}(t)\right) = \delta_{iu}, \quad i, u = \overline{1, \hat{r}_k},$$

$$\left(\varphi_{ki}^{(j)}(t), L^*(t)\psi_{ku}^{(v)}(t)\right) = \left(L(t)\varphi_{ki}^{(j)}(t), \psi_{ku}^{(v)}(t)\right) = \delta_{iu}\delta_{j+v, s_{ki}+1}, \quad j, v = \overline{1, s_{ki}}, \quad i, u = \overline{1, r_k},$$

усі інші скалярні добутки векторів із відповідних пар множин рівні 0.

Із використанням елементів множин 1) і 3) складемо прямокутні матриці і вектори

$$Q_k(t) = [q_{k1}(t), \dots, q_{k\alpha_k}(t)],$$

$$\Phi_{ki}(t) = [\varphi_{ki}^{(1)}(t), \dots, \varphi_{ki}^{(s_{ki})}(t)], \quad i = \overline{1, r_k},$$

$$\tilde{\Phi}_{kij}(t) = [\tilde{\varphi}_{ki}^{(j)}(t), \dots, \tilde{\varphi}_{ki}^{(1)}(t)], \quad j = \tilde{s}_{ki}, \tilde{s}_{ki} + 1, \quad i = \overline{1, \tilde{r}_k},$$

$$\hat{\Phi}_{ki}(t) = [\hat{\varphi}_{ki}^{(1)}(t), \dots, \hat{\varphi}_{ki}^{(\hat{s}_{ki})}(t)], \quad i = \overline{1, \hat{r}_k},$$

$$P_k(t) = [p_{k1}(t), \dots, p_{k\alpha_k}(t)],$$

$$\Psi_{ki}(t) = [\psi_{ki}^{(s_{ki})}(t), \dots, \psi_{ki}^{(1)}(t)], \quad i = \overline{1, r_k},$$

$$\tilde{\Psi}_{kij}(t) = [\tilde{\psi}_{ki}^{(j)}(t), \dots, \tilde{\psi}_{ki}^{(1)}(t)], \quad j = \hat{s}_{ki}, \hat{s}_{ki} + 1, \quad i = \overline{1, \hat{r}_k},$$

$$\hat{\Psi}_{ki}(t) = [\hat{\psi}_{ki}^{(1)}(t), \dots, \hat{\psi}_{ki}^{(\hat{s}_{ki})}(t)], \quad i = \overline{1, \hat{r}_k},$$

$X_k(t)$ — фундаментальна матриця однорідної системи

$$\frac{dx_k}{dt} = P_k^*(t)(L(t)Q_k(t))x_k,$$

$$\tilde{X}_k(t) = Q_k(t)X_k(t),$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}_k(t) = & \tilde{X}_k(t) \int_{t_k+0}^t X_k^{-1}(\tau) P_k^*(\tau) f(\tau) d\tau \\ & - \sum_{i=1}^{r_k} \Phi_{ki}(t) \sum_{j=0}^{s_{ki}-1} I_{s_{ki}}^j \frac{d^j}{dt^j} (\Psi_{ki}^*(t) f(t)) \\ & - \sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} \tilde{\Phi}_{kij}(t) \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{ki}-1} (I_{\tilde{s}_{ki}}^T)^j \frac{d^j}{dt^j} (\hat{\Psi}_{ki}^*(t) f(t)) \end{aligned}$$

$$- \sum_{i=1}^{\hat{r}_k} \hat{\Phi}_{ki}(t) \sum_{j=0}^{\hat{s}_{ki}-1} I_{\hat{s}_{ki}}^j \frac{d^j}{dt^j} \left(\tilde{\Psi}_{ki\hat{s}_{ki}}^*(t) f(t) \right),$$

c_k — довільний сталий вектор розмірності α_k , $\tilde{\beta}_{ki}(t) \in C^\infty[t_k + 0; t_{k+1} - 0]$, $i = \overline{1, \tilde{r}_k}$, $\tilde{\beta}_{ki}(t) \in C^\infty[t_k + 0; t_{k+1} - 0]$, $i = \overline{1, \tilde{r}_k}$, — довільні скалярні функції,

$$\hat{X}_0 = \left[\tilde{X}_0(t_1 - 0), \tilde{\Phi}_{01, \tilde{s}_{01}+1}(t_1 - 0), \dots, \tilde{\Phi}_{0\tilde{r}_0, \tilde{s}_{0\tilde{r}_0}+1}(t_1 - 0), \check{\varphi}_{01}(t_1 - 0), \dots, \check{\varphi}_{0\tilde{r}_0}(t_1 - 0) \right],$$

$$\tilde{A}_1 = \text{col} \left[\sum_{i=0}^{s_{11}-1} I_{s_{11}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\Psi_{11}^*(t) A(t)), \dots, \sum_{i=0}^{s_{1r_1}-1} I_{s_{1r_1}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\Psi_{1r_1}^*(t) A(t)), \right. \\ \left. \sum_{i=0}^{\hat{s}_{11}-1} I_{\hat{s}_{11}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\tilde{\Psi}_{11\hat{s}_{11}}^*(t) A(t)), \dots, \sum_{i=0}^{\hat{s}_{1\hat{r}_1}-1} I_{\hat{s}_{1\hat{r}_1}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\tilde{\Psi}_{1\hat{r}_1\hat{s}_{1\hat{r}_1}}^*(t) A(t)) \right] \Bigg|_{t=t_1+0},$$

$$\tilde{f}_1 = \text{col} \left[\sum_{i=0}^{s_{11}-1} I_{s_{11}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\Psi_{11}^*(t) f(t)), \dots, \sum_{i=0}^{s_{1r_1}-1} I_{s_{1r_1}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\Psi_{1r_1}^*(t) f(t)), \right. \\ \left. \sum_{i=0}^{\hat{s}_{11}-1} I_{\hat{s}_{11}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\tilde{\Psi}_{11\hat{s}_{11}}^*(t) f(t)), \dots, \sum_{i=0}^{\hat{s}_{1\hat{r}_1}-1} I_{\hat{s}_{1\hat{r}_1}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\tilde{\Psi}_{1\hat{r}_1\hat{s}_{1\hat{r}_1}}^*(t) f(t)) \right] \Bigg|_{t=t_1+0},$$

$$\tilde{B}_1 = X_1^{-1}(t_1 + 0) P_1^*(t_1 + 0) B(t_1 + 0), \quad \hat{A}_1 = \tilde{A}_1 S_1 \hat{X}_0,$$

$$\Xi_1 = \hat{A}_1^-, \quad \hat{x}_1 = S_1 \tilde{x}_0(t_1 - 0) + \eta_1.$$

Матриці Θ_1 і Υ_1 складемо з елементів базисів $\ker \hat{A}_1$ і $\ker \hat{A}_1^*$ відповідно.

Матриці Ξ_1 і Θ_1 наведемо в такому вигляді:

$$\Xi_1 = \text{col} \left(\Xi_{10}, \tilde{\Xi}_{11}^{(0)}, \dots, \tilde{\Xi}_{11}^{(\tilde{s}_{01})}, \dots, \tilde{\Xi}_{1\tilde{r}_0}^{(0)}, \dots, \tilde{\Xi}_{1\tilde{r}_0}^{(\tilde{s}_{0\tilde{r}_0})}, \check{\Xi}_{11}, \dots, \check{\Xi}_{1\tilde{r}_0} \right), \quad (4)$$

$$\Theta_1 = \text{col} \left(\Theta_{10}, \tilde{\Theta}_{11}^{(0)}, \dots, \tilde{\Theta}_{11}^{(\tilde{s}_{01})}, \dots, \tilde{\Theta}_{1\tilde{r}_0}^{(0)}, \dots, \tilde{\Theta}_{1\tilde{r}_0}^{(\tilde{s}_{0\tilde{r}_0})}, \check{\Theta}_{11}, \dots, \check{\Theta}_{1\tilde{r}_0} \right), \quad (5)$$

де Ξ_{10} і Θ_{10} — прямокутні матриці розмірності $\alpha_0 \times (s_1 + \hat{s}_1)$ і $\alpha_0 \times \dim \ker \hat{A}_1$, усі інші компоненти — рядки розмірності $(s_1 + \hat{s}_1)$ і $\dim \ker \hat{A}_1$ відповідно,

$$\beta_0 = \text{col} \left(c_0, \tilde{\beta}_{01}(t), \dots, \frac{d^{\tilde{s}_{01}}}{dt^{\tilde{s}_{01}}} \tilde{\beta}_{01}(t), \dots, \tilde{\beta}_{0\tilde{r}_0}(t), \dots, \frac{d^{\tilde{s}_{0\tilde{r}_0}}}{dt^{\tilde{s}_{0\tilde{r}_0}}} \tilde{\beta}_{0\tilde{r}_0}(t), \right. \\ \left. \check{\beta}_{01}(t), \dots, \check{\beta}_{0\tilde{r}_0}(t) \right) \Bigg|_{t=t_1-0}, \quad (6)$$

$\tilde{c}_1$ — довільний сталий вектор розмірності $\dim \ker \hat{A}_1$.

