

ПРО КЛАСИЧНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Олександр Дяченко, Валерій Лось

*Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”
просп. Перемоги, 37, Київ, 03056, Україна
e-mail: ol_v_dyachenko@ukr.net,
v_los@yahoo.com, відповідальний за листування*

We study the parabolic initial boundary-value problem for a system of two differential equations with two different (Dirichlet and Neumann) boundary conditions. In particular, it occurs in the heat-mass transfer theory. We find sufficient conditions for the generalized solution of the problem to be classical. They are formulated in terms of the belonging of the problem data to generalized anisotropic Sobolev spaces.

Розглянуто параболічну початково-крайову задачу для системи двох диференціальних рівнянь із двома крайовими умовами різного порядку (Діріхле та Неймана), яка зустрічається, зокрема, у теорії тепломасообміну. Одержано достатні умови класичності узагальненого розв'язку задачі, сформульовані у термінах належності даних задачі до узагальнених анізотропних просторів Соболева.

Вступ. При дослідженні параболічних задач важливими є питання регулярності, зокрема, класичності їхніх узагальнених розв'язків. Під класичним розуміють неперервно диференційовний розв'язок, який задовольняє задачу в термінах класичних похідних. Відповідь на ці питання дають, як правило, шляхом формулювання умов належності правих частин задачі до певних функціональних просторів. Чим тонше градуйована вибрана шкала функціональних просторів, тим точніший результат буде отримано. До певного часу параболічні задачі вивчалися переважно у функціональних анізотропних просторах Соболева та Гельдера [1 – 6], параметризованих числами. В останні десятиріччя активно розвивається дослідження параболічних рівнянь і систем у різних інших шкалах функціональних просторів [7 – 11]. Одними з них є шкали узагальнених анізотропних просторів Соболева [12 – 14]. Вони параметризовані крім числових показників регулярності ще й додатковим функціональним параметром. Тому їхнє використання дозволяє отримати більш точні результати, ніж це можливо в межах класичних шкал Соболева і Гельдера. Шкали ізотропних узагальнених просторів Соболева знайшли численні застосування в теорії еліптичних задач [15 – 17].

У роботах [18, 19] доведено теореми про ізоморфізми, досліджено регулярність і класичність узагальнених розв'язків загальної параболічної крайової задачі для системи диференціальних рівнянь другого порядку в шкалі узагальнених просторів Соболева. При цьому в означенні класичного розв'язку не вимагали його неперервності на лінії з'єднання

основи й бічної поверхні циліндра. Часто зазначену умову неперервності вважають частиною означення класичного розв'язку задачі (див., наприклад, [20, с. 42]). У цьому випадку класичний розв'язок називатимемо сильно класичним. Цікаво отримати умови, за яких узагальнений розв'язок параболічної задачі для систем рівнянь буде сильно класичним. У скалярному випадку такий результат отримано в [21].

Крайові задачі для параболічних систем диференціальних рівнянь другого порядку є математичними моделями багатьох прикладних задач. У цій статті розглянемо окремий змістовний випадок параболічної задачі. А саме: мішану задачу для системи двох диференціальних рівнянь другого порядку з двома крайовими умовами, одна з яких умова Діріхле, друга — Неймана. Такі задачі виникають, зокрема, в теорії тепломасообміну [5] (п. 2.4). Встановимо нові достатні умови, за яких узагальнений розв'язок задачі буде сильно класичним, а також конкретизуємо умови існування класичного розв'язку цієї задачі на основі результатів роботи [19]. Результати сформулюємо в термінах належності правих частин задачі до узагальнених анізотропних просторів Соболева.

2. Постановка задачі. Нехай довільно задані ціле число $n \geq 2$, дійсне число $\tau > 0$ і обмежена область $G \subset \mathbb{R}^n$ із нескінченно гладкою межею $\Gamma := \partial G$. Позначимо $\Omega := G \times (0, \tau)$ — відкритий циліндр у $\mathbb{R}^{n+1}$, $S := \Gamma \times (0, \tau)$ — його бічна поверхня. Тоді $\bar{\Omega} := \bar{G} \times [0, \tau]$ і $\bar{S} := \Gamma \times [0, \tau]$ є замикання Ω і S відповідно. Будемо ототожнювати G з нижньою основою $G \times \{0\}$ циліндра Ω . Для частинних похідних функції, яка залежить від $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ і $t \in \mathbb{R}$, будемо використовувати такі позначення: $D_x^\alpha := D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, де $D_k := \partial/\partial x_k$ і $\partial_t := \partial/\partial t$. Тут $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — мультиіндекс і $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Розглянемо у циліндрі Ω таку систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \partial_t u_1(x, t) &= a_{11} \Delta u_1(x, t) + a_{12} \Delta u_2(x, t) + f_1(x, t), \\ \partial_t u_2(x, t) &= a_{21} \Delta u_1(x, t) + a_{22} \Delta u_2(x, t) + f_2(x, t), \end{aligned} \quad (1)$$

для всіх $(x, t) \in \Omega$.