Згідно з [2] для розв'язності системи (1) необхідно й достатньо, щоб справдилися рівності

$$\sum_{j=0}^{\hat{s}_{ki}} \frac{d^j}{dt^j} \left(f(t), \tilde{\psi}_{ki}^{(\hat{s}_{ki}-j+1)}(t) \right) = 0, \quad i = \overline{1, \hat{r}_k}, \quad t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k = 0, 1, \quad (7)$$

$$\left(f(t), \check{\psi}_{ki}(t)\right) = 0, \quad i = \overline{1, \check{r}_k}, \quad t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k = 0, 1. \quad (8)$$

При їхньому виконанні система (1) має загальний розв'язок

$$x(t) = \tilde{X}_k(t)c_k + \tilde{x}_k(t) + \sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{ki}} \left(\frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{ki}(t) \right) \tilde{\varphi}_{ki}^{(\tilde{s}_{ki}-j+1)}(t) + \sum_{i=1}^{\check{r}_k} \check{\beta}_{ki}(t) \check{\varphi}_{ki}(t), \quad (9)$$

$$t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k = 0, 1.$$

Для розв'язності задачі Коші (1), (3), $t \in [t_1 + 0; t_2 - 0]$, $\tau_0 = t_1 + 0$, необхідно й достатньо виконання рівностей (7), (8),

$$\tilde{A}_1 x_0 + \tilde{f}_1 = 0. \quad (10)$$

При їхньому виконанні система (1) має розв'язки

$$x(t) = \tilde{X}_1(t)\tilde{B}_1 x_0 + \tilde{x}_1(t) + \sum_{i=1}^{\tilde{r}_1} \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{1i}} \left(\frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{1i}(t) \right) \tilde{\varphi}_{1i}^{(\tilde{s}_{1i}-j+1)}(t) + \sum_{i=1}^{\check{r}_1} \check{\beta}_{1i}(t) \check{\varphi}_{1i}(t), \quad (11)$$

$$t \in [t_1 + 0; t_2 - 0],$$

$$\tilde{\beta}_{1i}(t_1 + 0) = \left(x_0, B^*(t_1 + 0) \hat{\psi}_{1i}^{(1)}(t_1 + 0) \right), \quad i = \overline{1, \tilde{r}_1}, \quad (12)$$

$$\left. \frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{1i}(t) \right|_{t=t_1+0} = \left[\left(x_0, L^*(t) \hat{\psi}_{1i}^{(j)}(t) \right) + \sum_{u=0}^{j-1} \frac{d^u}{dt^u} \left(f(t), \hat{\psi}_{1i}^{(j-u)}(t) \right) \right] \Big|_{t=t_1+0}, \quad (13)$$

$$j = \overline{1, \tilde{s}_{1i}}, \quad i = \overline{1, \tilde{r}_1},$$

$$\check{\beta}_{1i}(t_1 + 0) = (x_0, \check{\psi}_{1i}(t_1 + 0)), \quad i = \overline{1, \check{r}_1}. \quad (14)$$

Теорема 1. Якщо $a < t_1 < b$, існують множини векторів 1)–4), $k = 0, 1$, то система (1), (2) розв'язна в тому і тільки тому випадку, коли виконуються рівності (7), (8),

$$\Upsilon_1^*(\tilde{A}_1 \hat{x}_1 + \tilde{f}_1) = 0. \quad (15)$$

При їхньому виконанні вона має загальний розв'язок

$$x(t) = \tilde{X}_0(t) \left[\Theta_{10} \tilde{c}_1 - \Xi_{10} (\tilde{A}_1 \hat{x}_1 + \tilde{f}_1) \right] + \tilde{x}_0(t) + \sum_{i=1}^{\tilde{r}_0} \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{0i}} \left(\frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{0i}(t) \right) \tilde{\varphi}_{0i}^{(\tilde{s}_{0i}-j+1)}(t) + \sum_{i=1}^{\check{r}_0} \check{\beta}_{0i}(t) \check{\varphi}_{0i}(t), \quad t \in [t_0 + 0; t_1 - 0], \quad (16)$$

$$x(t) = \tilde{X}_1(t)\tilde{B}_1 \left\{ S_1 \hat{X}_0 \left[\Theta_{10} \tilde{c}_1 - \Xi_{10} (\tilde{A}_1 \hat{x}_1 + \tilde{f}_1) \right] + \hat{x}_1 \right\} + \tilde{x}_1(t) + \sum_{i=1}^{\tilde{r}_1} \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{1i}} \left(\frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{1i}(t) \right) \tilde{\varphi}_{1i}^{(\tilde{s}_{1i}-j+1)}(t) + \sum_{i=1}^{\check{r}_1} \check{\beta}_{1i}(t) \check{\varphi}_{1i}(t), \quad t \in [t_1 + 0; t_2 - 0], \quad (17)$$

$$\left. \frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{0i}(t) \right|_{t=t_1-0} = \tilde{\Theta}_{1i}^{(j)} \tilde{c}_1 - \tilde{\Xi}_{1i}^{(j)} (\tilde{A}_1 \hat{x}_1 + \tilde{f}_1), \quad j = \overline{0, \tilde{s}_{0i}}, \quad i = \overline{1, \tilde{r}_0}, \quad (18)$$

$$\check{\beta}_{0i}(t_1 - 0) = \check{\Theta}_{1i} \tilde{c}_1 - \check{\Xi}_{1i} (\tilde{A}_1 \hat{x}_1 + \tilde{f}_1), \quad i = \overline{1, \check{r}_0}, \quad (19)$$

$$\tilde{\beta}_{1i}(t_1 + 0) = \left(S_1 \hat{X}_0 \left[\Theta_1 \tilde{c}_1 - \Xi_1 (\tilde{A}_1 \hat{x}_1 + \tilde{f}_1) \right] + \hat{x}_1, B^*(t_1 + 0) \hat{\psi}_{1i}^{(1)}(t_1 + 0) \right), \quad i = \overline{1, \tilde{r}_1}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{1i}(t) \right|_{t=t_1+0} = & \left[\left(S_1 \hat{X}_0 \left[\Theta_1 \tilde{c}_1 - \Xi_1 (\tilde{A}_1 \hat{x}_1 + \tilde{f}_1) \right] + \hat{x}_1, L^*(t) \hat{\psi}_{1i}^{(j)}(t) \right) \right. \\ & \left. + \sum_{u=0}^{j-1} \frac{d^u}{dt^u} \left(f(t), \hat{\psi}_{1i}^{(j-u)}(t) \right) \right] \Big|_{t=t_1+0}, \quad j = \overline{1, \tilde{s}_{1i}}, \quad i = \overline{1, \tilde{r}_1}, \quad (21) \end{aligned}$$

$$\check{\beta}_{1i}(t_1 + 0) = \left(S_1 \hat{X}_0 \left[\Theta_1 \tilde{c}_1 - \Xi_1 (\tilde{A}_1 \hat{x}_1 + \tilde{f}_1) \right] + \hat{x}_1, \check{\psi}_{1i}(t_1 + 0) \right), \quad i = \overline{1, \check{r}_1}. \quad (22)$$

Доведення. Подавши (9) при $t = t_1 - 0$ у вигляді

$$x(t_1 - 0) = \hat{X}_0 \beta_0 + \tilde{x}_0(t_1 - 0) \quad (23)$$

та підставивши у (2), отримаємо

$$x(t_1 + 0) = S_1 \hat{X}_0 \beta_0 + \hat{x}_1. \quad (24)$$

Для задачі Коші (1), (24), $t \in [t_1 + 0; t_2 - 0]$ умова (10) має вигляд

$$\hat{A}_1 \beta_0 + \tilde{A}_1 \hat{x}_1 + \tilde{f}_1 = 0.$$

Ця рівність розв'язна за умовою (15). Якщо вона виконується, то

$$\beta_0 = \Theta_1 \tilde{c}_1 - \Xi_1 (\tilde{A}_1 \hat{x}_1 + \tilde{f}_1). \quad (25)$$

Підставивши (25) до (23), (24), одержимо

$$x(t_1 - 0) = \hat{X}_0 \left[\Theta_1 \tilde{c}_1 - \Xi_1 (\tilde{A}_1 \hat{x}_1 + \tilde{f}_1) \right] + \tilde{x}_0(t_1 - 0), \quad (26)$$

$$x(t_1 + 0) = S_1 \hat{X}_0 \left[\Theta_1 \tilde{c}_1 - \Xi_1 (\tilde{A}_1 \hat{x}_1 + \tilde{f}_1) \right] + \hat{x}_1. \quad (27)$$

З (4) – (6), (9), (25) випливають (16), (18), (19). З (11) – (14), (27) випливають (17), (20) – (22).

Теорему 1 доведено.

Якщо $a = t_1$ (відрізок $[t_0 + 0; t_1 - 0]$ вироджується в точку), то покладемо $\hat{A}_0 = [A(t_1 - 0), -B(t_1 - 0)]$, $\hat{\Xi}_0 = \hat{A}_0^-$, матриці $\hat{\Theta}_0$ і Υ_0 складемо з елементів базисів $\ker \hat{A}_0$ і $\ker \hat{A}_0^*$, $\hat{\Xi}_0$ і $\hat{\Theta}_0$ подамо у вигляді $\hat{\Xi}_0 = \text{col}(\Xi_{00}, \Xi_{01})$, $\hat{\Theta}_0 = \text{col}(\Theta_{00}, \Theta_{01})$, де Ξ_{00} і Ξ_{01} — прямокутні матриці розмірності $n \times m$, Θ_{00} і Θ_{01} — $n \times \dim \ker \hat{A}_0$ відповідно, $\hat{X}_0 = \Theta_{00}$, $\tilde{x}(t_1 - 0) = -\Xi_{00} f(t_1 - 0)$, $\beta_0 = c_0$ — довільний сталий вектор розмірності $\dim \ker \hat{A}_0$.

Теорема 2. Якщо $a = t_1 < b$, існують множини векторів 1)–4), $k = 1$, то система (1), (2) розв'язна в тому і тільки тому випадку, коли виконуються рівності (7), (8), $k = 1$, (15),

$$\Upsilon_0^* f(t_1 - 0) = 0. \quad (28)$$

При їхньому виконанні система (1), (2) має загальний розв'язок (17), (20)–(22),

$$x(t_1 - 0) = \Theta_{00} \left[\Theta_1 \tilde{c}_1 - \Xi_1 (\tilde{A}_1 \hat{x}_1 + \tilde{f}_1) \right] - \Xi_{00} f(t_1 - 0), \quad (29)$$

$$\left. \frac{d}{dt} x(t) \right|_{t=t_1-0} = \Theta_{01} \left[\Theta_1 \tilde{c}_1 - \Xi_1 (\tilde{A}_1 \hat{x}_1 + \tilde{f}_1) \right] - \Xi_{01} f(t_1 - 0). \quad (30)$$

Доведення. Подамо (1) при $t = t_1 - 0$ у вигляді

$$\hat{A}_0 \operatorname{col} \left(x(t_1 - 0), \left. \frac{d}{dt} x(t) \right|_{t=t_1-0} \right) + f(t_1 - 0) = 0.$$

Для розв'язності цієї рівності необхідно й достатньо виконання умови (28). Якщо вона виконується, то мають місце рівності (23),

$$\left. \frac{d}{dt} x(t) \right|_{t=t_1-0} = \Theta_{01} c_0 - \Xi_{01} f(t_1 - 0).$$

Далі аналогічно з доведенням теореми 1 отримаємо (15), (17), (20)–(22), (29), (30).

Теорему 2 доведено.

Якщо $b = t_1$ (відрізок $[t_1 + 0; t_2 - 0]$ вироджується в точку), то покладемо $\tilde{A}_1 = A(t_1 + 0)$, $\tilde{f}_1 = f(t_1 + 0)$, $\hat{A}_1 = [\tilde{A}_1 S_1 \hat{X}_0, -B(t_1 + 0)]$, $\hat{\Xi}_1 = \hat{A}_1^-$, матриці $\hat{\Theta}_1$ і Υ_1 складемо з елементів базисів $\ker \hat{A}_1$ і $\ker \hat{A}_1^*$, $\hat{\Xi}_1$ і $\hat{\Theta}_1$ подамо у вигляді $\hat{\Xi}_1 = \operatorname{col}(\Xi_1, \Xi_{11})$, $\hat{\Theta}_1 = \operatorname{col}(\Theta_1, \Theta_{11})$, де Ξ_1 і Θ_1 — матриці (4) і (5), Ξ_{11} і Θ_{11} — прямокутні матриці розмірності $n \times m$ і $n \times \dim \ker \hat{A}_1$ відповідно, $\tilde{c}_1$ — довільний сталий вектор розмірності $\dim \ker \hat{A}_1$.

Теорема 3. Якщо $a < t_1 = b$, існують множини векторів 1)–4), $k = 0$, то система (1), (2) розв'язна в тому і тільки тому випадку, коли виконуються рівності (7), (8), $k = 0$, (15). При їхньому виконанні система (1), (2) має загальний розв'язок (16), (18), (19),

$$x(t_1 + 0) = S_1 \hat{X}_0 \left[\Theta_1 \tilde{c}_1 - \Xi_1 (\tilde{A}_1 \hat{x}_1 + \tilde{f}_1) \right] + \hat{x}_1, \quad (31)$$

$$\left. \frac{d}{dt} x(t) \right|_{t=t_1+0} = \Theta_{11} \tilde{c}_1 - \Xi_{11} (\tilde{A}_1 \hat{x}_1 + \tilde{f}_1). \quad (32)$$

Доведення. Підставивши (24) в (1), отримаємо

$$\hat{A}_1 \operatorname{col} \left(\beta_0, \left. \frac{d}{dt} x(t) \right|_{t=t_1+0} \right) + \tilde{A}_1 \hat{x}_1 + \tilde{f}_1 = 0.$$

Ця рівність розв'язна за умовою (15). Якщо вона виконується, то мають місце рівності (25), (32). Далі аналогічно з доведенням теореми 1 отримаємо (16), (18), (19), (31).

Теорему 3 доведено.