Тут усі коефіцієнти a_{ij} — сталі дійсні числа, а характеристичні числа λ_1 і λ_2 матриці (a_{ij}) такі, що $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$. Така система є параболічною за Петровським (див., наприклад, [5], п. 2.4).

На бічній поверхні циліндра задано дві крайові умови

$$\begin{aligned} b_{11} D_n u_1(x, t) + b_{12} D_n u_2(x, t) &= g_1(x, t), \\ b_{21} u_1(x, t) + b_{22} u_2(x, t) &= g_2(x, t), \end{aligned} \quad (2)$$

для всіх $(x, t) \in S$.

Тут усі коефіцієнти b_{ij} — сталі дійсні числа такі, що для крайових операторів виконуються так звані умови доповнюваності [5] (п. 2.4), необхідні для коректної постановки задачі. Ці умови виконуються, зокрема, якщо $b_{11}b_{22} = 0$ або $b_{21}b_{12} = 0$, але не одночасно.

На основі циліндра задано початкові дані Коші

$$\begin{aligned} u_1(x, t)|_{t=0} &= h_1(x), \\ u_2(x, t)|_{t=0} &= h_2(x), \end{aligned} \quad (3)$$

для всіх $x \in G$.

Початково-крайова задача (1)–(3) буде параболичною за Петровським у циліндрі Ω (див. означення в [3] (розд. 1, § 1) або [5]). Дійсно, як зазначили вище, система (1) є параболичною за Петровським, а коефіцієнти крайових операторів (2) такі, що для останніх виконується умова доповнюваності.

3. Функціональні простори. Для зручності коротко нагадаємо означення узагальнених анізотропних просторів Соболева, потрібних для формулювання результатів. Для викладу цього пункту скористаємося результатами з [19] (п. 2) і [12] (п. 4).

Через $\mathcal{M}$ позначимо клас усіх неперервних функцій $\varphi : [1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ таких, що:

- а) φ і $1/\varphi$ обмежені на кожному відрізку $[1, c]$, де $1 < c < \infty$;
- б) φ повільно змінна за Карамата на нескінченності, тобто

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\varphi(\lambda r)}{\varphi(r)} = 1 \quad \text{для кожного} \quad \lambda > 0.$$

Нехай $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. За означенням, комплексний лінійний простір $H^{s,s/2;\varphi}(\mathbb{R}^k)$, де $2 \leq k \in \mathbb{Z}$, складається з усіх повільно зростаючих розподілів $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$ таких, що їхнє (повне) перетворення Фур'є $\tilde{w}$ є функцією, яка локально інтегровна на $\mathbb{R}^k$ за Лебегом і задовольняє умову

$$\begin{aligned} & \|w\|_{H^{s,s/2;\varphi}(\mathbb{R}^k)} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^{k-1}} \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2 + |\eta|^2)^s \varphi^2((1 + |\xi|^2 + |\eta|^2)^{1/2}) |\tilde{w}(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta \right)^{1/2} < \infty, \end{aligned} \quad (4)$$

де $\xi \in \mathbb{R}^{k-1}$ і $\eta \in \mathbb{R}$. Цей простір гільбертовий і сепарабельний щодо норми (4). Він є окремим випадком просторів $\mathcal{B}_{p,\mu}$, уведених Хермандером [22] (п. 2.2), а саме: $H^{s,s/2;\varphi}(\mathbb{R}^k) = \mathcal{B}_{p,\mu}$ за умови, що $p = 2$ і

$$\mu(\xi, \eta) \equiv (1 + |\xi|^2 + |\eta|^2)^{s/2} \varphi((1 + |\xi|^2 + |\eta|^2)^{1/2}).$$