Наслідок 1. Відповідна системі (1), (2) однорідна система

$$B(t) \frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad t \in [a; b] \setminus t_1, \quad (33)$$

$$x(t_1 + 0) = S_1 x(t_1 - 0) \quad (34)$$

розв'язна при будь-якому розташуванні точки t_1 на відрізку $[a; b]$ і має загальний розв'язок:

– якщо $a < t_1 < b$, то

$$x(t) = \tilde{X}_0(t)\Theta_{10}\tilde{c}_1 + \sum_{i=1}^{\tilde{r}_0} \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{0i}} \left(\frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{0i}(t) \right) \tilde{\varphi}_{0i}^{(\tilde{s}_{0i}-j+1)}(t) + \sum_{i=1}^{\check{r}_0} \check{\beta}_{0i}(t) \check{\varphi}_{0i}(t), \quad t \in [t_0 + 0; t_1 - 0], \quad (35)$$

$$x(t) = \tilde{X}_1(t)\tilde{B}_1 S_1 \hat{X}_0 \Theta_1 \tilde{c}_1 + \sum_{i=1}^{\tilde{r}_1} \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{1i}} \left(\frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{1i}(t) \right) \tilde{\varphi}_{1i}^{(\tilde{s}_{1i}-j+1)}(t) + \sum_{i=1}^{\check{r}_1} \check{\beta}_{1i}(t) \check{\varphi}_{1i}(t), \quad (36)$$

$$t \in [t_1 + 0; t_2 - 0],$$

$$\left. \frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{0i}(t) \right|_{t=t_1-0} = \tilde{\Theta}_{1i}^{(j)} \tilde{c}_1, \quad j = \overline{0, \tilde{s}_{0i}}, \quad i = \overline{1, \tilde{r}_0}, \quad (37)$$

$$\check{\beta}_{0i}(t_1 - 0) = \check{\Theta}_{1i} \tilde{c}_1, \quad i = \overline{1, \check{r}_0}, \quad (38)$$

$$\tilde{\beta}_{1i}(t_1 + 0) = \left(S_1 \hat{X}_0 \Theta_1 \tilde{c}_1, B^*(t_1 + 0) \hat{\psi}_{1i}^{(1)}(t_1 + 0) \right), \quad i = \overline{1, \tilde{r}_1}, \quad (39)$$

$$\left. \frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{1i}(t) \right|_{t=t_1+0} = \left(S_1 \hat{X}_0 \Theta_1 \tilde{c}_1, L^*(t) \hat{\psi}_{1i}^{(j)}(t) \right) \Big|_{t=t_1+0}, \quad j = \overline{1, \tilde{s}_{1i}}, \quad i = \overline{1, \tilde{r}_1}, \quad (40)$$

$$\check{\beta}_{1i}(t_1 + 0) = \left(S_1 \hat{X}_0 \Theta_1 \tilde{c}_1, \check{\psi}_{1i}(t_1 + 0) \right), \quad i = \overline{1, \check{r}_1}; \quad (41)$$

– якщо $a = t_1 < b$, то виконуються рівності (36), (39)–(41),

$$x(t_1 - 0) = \Theta_{00} \Theta_1 \tilde{c}_1, \quad \left. \frac{d}{dt} x(t) \right|_{t=t_1-0} = \Theta_{01} \Theta_1 \tilde{c}_1;$$

– якщо $a < t_1 = b$, то виконуються рівності (35), (37), (38),

$$x(t_1 + 0) = S_1 \hat{X}_0 \Theta_1 \tilde{c}_1, \quad \left. \frac{d}{dt} x(t) \right|_{t=t_1+0} = \Theta_{11} \tilde{c}_1.$$

Перейдемо до задачі Коші (1)–(3). Нехай $\tau_0 \in [t_l + 0; t_{l+1} - 0]$, $l \in \{0, 1\}$. Покладемо

$$\tilde{A} = \text{col} \left[\sum_{i=0}^{s_{l1}-1} I_{s_{l1}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\Psi_{l1}^*(t) A(t)), \dots, \sum_{i=0}^{s_{lr_l}-1} I_{s_{lr_l}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\Psi_{lr_l}^*(t) A(t)), \right. \\ \left. \sum_{i=0}^{\hat{s}_{l1}-1} I_{\hat{s}_{l1}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\tilde{\Psi}_{l1\hat{s}_{l1}}^*(t) A(t)), \dots, \sum_{i=0}^{\hat{s}_{lr_l}-1} I_{\hat{s}_{lr_l}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\tilde{\Psi}_{lr_l\hat{s}_{lr_l}}^*(t) A(t)) \right] \Big|_{t=\tau_0},$$

$$\tilde{f} = \text{col} \left[\sum_{i=0}^{s_{l1}-1} I_{s_{l1}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\Psi_{l1}^*(t) f(t)), \dots, \sum_{i=0}^{s_{lr_l}-1} I_{s_{lr_l}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\Psi_{lr_l}^*(t) f(t)), \right. \\ \left. \sum_{i=0}^{\hat{s}_{l1}-1} I_{\hat{s}_{l1}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\tilde{\Psi}_{l1\hat{s}_{l1}}^*(t) f(t)), \dots, \sum_{i=0}^{\hat{s}_{lr_l}-1} I_{\hat{s}_{lr_l}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\tilde{\Psi}_{lr_l\hat{s}_{lr_l}}^*(t) f(t)) \right] \Big|_{t=\tau_0},$$

$$\begin{aligned}\tilde{B} &= X_l^{-1}(\tau_0)P_l^*(\tau_0)B(\tau_0), \\ \tilde{R} &= \left[\tilde{B}^*, B^*(\tau_0)\hat{\psi}_{l1}^{(1)}(\tau_0), L^*(\tau_0)\hat{\Psi}_{l1}(\tau_0), \dots, \right. \\ &\quad \left. B^*(\tau_0)\hat{\psi}_{l\tilde{r}_l}^{(1)}(\tau_0), L^*(\tau_0)\hat{\Psi}_{l\tilde{r}_l}(\tau_0), \check{\psi}_{l1}(\tau_0), \dots, \check{\psi}_{l\check{r}_l}(\tau_0) \right]^*, \\ R &= \left[\tilde{R}^*, L^*(\tau_0)\Psi_{l1}(\tau_0), \dots, L^*(\tau_0)\Psi_{l\tilde{r}_l}(\tau_0), L^*(\tau_0)\tilde{\Psi}_{l1\hat{s}_{l1}}(\tau_0), \dots, L^*(\tau_0)\tilde{\Psi}_{l\hat{r}_l\hat{s}_{l\hat{r}_l}}(\tau_0) \right]^*\end{aligned}$$

— неособлива квадратна матриця згідно з [2].

Якщо $a < t_1 < b$, $\tau_0 \in [a; t_1 - 0)$, то $l = 0$, покладемо $\hat{A} = \Theta_{10}$, $\Xi = \hat{A}^-$, матриці Θ і Υ складемо з елементів базисів $\ker \hat{A}$ і $\ker \hat{A}^*$ відповідно, c — довільний сталий вектор розмірності $\dim \ker \hat{A}$.

Теорема 4. Якщо $a < t_1 < b$, існують множини векторів $l) - 4)$, $k = 0, 1$, $\tau_0 \in [a; t_1 - 0)$, то для розв'язності задачі Коші $(l) - (3)$ необхідно й достатньо виконання умов (7) , (8) , (15) ,

$$\tilde{A}x_0 + \tilde{f} = 0, \quad (42)$$

$$\Upsilon^* \left[\tilde{B}x_0 + \Xi_{10}(\tilde{A}_1\hat{x}_1 + \tilde{f}_1) - \int_{t_0+0}^{\tau_0} X_0^{-1}(\tau)P_0^*(\tau)f(\tau)d\tau \right] = 0. \quad (43)$$

При їхньому виконанні задача Коші $(l) - (3)$ має розв'язки $(16) - (22)$, де

$$\tilde{c}_1 = \Theta c + \Xi \left[\tilde{B}x_0 + \Xi_{10}(\tilde{A}_1\hat{x}_1 + \tilde{f}_1) - \int_{t_0+0}^{\tau_0} X_0^{-1}(\tau)P_0^*(\tau)f(\tau)d\tau \right], \quad (44)$$

$$\tilde{\beta}_{0i}(\tau_0) = (x_0, B^*(\tau_0)\hat{\psi}_{0i}^{(1)}(\tau_0)), \quad i = \overline{1, \tilde{r}_0}, \quad (45)$$

$$\left. \frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{0i}(t) \right|_{t=\tau_0} = \left[(x_0, L^*(t)\hat{\psi}_{0i}^{(j)}(t)) + \sum_{u=0}^{j-1} \frac{d^u}{dt^u} (f(t), \hat{\psi}_{0i}^{(j-u)}(t)) \right] \Big|_{t=\tau_0}, \quad (46)$$

$$j = \overline{1, \tilde{s}_{0i}}, \quad i = \overline{1, \tilde{r}_0},$$

$$\check{\beta}_{0i}(\tau_0) = (x_0, \check{\psi}_{0i}(\tau_0)), \quad i = \overline{1, \check{r}_0}. \quad (47)$$

Доведення. Підставивши (16) у (3) і помноживши зліва на матрицю R , отримаємо, що виконуються рівності (45) , (47) ,

$$\tilde{B}x_0 = \hat{A}\tilde{c}_1 - \Xi_{10}(\tilde{A}_1\hat{x}_1 + \tilde{f}_1) + \int_{t_0+0}^{\tau_0} X_0^{-1}(\tau)P_0^*(\tau)f(\tau)d\tau, \quad (48)$$

$$\left(x_0, L^*(t)\hat{\psi}_{0i}^{(j)}(t) \right) \Big|_{t=\tau_0} = - \sum_{u=0}^{j-1} \frac{d^u}{dt^u} (f(t), \hat{\psi}_{0i}^{(j-u)}(t)) \Big|_{t=\tau_0}, \quad j = \overline{1, s_{0i}}, \quad i = \overline{1, r_0}, \quad (49)$$

$$\left(x_0, L^*(t)\hat{\psi}_{0i}^{(j)}(t)\right)\Big|_{t=\tau_0} = \left[\frac{d^j}{dt^j}\tilde{\beta}_{0i}(t) - \sum_{u=0}^{j-1} \frac{d^u}{dt^u} \left(f(t), \hat{\psi}_{0i}^{(j-u)}(t)\right)\right]\Big|_{t=\tau_0}, \quad j = \overline{1, \tilde{s}_{0i}}, \quad i = \overline{1, \tilde{r}_0}, \quad (50)$$

$$\left(x_0, L^*(t)\tilde{\psi}_{0i}^{(j)}(t)\right)\Big|_{t=\tau_0} = -\sum_{u=0}^{j-1} \frac{d^u}{dt^u} \left(f(t), \tilde{\psi}_{0i}^{(j-u)}(t)\right)\Big|_{t=\tau_0}, \quad j = \overline{1, \hat{s}_{0i}}, \quad i = \overline{1, \hat{r}_0}. \quad (51)$$

Рівність (48) розв'язна за умовою (43). При її виконанні вона має розв'язки (44). Згідно з [2] з (49), (51) випливає (42), з (50) випливає (46).

Теорему 4 доведено.

Якщо $a < t_1 < b$, $\tau_0 \in (t_1 + 0; b]$, то $l = 1$; покладемо $\hat{A} = \tilde{B}_1 S_1 \hat{X}_0 \Theta_1$.

Теорема 5. Якщо $a < t_1 < b$, існують множини векторів 1)–4), $k = 0, 1$, $\tau_0 \in (t_1 + 0; b]$, то для розв'язності задачі Коші 1)–(3) необхідно й достатньо виконання рівностей (7), (8), (15), (42),

$$\Upsilon^* \left[\tilde{B}x_0 + \tilde{B}_1 S_1 \hat{X}_0 \Xi_1 (\tilde{A}_1 \hat{x}_1 + \tilde{f}_1) - \tilde{B}_1 \hat{x}_1 - \int_{t_1+0}^{\tau_0} X_1^{-1}(\tau) P_1^*(\tau) f(\tau) d\tau \right] = 0. \quad (52)$$

При їхньому виконанні задача Коші 1)–(3) має розв'язки (16)–(22), (45)–(47), де

$$\tilde{c}_1 = \Theta c + \Xi \left[\tilde{B}x_0 + \tilde{B}_1 S_1 \hat{X}_0 \Xi_1 (\tilde{A}_1 \hat{x}_1 + \tilde{f}_1) - \tilde{B}_1 \hat{x}_1 - \int_{t_1+0}^{\tau_0} X_1^{-1}(\tau) P_1^*(\tau) f(\tau) d\tau \right]. \quad (53)$$

Якщо $a < t_1 < b$, $\tau_0 = t_1 - 0$, то $l = 0$; покладемо $\hat{A} = \Theta_1$.

Теорема 6. Якщо $a < t_1 < b$, існують множини векторів 1)–4), $k = 0, 1$, $\tau_0 = t_1 - 0$, то для розв'язності задачі Коші 1)–(3) необхідно й достатньо виконання умов (7), (8), (15) (42),

$$\begin{aligned} \Upsilon^* \left[\tilde{R}x_0 + \Xi_1 (\tilde{A}_1 \hat{x}_1 + \tilde{f}_1) - \text{col} \left(\int_{t_0+0}^{t_1-0} X_0^{-1}(\tau) P_0^*(\tau) f(\tau) d\tau, 0_1, \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{01}-1} (I_{\tilde{s}_{01}}^T)^j \frac{d^j}{dt^j} (\hat{\Psi}_{01}^*(t) f(t)), \dots, 0_1, \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{0\tilde{r}_0}-1} (I_{\tilde{s}_{0\tilde{r}_0}}^T)^j \frac{d^j}{dt^j} (\hat{\Psi}_{0\tilde{r}_0}^*(t) f(t)), 0_{\tilde{r}_0} \right) \right]_{t=t_1-0} = 0. \end{aligned} \quad (54)$$

При їхньому виконанні задача Коші 1)–(3) має розв'язки (16)–(22), де

$$\tilde{c}_1 = \Xi \left[\tilde{R}x_0 + \Xi_1 (\tilde{A}_1 \hat{x}_1 + \tilde{f}_1) - \text{col} \left(\int_{t_0+0}^{t_1-0} X_0^{-1}(\tau) P_0^*(\tau) f(\tau) d\tau, \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & 0_1, - \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{01}-1} (I_{\tilde{s}_{01}}^T)^j \frac{d^j}{dt^j} \left(\hat{\Psi}_{01}^*(t) f(t) \right), \dots, 0_1, \\
 & - \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{0\tilde{r}_0}-1} \left(I_{\tilde{s}_{0\tilde{r}_0}}^T \right)^j \frac{d^j}{dt^j} \left(\hat{\Psi}_{0\tilde{r}_0}^*(t) f(t) \right), 0_{\tilde{r}_0} \Bigg|_{t=t_1-0}.
 \end{aligned} \quad (55)$$

Доведення. Підставивши (26) у (3) і помноживши зліва на матрицю R , отримаємо, що виконуються рівності (42) і

$$\begin{aligned}
 \tilde{R}x_0 &= \hat{A}\tilde{c}_1 - \Xi_1(\tilde{A}_1\hat{x}_1 + \tilde{f}_1) \\
 &+ \text{col} \left(\int_{t_0+0}^{t_1-0} X_0^{-1}(\tau) P_0^*(\tau) f(\tau) d\tau, 0_1, \right. \\
 &- \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{01}-1} (I_{\tilde{s}_{01}}^T)^j \frac{d^j}{dt^j} \left(\hat{\Psi}_{01}^*(t) f(t) \right), \dots, 0_1, \\
 &- \left. \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{0\tilde{r}_0}-1} \left(I_{\tilde{s}_{0\tilde{r}_0}}^T \right)^j \frac{d^j}{dt^j} \left(\hat{\Psi}_{0\tilde{r}_0}^*(t) f(t) \right), 0_{\tilde{r}_0} \right) \Bigg|_{t=t_1-0}.
 \end{aligned}$$

Ця рівність розв'язна за умовою (54). При її виконанні вона має розв'язки (55), оскільки $\dim \ker \hat{A} = 0$.

Теорему 6 доведено.

Якщо $a < t_1 < b$, $\tau_0 = t_1 + 0$, то $l = 1$; покладемо $\hat{A} = S_1 \hat{X}_0 \Theta_1$.

Теорема 7. Якщо $a < t_1 < b$, існують множини векторів 1)–4), $k = 0, 1$, $\tau_0 = t_1 + 0$, то для розв'язності задачі Коші (1)–(3) необхідно й достатньо виконання умов (7), (8), (15),

$$\Upsilon^* \left[x_0 + S_1 \hat{X}_0 \Xi_1 (\tilde{A}_1 \hat{x}_1 + \tilde{f}_1) - \hat{x}_1 \right] = 0. \quad (56)$$

При їхньому виконанні задача Коші (1)–(3) має розв'язки (16)–(22), де

$$\tilde{c}_1 = \Theta c + \Xi \left[x_0 + S_1 \hat{X}_0 \Xi_1 (\tilde{A}_1 \hat{x}_1 + \tilde{f}_1) - \hat{x}_1 \right]. \quad (57)$$

Доведення. Підставивши (27) у (3), отримаємо

$$x_0 = \hat{A}\tilde{c}_1 - S_1 \hat{X}_0 \Xi_1 (\tilde{A}_1 \hat{x}_1 + \tilde{f}_1) + \hat{x}_1.$$

Ця рівність розв'язна за умовою (56). При її виконанні вона має розв'язки (57).