Гільбертовий анізотропний простір $H^{s,s/2;\varphi}(\Omega)$ означено як простір звужень на Ω всіх розподілів із $H^{s,s/2;\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$, а гільбертовий анізотропний простір $H^{s,s/2;\varphi}(S)$ на бічній поверхні циліндра означено за базовим простором $H^{s,s/2;\varphi}(\mathbb{R}^n)$ за допомогою спеціальних локальних карт на бічній поверхні циліндра (див. [23], п. 1). Означення та основні властивості просторів $H^{s,s/2;\varphi}(W)$, де $W \in \{\Omega, S\}$, наведено, наприклад, у [18] (п. 2). Ізотропні простори $H^{s;\varphi}(G)$ і $H^{s;\varphi}(\Gamma)$, задані на основі G циліндра та лінії Γ з'єднання основи і бічної поверхні відповідно, означено в [15, пп. 2.1.1, 3.2.1; 17].

Також буде потрібний простір правих частин задачі $\mathcal{Q}^{s-2,s/2-1;\varphi}$ (див. [18], п. 4). Він утворений такими векторами $(f_1, f_2, g_1, g_2, h_1, h_2)$ з простору

$$\begin{aligned} & (H^{s-2,s/2-1;\varphi}(\Omega))^2 \oplus H^{s-3/2,s/2-3/4;\varphi}(S) \\ & \oplus H^{s-1/2,s/2-1/4;\varphi}(S) \oplus (H^{s-1;\varphi}(G))^2, \end{aligned}$$

які задовольняють природні умови узгодження правих частин параболичної задачі (1)–(3).

Нарешті, нагадаємо потрібні означення локальних версій просторів, про які йшла мова вище (див. [12], п. 4). Нехай U — відкрита множина в $\mathbb{R}^{n+1}$ така, що $\Omega_0 := U \cap \Omega \neq \emptyset$

і $U \cap \Gamma = \emptyset$. Покладемо $\Omega' := U \cap \partial\bar{\Omega}$, $S_0 := U \cap S$, $S' := U \cap \{(x, \tau) : x \in \Gamma\}$ і $G_0 := U \cap G$. Позначимо через $H_{\text{loc}}^{s,s/2;\varphi}(\Omega_0, \Omega')$ лінійний простір усіх розподілів u на Ω таких, що $\chi u \in H^{s,s/2;\varphi}(\Omega)$ для кожної функції $\chi \in C^\infty(\bar{\Omega})$, яка задовольняє умову $\text{supp } \chi \subset \Omega_0 \cup \Omega'$. Аналогічно, позначимо через $H_{\text{loc}}^{s,s/2;\varphi}(S_0, S')$ лінійний простір усіх розподілів v на S таких, що $\chi v \in H^{s,s/2;\varphi}(S)$ для будь-якої функції $\chi \in C^\infty(\bar{S})$, яка задовольняє умову $\text{supp } \chi \subset S_0 \cup S'$. Нарешті, $H_{\text{loc}}^{s;\varphi}(G_0)$ позначає лінійний простір усіх розподілів w на G таких, що $\chi w \in H^{s;\varphi}(G)$ для кожної функції $\chi \in C^\infty(\bar{G})$, яка задовольняє умову $\text{supp } \chi \subset G_0$.

Якщо $\varphi(\cdot) = 1$, то ці простори є соболевськими. В цьому випадку вилучаємо індекс φ у їхніх позначеннях.

4. Основні результати. Параболічність за Петровським задачі (1) – (3) означає її коректну розв'язність у відповідних шкалах узагальнених просторів Соболева (див. [18], теорема 4.1). Це, зокрема, означає, що для будь-якого вектора $(f_1, f_2, g_1, g_2, h_1, h_2)$ правих частин задачі з соболевського простору $\mathcal{Q}^{0,0}$ задача має єдиний розв'язок $(u_1, u_2) \in (H^{2,1}(\Omega))^2$.