Теорему 7 доведено.

Якщо $a = t_1 < b$, $l = 1$, то розв'язок задачі Коші (1)–(3) можна побудувати аналогічно до теорем 2, 5, 7. Якщо $\tau_0 = a$, то $l = 0$; покладемо $\hat{A} = \Theta_{00} \Theta_1$.

Теорема 8. Якщо $a = t_1 < b$, існують множини векторів 1)–4), $k = 1$, $\tau_0 = a$, то для розв'язності задачі Коші (1)–(3) необхідно й достатньо виконання умов (7), (8), $k = 1$, (15), (28),

$$\Upsilon^* \left[x_0 + \Theta_{00} \Xi_1 (\tilde{A}_1 \hat{x}_1 + \tilde{f}_1) + \Xi_{00} f(t_1 - 0) \right] = 0. \quad (58)$$

При їхньому виконанні задача Коші (1)–(3) має розв'язки (17), (20)–(22), (29), (30), де

$$\tilde{c}_1 = \Theta c + \Xi \left[x_0 + \Theta_{00} \Xi_1 (\tilde{A}_1 \hat{x}_1 + \tilde{f}_1) + \Xi_{00} f(t_1 - 0) \right]. \quad (59)$$

Якщо $a < t_1 = b$, $l = 0$, то розв'язок задачі Коші (1)–(3) можна побудувати аналогічно до теорем 3, 4, 6. Якщо $\tau_0 = b$, то $l = 1$; покладемо $\hat{A} = S_1 \hat{X}_0 \Theta_1$.

Теорема 9. Якщо $a < t_1 = b$, існують множини векторів 1)–4), $k = 0$, $\tau_0 = b$, то для розв'язності задачі Коші (1)–(3) необхідно й достатньо виконання умов (7), (8), $k = 0$, (15), (56). При їхньому виконанні вона має розв'язки (16), (18), (19), (31), (32), (57).

Наслідок 2. Для розв'язності задачі Коші (3), (33), (34) для однорідної системи необхідно й достатньо виконання тієї з рівностей

$$\Upsilon^* \tilde{B} x_0 = 0, \quad \Upsilon^* \tilde{R} x_0 = 0, \quad \Upsilon^* x_0 = 0,$$

яка відповідає розташуванню точок t_1 і τ_0 на відрізку $[a; b]$.

Зауваження 1. Якщо $r_1 = \hat{r}_1 = 0$, то умови (10), (15), а якщо $l = 1$, то й (42), відсутні. Вектор β_0 замість (25) вибираємо довільно, в (16)–(22), (29), (30) вираз у квадратних дужках слід замінити цим вектором або відповідною його компонентою (6). У задачі Коші (1)–(3) слід покласти $\Theta_{10} = E_{\alpha_0}$, $\Xi_{10} = 0_{\alpha_0}$, $\Theta_1 = E_{\alpha_0 + \tilde{s}_0 + \tilde{r}_0 + \tilde{r}_0}$, $\Xi_1 = 0_{\alpha_0 + \tilde{s}_0 + \tilde{r}_0 + \tilde{r}_0}$, замість вектора $\tilde{c}_1$ визначаємо c_0 або β_0 .

Зауваження 2. Якщо $\alpha_0 = \tilde{r}_0 = \check{r}_0 = 0$, то вектор β_0 відсутній, у (15) слід покласти $\Upsilon_1 = E_{s_1 + \tilde{s}_1}$.

Зауваження 3. Якщо $\alpha_l = 0$, то відповідна з умов (43), (52), (54), (56), (58) відсутня, вектор $\tilde{c}_1$ замість (44), (53), (55), (57), (59) вибираємо довільно.

Зауваження 4. Якщо на відрізку $[a; b]$ більше однієї точки імпульсної дії, то з'являються додаткові умови розв'язності системи (1), (2) і задачі Коші (1)–(3). Цей випадок буде розглянуто в наступній роботі.

Приклад. Нехай у (1)–(3) $m = n = 2$, $a < t_1 < b$, $\tau_0 \in [t_0 + 0; t_1 - 0)$, тобто $l = 0$,

$$B(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix},$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \eta_1 = \begin{bmatrix} \eta_{11} \\ \eta_{12} \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix},$$

$a_{ij}(t), f_i(t) \in C^\infty[a; b] \setminus t_1$ — дійсні скалярні функції, η_{1i}, x_{0i} — дійсні числа, $i, j = 1, 2$, жорданова структура одна і та ж на відрізках $[t_k + 0; t_{k+1} - 0]$, $k = 0, 1$.

Розглянемо такі випадки [2, 5]:

1. $a_{22}(t) \neq 0 \forall t \in [a; b]$. Маємо $r_k = 1$, $s_{k1} = 1$, $\check{r}_k = \check{r}_k = \tilde{r}_k = \hat{r}_k = 0$, $\alpha_k = 1$,

$$\varphi_{k1}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \psi_{k1}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix},$$

$$q_{k1}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix}, \quad p_{k1}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{12}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
X_k(t) &= \exp\left(\int_{t_k+0}^t \lambda(z)dz\right), \quad \tilde{X}_k(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix} \exp\left(\int_{t_k+0}^t \lambda(z)dz\right), \\
\tilde{x}_k(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix} \int_{t_k+0}^t \exp\left(\int_{\tau}^t \lambda(z)dz\right) \\
&\quad \times (f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau))d\tau - \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22}^{-1}(t)f_2(t) \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1,
\end{aligned}$$

де $\lambda(t) = a_{11}(t) - a_{12}(t)a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t)$ — скалярна функція,

$$\begin{aligned}
\hat{X}_0 &= \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t_1 - 0)a_{22}^{-1}(t_1 - 0) \end{bmatrix} \exp\left(\int_{t_0+0}^{t_1-0} \lambda(z)dz\right), \\
\tilde{A}_1 &= [a_{21}(t_1 + 0)a_{22}^{-1}(t_1 + 0) \quad 1], \quad \tilde{f}_1 = a_{22}^{-1}(t_1 + 0)f_2(t_1 + 0), \quad \tilde{B}_1 = [1 \quad 0], \\
\hat{A}_1 &= \exp\left(\int_{t_0+0}^{t_1-0} \lambda(z)dz\right), \quad \Xi_1 = \exp\left(-\int_{t_0+0}^{t_1-0} \lambda(z)dz\right), \quad \Theta_1 = \Upsilon_1 = 0, \\
\hat{x}_1 &= \begin{bmatrix} \eta_{11} \\ \int_{t_0+0}^{t_1-0} \exp\left(\int_{\tau}^{t_1-0} \lambda(z)dz\right) (f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau))d\tau + \eta_{12} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

умови (7), (8) відсутні, (15) виконується, система (1), (2) має єдиний розв'язок (16), (17):

$$\begin{aligned}
x(t) &= -\begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix} \exp\left(-\int_t^{t_1-0} \lambda(z)dz\right) \\
&\quad \times (a_{21}(t_1 + 0)a_{22}^{-1}(t_1 + 0)\eta_{11} + \eta_{12} + a_{22}^{-1}(t_1 + 0)f_2(t_1 + 0)) \\
&\quad - \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix} \int_t^{t_1-0} \exp\left(-\int_t^{\tau} \lambda(z)dz\right) (f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau))d\tau \\
&\quad - \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22}^{-1}(t)f_2(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [t_0 + 0; t_1 - 0], \tag{60}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix} \exp\left(\int_{t_1+0}^t \lambda(z)dz\right) \eta_{11} + \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix} \\
&\quad \times \int_{t_1+0}^t \exp\left(\int_{\tau}^t \lambda(z)dz\right) (f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau))d\tau - \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22}^{-1}(t)f_2(t) \end{bmatrix}, \tag{61}
\end{aligned}$$

$$t \in [t_1 + 0; t_2 - 0],$$

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= [a_{21}(\tau_0)a_{22}^{-1}(\tau_0) \quad 1], \quad \tilde{f} = a_{22}^{-1}(\tau_0)f_2(\tau_0), \\ \tilde{B} &= \begin{bmatrix} \exp\left(-\int_{t_0+0}^{\tau_0} \lambda(z)dz\right) & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{A} = \Xi = 0, \quad \Theta = \Upsilon = 1, \end{aligned}$$

з умов (42), (43) випливає

$$\begin{aligned} x_0 &= - \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(\tau_0)a_{22}^{-1}(\tau_0) \end{bmatrix} \exp\left(-\int_{\tau_0}^{t_1-0} \lambda(z)dz\right) \\ &\quad \times (a_{21}(t_1+0)a_{22}^{-1}(t_1+0)\eta_{11} + \eta_{12} + a_{22}^{-1}(t_1+0)f_2(t_1+0)) \\ &\quad - \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(\tau_0)a_{22}^{-1}(\tau_0) \end{bmatrix} \int_{\tau_0}^{t_1-0} \exp\left(-\int_{\tau_0}^{\tau} \lambda(z)dz\right) \\ &\quad \times (f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau))d\tau - \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22}^{-1}(\tau_0)f_2(\tau_0) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Якщо ця рівність виконується, то задача Коші (1) – (3) має єдиний розв’язок (16), (17), (44), що співпадає з (60), (61).

2. $a_{22}(t) \equiv 0$, $a_{12}(t) \neq 0$, $a_{21}(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a; b]$. Маємо $r_k = 1$, $s_{k1} = 2$, $\check{r}_k = \check{r}_k = \tilde{r}_k = \hat{r}_k = 0$, $\alpha_k = 0$,

$$\begin{aligned} \varphi_{k1}^{(1)}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \varphi_{k1}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} a_{12}(t) \\ a_{12}^{-1}(t)\frac{d}{dt}a_{12}(t) - a_{11}(t) \end{bmatrix}, \\ \psi_{k1}^{(1)}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ a_{12}^{-1}(t)a_{21}^{-1}(t) \end{bmatrix}, \quad \psi_{k1}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} a_{12}^{-1}(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{x}_k(t) &= \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(t)f_2(t) \\ a_{12}^{-1}(t)\left(a_{11}(t)a_{21}^{-1}(t)f_2(t) - f_1(t) - \frac{d}{dt}(a_{21}^{-1}(t)f_2(t))\right) \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1, \\ \tilde{A}_1 &= \begin{bmatrix} a_{11}(t_1+0)a_{12}^{-1}(t_1+0) + \frac{d}{dt}a_{12}^{-1}(t)\Big|_{t=t_1+0} & 1 \\ a_{12}^{-1}(t_1+0) & 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{f}_1 &= \begin{bmatrix} a_{12}^{-1}(t_1+0)f_1(t_1+0) + \frac{d}{dt}(a_{12}^{-1}(t)a_{21}^{-1}(t)f_2(t))\Big|_{t=t_1+0} \\ a_{12}^{-1}(t_1+0)a_{21}^{-1}(t_1+0)f_2(t_1+0) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\hat{x}_1 = \begin{bmatrix} \eta_{11} \\ -a_{21}^{-1}(t_1 - 0)f_2(t_1 - 0) + \eta_{12} \end{bmatrix},$$

умови (7), (8) відсутні, (15) з урахуванням зауваження 2 має вигляд

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \left(a_{11}(t_1 + 0)a_{12}^{-1}(t_1 + 0) + \frac{d}{dt}a_{12}^{-1}(t) \Big|_{t=t_1+0} \right) \eta_{11} - a_{21}^{-1}(t_1 - 0)f_2(t_1 - 0) + \eta_{12} \\ a_{12}^{-1}(t_1 + 0)\eta_{11} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} a_{12}^{-1}(t_1 + 0)f_1(t_1 + 0) + \frac{d}{dt}(a_{12}^{-1}(t)a_{21}^{-1}(t)f_2(t)) \Big|_{t=t_1+0} \\ a_{12}^{-1}(t_1 + 0)a_{21}^{-1}(t_1 + 0)f_2(t_1 + 0) \end{bmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Якщо ця рівність виконується, то система (1), (2) має єдиний розв'язок (16), (17):

$$x(t) = \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(t)f_2(t) \\ a_{12}^{-1}(t) \left(a_{11}(t)a_{21}^{-1}(t)f_2(t) - f_1(t) - \frac{d}{dt}(a_{21}^{-1}(t)f_2(t)) \right) \end{bmatrix}, \quad (62)$$

$$t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k = 0, 1,$$

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{bmatrix} a_{11}(\tau_0)a_{12}^{-1}(\tau_0) + \frac{d}{dt}a_{12}^{-1}(t) \Big|_{t=\tau_0} & 1 \\ a_{12}^{-1}(\tau_0) & 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{f} &= \begin{bmatrix} a_{12}^{-1}(\tau_0)f_1(\tau_0) + \frac{d}{dt}(a_{12}^{-1}(t)a_{21}^{-1}(t)f_2(t)) \Big|_{t=\tau_0} \\ a_{12}^{-1}(\tau_0)a_{21}^{-1}(\tau_0)f_2(\tau_0) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

умова (43) відсутня, з (42) випливає

$$x_0 = \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(\tau_0)f_2(\tau_0) \\ a_{12}^{-1}(\tau_0) \left(a_{11}(\tau_0)a_{21}^{-1}(\tau_0)f_2(\tau_0) - f_1(\tau_0) - \frac{d}{dt}(a_{21}^{-1}(t)f_2(t)) \Big|_{t=\tau_0} \right) \end{bmatrix}.$$

Якщо ця рівність виконується, то задача Коші (1) – (3) має єдиний розв'язок (16), (17), що співпадає з (62).

3. $a_{22}(t) \equiv 0$, $a_{12}(t) \neq 0$, $a_{21}(t) \equiv 0 \quad \forall t \in [a; b]$. Маємо $\tilde{r}_k = 1$, $\tilde{s}_{k1} = 1$, $\check{r}_k = 1$, $\check{r}_k = r_k = \hat{r}_k = 0$, $\alpha_k = 0$,

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{k1}^{(1)}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, & \tilde{\varphi}_{k1}^{(2)}(t) &= \begin{bmatrix} a_{12}(t) \\ a_{12}^{-1}(t) \frac{d}{dt}a_{12}(t) - a_{11}(t) \end{bmatrix}, \\ \check{\psi}_{k1}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, & \hat{\psi}_{k1}^{(1)}(t) &= \begin{bmatrix} a_{12}^{-1}(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\check{\varphi}_{k1}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}_k(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -a_{12}^{-1}(t)f_1(t) \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1, \\ \hat{X}_0 &= \begin{bmatrix} a_{12}(t_1 - 0) & 0 \\ a_{12}^{-1}(t_1 - 0) \frac{d}{dt} a_{12}(t) \Big|_{t=t_1-0} - a_{11}(t_1 - 0) & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{x}_1 = \begin{bmatrix} \eta_{11} \\ \eta_{12} \end{bmatrix},\end{aligned}$$

умови (7), (15) відсутні, (8) набуває вигляду

$$f_2(t) \equiv 0. \quad (63)$$

Якщо ця рівність виконується, то система (1), (2) має загальний розв'язок (16)–(18), (20), (21) з урахуванням зауваження 1:

$$x(t) = \begin{bmatrix} a_{12}(t)\tilde{\beta}_{k1}(t) \\ a_{12}^{-1}(t)\tilde{\beta}_{k1}(t) \frac{d}{dt} a_{12}(t) - a_{11}(t)\tilde{\beta}_{k1}(t) - a_{12}^{-1}(t)f_1(t) + \frac{d}{dt} \tilde{\beta}_{k1}(t) \end{bmatrix}, \quad (64)$$

$$t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k = 0, 1,$$

$$\tilde{\beta}_{11}(t_1 + 0) = a_{12}^{-1}(t_1 + 0)\eta_{11}, \quad (65)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \tilde{\beta}_{11}(t) \Big|_{t=t_1+0} &= \left(a_{11}(t_1 + 0)a_{12}^{-1}(t_1 + 0) - a_{12}^{-2}(t_1 + 0) \frac{d}{dt} a_{12}(t) \Big|_{t=t_1+0} \right) \eta_{11} \\ &+ a_{12}(t_1 - 0)\tilde{\beta}_{01}(t_1 - 0) + \eta_{12} + a_{12}^{-1}(t_1 + 0)f_1(t_1 + 0). \quad (66)\end{aligned}$$