У нашому випадку простір $\mathcal{Q}^{0,0}$ складається з вектор-функцій $(f_1, f_2, g_1, g_2, h_1, h_2)$, які належать простору

$$(H^{0,0}(\Omega))^2 \oplus H^{1/2,1/4}(S) \oplus H^{3/2,3/4}(S) \oplus (H^1(G))^2$$

і задовольняють природну умову узгодження на лінії Γ з'єднання бічної поверхні та основи циліндра

$$g_2 \upharpoonright \Gamma = (b_{21}h_1 + b_{22}h_2) \upharpoonright \Gamma. \quad (5)$$

Отже, для будь-якого вектора $(f_1, f_2, g_1, g_2, h_1, h_2)$ правих частин задачі (1) – (3), що задовольняє такі умови:

$$\begin{aligned} f_1, f_2 &\in H^{0,0}(\Omega), \\ g_1 &\in H^{1/2,1/4}(S), \quad g_2 \in H^{3/2,3/4}(S), \\ h_1, h_2 &\in H^1(G), \\ g_2 \upharpoonright \Gamma &= (b_{21}h_1 + b_{22}h_2) \upharpoonright \Gamma, \end{aligned}$$

задача має єдиний розв'язок $u = (u_1, u_2) \in (H^{2,1}(\Omega))^2$. Цей розв'язок називаємо *узагальненим розв'язком* нашої задачі.

З практичної точки зору важливим є питання, за яких умов на праві частини задачі її узагальнений розв'язок буде в певному розумінні класичним. Оскільки під класичним розуміють такий неперервно диференційовний певну кількість разів розв'язок $u = (u_1, u_2)$, що ліві частини системи, крайових і початкових умов обчислюються в сенсі класичного диференціювання та слідів неперервних функцій u_1 і u_2 . Як зазначали у вступі, часто однією з умов в означенні класичного розв'язку задачі є умова його неперервності на лінії Γ з'єднання бічної поверхні та основи циліндра. Цю умову буде виконано, якщо розв'язок є неперервним у замкненому циліндрі $\bar{\Omega}$. У такому випадку будемо вживати термін “сильно класичний розв'язок”.

Наведемо точні означення. Нехай

$$S_\varepsilon := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, S) < \varepsilon\}, \quad G_\varepsilon := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, G) < \varepsilon\},$$

де число $\varepsilon > 0$.

Узагальнений розв'язок $u = (u_1, u_2) \in (H^{2,1}(\Omega))^2$ задачі (1)–(3) називаємо *сильно класичним*, якщо він і його узагальнені похідні задовольняють такі умови:

- a1) $D_x^\alpha u_1, D_x^\alpha u_2$ при $0 \leq |\alpha| \leq 2$ та $\partial_t u_1$ і $\partial_t u_2$ неперервні на Ω ;
- б1) $D_x^\alpha u_1, D_x^\alpha u_2$ неперервні на $S_\varepsilon \cup S$ для деякого числа $\varepsilon > 0$, якщо $0 \leq |\alpha| \leq 1$;
- в1) u_1 і u_2 неперервні на $\bar{\Omega}$.

Нагадаємо, узагальнений розв'язок $u = (u_1, u_2) \in (H^{2,1}(\Omega))^2$ задачі (1)–(3) називаємо *класичним* (див. [19], п. 3) якщо він і його узагальнені похідні задовольняють умови a1), б1) і

- в2) u_1 і u_2 неперервні на $G_\varepsilon \cup G$ для деякого числа $\varepsilon > 0$.

В означенні класичного розв'язку задачі сформульовано мінімальні умови на вектор-функцію u , за яких вона в термінах класичних похідних і слідів задовольняє рівняння (1), крайові умови (2) і початкові умови (3). Для цього умову в1) неперервності вектор-функції u в усьому циліндрі замінюємо на умову в2) неперервності лише в деякому малому околі основи G .

Якщо вектор-функція $u = u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t))$ є класичним розв'язком задачі (1)–(3), то ліві частини рівняння, крайових і початкових умов є неперервними функціями на відповідних множинах. Зрозуміло, що сильно класичний розв'язок є класичним, але не навпаки.

Умови, за яких узагальнений розв'язок загальної параболічної крайової задачі для системи диференціальних рівнянь є класичним, сформульовано в [19] (теорема 4). Наступна теорема є конкретизацією зазначеної теореми для розглядуваної задачі.