Умови (42), (43) відсутні, задача Коші (1)–(3) має розв'язки (16)–(18), (20), (21), (45), (46) з урахуванням зауваження 3, що співпадають з (64)–(66), де

$$\tilde{\beta}_{01}(\tau_0) = a_{12}^{-1}(\tau_0)x_{01},$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{\beta}_{01}(t) \Big|_{t=\tau_0} = a_{11}(\tau_0)a_{12}^{-1}(\tau_0)x_{01} + x_{02} - a_{12}^{-2}(\tau_0)x_{01} \frac{d}{dt} a_{12}(t) \Big|_{t=\tau_0} + a_{12}^{-1}(\tau_0)f_1(\tau_0).$$

4. $a_{22}(t) \equiv 0$, $a_{12}(t) \equiv 0$, $a_{21}(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a; b]$. Маємо $\check{r}_k = 1$, $\hat{r}_k = 1$, $\hat{s}_{k1} = 1$, $\tilde{r}_k = r_k = \check{r}_k = 0$, $\alpha_k = 0$,

$$\check{\varphi}_{k1}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\psi}_{k1}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\psi}_{k1}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} a_{21}(t) \\ -a_{11}(t) - a_{21}^{-1}(t) \frac{d}{dt} a_{21}(t) \end{bmatrix}, \quad \hat{\varphi}_{k1}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} a_{21}^{-1}(t) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\check{\psi}_{k1}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}_k(t) = \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(t)f_2(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1, \quad \hat{X}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_1 = [a_{21}(t_1 + 0) \quad 0],$$

$$\tilde{f}_1 = f_2(t_1 + 0), \quad \hat{A}_1 = \Xi_1 = 0, \quad \Theta_1 = \Upsilon_1 = 1, \quad \hat{x}_1 = \begin{bmatrix} \eta_{11} \\ -a_{21}^{-1}(t_1 - 0)f_2(t_1 - 0) + \eta_{12} \end{bmatrix},$$

умова (8) відсутня, (7), (15) мають вигляд

$$a_{21}(t)f_1(t) - a_{11}(t)f_2(t) - a_{21}^{-1}(t)f_2(t)\frac{d}{dt}a_{21}(t) + \frac{d}{dt}f_2(t) \equiv 0,$$

$$a_{21}(t_1 + 0)\eta_{11} + f_2(t_1 + 0) = 0.$$

Якщо ці рівності виконуються, то система (1), (2) має загальний розв'язок (16), (17), (19), (22):

$$x(t) = \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(t)f_2(t) \\ \check{\beta}_{k1}(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k = 0, 1, \quad (67)$$

$$\check{\beta}_{01}(t_1 - 0) = \tilde{c}_1, \quad (68)$$

$$\check{\beta}_{11}(t_1 + 0) = -a_{21}^{-1}(t_1 - 0)f_2(t_1 - 0) + \eta_{12}, \quad (69)$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{21}(\tau_0) & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{f} = f_2(\tau_0),$$

умова (43) відсутня, з (42) випливає

$$x_{01} = -a_{21}^{-1}(\tau_0)f_2(\tau_0).$$

Якщо ця рівність виконується, то задача Коші (1)–(3) має розв'язки (16), (17), (19), (22), (47) з урахуванням зауваження 3, що співпадають з (67)–(69), де

$$\check{\beta}_{01}(\tau_0) = x_{02}. \quad (70)$$

5. $a_{22}(t) \equiv 0$, $a_{12}(t) \equiv 0$, $a_{21}(t) \equiv 0 \quad \forall t \in [a; b]$. Маємо $\check{r}_k = 1$, $\check{r}_k = 1$, $\tilde{r}_k = r = \hat{r}_k = 0$, $\alpha_k = 1$,

$$\check{\varphi}_{k1}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \check{\psi}_{k1}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \check{\varphi}_{k1}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\check{\psi}_{k1}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad q_{k1}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_{k1}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$X_k(t) = \exp\left(\int_{t_k+0}^t a_{11}(z)dz\right), \quad \tilde{X}_k(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \exp\left(\int_{t_k+0}^t a_{11}(z)dz\right),$$

$$\tilde{x}_k(t) = \begin{bmatrix} \int_{t_k+0}^t \exp\left(\int_{\tau}^t a_{11}(z)dz\right)f_1(\tau)d\tau \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1, \quad \hat{X}_0 = \begin{bmatrix} \exp\left(\int_{t_0+0}^{t_1-0} a_{11}(z)dz\right) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{x}_1 = \begin{bmatrix} \eta_{11} \\ \int_{t_0+0}^{t_1-0} \exp\left(\int_{\tau}^{t_1-0} a_{11}(z)dz\right)f_1(\tau)d\tau + \eta_{12} \end{bmatrix},$$

умови (7), (15) відсутні, (8) співпадає з (63). Якщо ця рівність виконується, то система (1), (2) має загальний розв'язок (16), (17), (19), (22) з урахуванням зауваження 1:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \exp\left(\int_{t_0+0}^t a_{11}(z)dz\right)c_0 + \int_{t_0+0}^t \exp\left(\int_{\tau}^t a_{11}(z)dz\right)f_1(\tau)d\tau \\ \check{\beta}_{01}(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [t_0 + 0; t_1 - 0],$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} \exp\left(\int_{t_1+0}^t a_{11}(z)dz\right)\eta_{11} + \int_{t_1+0}^t \exp\left(\int_{\tau}^t a_{11}(z)dz\right)f_1(\tau)d\tau \\ \check{\beta}_{01}(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [t_1 + 0; t_2 - 0],$$
(71)

$$\check{\beta}_{11}(t_1 + 0) = \exp\left(\int_{t_0+0}^{t_1-0} a_{11}(z)dz\right)c_0 + \int_{t_0+0}^{t_1-0} \exp\left(\int_{\tau}^{t_1-0} a_{11}(z)dz\right)f_1(\tau)d\tau + \eta_{12},$$
(72)

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \exp\left(-\int_{t_0+0}^{\tau_0} a_{11}(z)dz\right) & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{A} = \Xi = 1, \quad \Theta = \Upsilon = 0,$$

умова (42) відсутня, (43) виконується. Задача Коші (1)–(3) має розв'язки (16), (17), (19), (22), (44), (47) з урахуванням зауваження 1, що співпадають з (70)–(72),

$$x(t) = \begin{bmatrix} \exp\left(\int_{\tau_0}^t a_{11}(z)dz\right)x_{01} + \int_{\tau_0}^t \exp\left(\int_{\tau}^t a_{11}(z)dz\right)f_1(\tau)d\tau \\ \check{\beta}_{01}(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [t_0 + 0; t_1 - 0].$$

Автор заявляє про відсутність конфлікту інтересів і спеціального фінансування цієї роботи. Всі необхідні дані містяться в статті.

Література

1. А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець, *Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями*, Вища школа, Київ (2000).
2. М. А. Елишевич, *Задача Коши для системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка с прямоугольными матрицами*, Нелін. коливання, **16**, № 2, 173–190 (2013).
3. А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк, *Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием*, Вища школа, Київ (1987).
4. М. А. Єлішевич, *Задача Коші для системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку з виродженою матрицею при похідних і імпульсною дією у фіксовані моменти часу*, Нелін. коливання, **25**, № 4, 325–340 (2022).
5. М. А. Елишевич, *Некоторые свойства жордановых наборов векторов матрицы относительно оператора, содержащего дифференцирование*, Журн. обчисл. та прикл. математики, № 2 (108), 119–134 (2012).

Одержано 14.09.23,
після доопрацювання — 05.12.23