Теорема 1. Припустимо, що вектор-функція $u \in (H^{2,1}(\Omega))^2$ є узагальненим розв'язком параболічної задачі (1)–(3), праві частини якої задовольняють такі умови:

$$\begin{aligned} (f_1, f_2) &\in (H_{\text{loc}}^{1+n/2, 1/2+n/4; \varphi}(\Omega, \emptyset))^2 \\ &\cap (H_{\text{loc}}^{n/2, n/4; \varphi}(S_\varepsilon, S))^2 \\ &\cap (H_{\text{loc}}^{-1+n/2, -1/2+n/4; \varphi}(G_\varepsilon, G))^2, \\ g_1 &\in H_{\text{loc}}^{n/2+1/2, n/4+1/4; \varphi}(S, \emptyset), \quad g_2 \in H_{\text{loc}}^{n/2+3/2, n/4+3/4; \varphi}(S, \emptyset), \\ (h_1, h_2) &\in (H_{\text{loc}}^{n/2; \varphi}(G))^2 \end{aligned} \quad (6)$$

з деяким функціональним параметром $\varphi \in \mathcal{M}$, що задовольняє інтегральну умову

$$\int_1^\infty \frac{dr}{r \varphi^2(r)} < \infty. \quad (7)$$

У випадку $n = 2$ додатково припускаємо, що функція φ зростає (у нестрогому сенсі). Тоді розв'язок $u = (u_1, u_2)$ є класичним.

Теорему 1 отримуємо з [19] (теорема 4) при $N = 2$, $l_0 = l_1 = 1$ і $l_2 = 0$.

Зазначимо, що припущення зростання φ при $n = 2$ необхідне нам з огляду на те, що результат про розв'язність задачі (1)–(3) в узагальнених просторах Соболева [18] (теорема 4.1) отримано за умови, що її праві частини належать до просторів, які вкладаються у відповідні простори $L_2(\cdot)$. А, наприклад, простір $H^{0,0; \varphi}(\Omega)$ для спадної φ буде вже ширший, ніж $H^{0,0}(\Omega) = L_2(\Omega)$.

Зауваження 1. Використання узагальнених просторів Соболева дає більш тонкий результат, ніж у випадку просторів Соболева. А саме: для того щоб висновок теореми 1 залишився правильним при $\varphi = 1$ (тут (7) не виконується), треба в (6) збільшити числові показники регулярності просторів на деяке число $\delta > 0$. Іншими словами, ці умови замінити на такі:

$$\begin{aligned} (f_1, f_2) &\in \left(H_{\text{loc}}^{1+n/2+\delta, 1/2+n/4+\delta/2}(\Omega, \emptyset) \right)^2 \\ &\cap \left(H_{\text{loc}}^{n/2+\delta, n/4+\delta/2}(S_\varepsilon, S) \right)^2 \\ &\cap \left(H_{\text{loc}}^{-1+n/2+\delta, -1/2+n/4+\delta/2}(G_\varepsilon, G) \right)^2, \\ g_1 &\in H_{\text{loc}}^{n/2+1/2+\delta, n/4+1/4+\delta/2}(S, \emptyset), \quad g_2 \in H_{\text{loc}}^{n/2+3/2+\delta, n/4+3/4+\delta/2}(S, \emptyset), \\ (h_1, h_2) &\in \left(H_{\text{loc}}^{n/2+\delta}(G) \right)^2. \end{aligned}$$

Останні умови є більш сильними, ніж (6), оскільки для довільних $s_1 > s_2$ і $\varphi \in \mathcal{M}$ правильні вкладки $H^{s_1, s_1/2}(\cdot) \hookrightarrow H^{s_2, s_2/2; \varphi}(\cdot)$ [14, с. 22].

Сформулюємо тепер основний результат — умови, за яких розв'язок $u = u(x, t)$ задачі (1)–(3) буде сильно класичним.

Теорема 2. Припустимо, що вектор-функція $u \in \left(H^{2,1}(\Omega) \right)^2$ є узагальненим розв'язком параболічної задачі (1)–(3), праві частини якої задовольняють умови

$$(f_1, f_2) \in \left(H_{\text{loc}}^{1+n/2, 1/2+n/4; \varphi}(\Omega, \emptyset) \right)^2 \cap \left(H_{\text{loc}}^{n/2, n/4; \varphi}(S_\varepsilon, S) \right)^2, \quad (8)$$

$$g_1 \in H_{\text{loc}}^{n/2+1/2, n/4+1/4; \varphi}(S, \emptyset), \quad g_2 \in H_{\text{loc}}^{n/2+3/2, n/4+3/4; \varphi}(S, \emptyset), \quad (9)$$

$$(f_1, f_2, g_1, g_2, h_1, h_2) \in \mathcal{Q}^{-1+n/2, -1/2+n/4; \varphi} \quad (10)$$

з деяким функціональним параметром $\varphi \in \mathcal{M}$, що задовольняє інтегральну умову (7). У випадку $n = 2$ додатково припускаємо, що функція φ зростає (у нестрогому сенсі). Тоді розв'язок $u = (u_1, u_2)$ є сильно класичним.

Зауважимо, для того щоб вказати, до яких просторів належать праві частини задачі згідно з умовою (10), треба скористатись означенням простору $\mathcal{Q}^{-1+n/2, -1/2+n/4; \varphi}$. Він має доволі складну будову [18] (п. 4) завдяки умовам узгодження, накладеним на компоненти його елементів. Кількість і складність цих умов зростає зі зростанням n .

Зауваження 2. У практично важливих випадках $n = 2$ або $n = 3$ умова (10) у теоремі 2 еквівалентна такій:

$$\begin{aligned} (f_1, f_2) &\in \left(H^{-1+n/2, -1/2+n/4; \varphi}(\Omega) \right)^2, \\ g_1 &\in H^{n/2-1/2, n/4-1/4; \varphi}(S), \quad g_2 \in H^{n/2+1/2, n/4+1/4; \varphi}(S), \\ (h_1, h_2) &\in \left(H^{n/2; \varphi}(G) \right)^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Взагалі, простір $\mathcal{Q}^{-1+n/2, -1/2+n/4; \varphi}$ для $n = 2$ або $n = 3$ складається з вектор-функцій, що задовольняють одночасно (11) і (5). Для вектор-функцій $(f_1, f_2, g_1, g_2, h_1, h_2)$ з формулювання теореми 2 виконання (5) впливає з умови теореми $u \in \left(H^{2,1}(\Omega) \right)^2$. Дійсно, тоді

$(f_1, f_2, g_1, g_2, h_1, h_2) \in \mathcal{Q}^{0,0}$. За означенням елементи простору $\mathcal{Q}^{0,0}$ задовольняють (5). При $n \geq 4$ простір $\mathcal{Q}^{-1+n/2, -1/2+n/4; \varphi}$ складається з векторів, які задовольняють включення (11) та більш складні, ніж (5), умови узгодження [18] (п. 4).

Зазначимо, що для теореми 2 правильна версія зауваження 1.

Доведення теореми 2. Покажемо, що функції u_1 і u_2 задовольняють умови а1)–в1) означення сильно класичного розв'язку. Для умов а1) і б1) використаємо теорему 3 з [19].

Розглядаємо умову а1). Покладемо $N = 2$, $\Omega_0 = \Omega$, $\Omega' = S_0 = S' = G_0 = \emptyset$ і $p = 2$. Далі використовуємо включення

$$(f_1, f_2) \in (H_{\text{loc}}^{1+n/2, 1/2+n/4; \varphi}(\Omega, \emptyset))^2$$

з умови (8). Тоді з теореми 3 [19] випливає, що вектор-функція $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t))$ і кожна її узагальнена частинна похідна $D_x^\alpha \partial_t^\beta u(x, t) = (D_x^\alpha \partial_t^\beta u_1(x, t), D_x^\alpha \partial_t^\beta u_2(x, t))$, де $|\alpha| + 2\beta \leq 2$, неперервні на множині $\Omega_0 \cup \Omega' = \Omega$. При $\beta = 0$ маємо неперервність $D_x^\alpha u_1$ і $D_x^\alpha u_2$ для $|\alpha| \leq 2$, при $|\alpha| = 0$ — неперервність $\partial_t u_1$ і $\partial_t u_2$ відповідно. Таким чином, виконується умова а1).

Переходимо до умови б1). Покладемо $N = 2$, $\Omega_0 = S_\varepsilon$, $\Omega' = S_0 = S$, $S' = G_0 = \emptyset$ і $p = 1$. Використаємо включення

$$(f_1, f_2) \in (H_{\text{loc}}^{n/2, n/4; \varphi}(S_\varepsilon, S))^2$$

з (8) і включення (9):

$$g_1 \in H_{\text{loc}}^{n/2+1/2, n/4+1/4; \varphi}(S, \emptyset), \quad g_2 \in H_{\text{loc}}^{n/2+3/2, n/4+3/4; \varphi}(S, \emptyset).$$

У цьому випадку з теореми 3 [19] випливає, що вектор-функція $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t))$ і кожна її узагальнена частинна похідна $D_x^\alpha \partial_t^\beta u(x, t) = (D_x^\alpha \partial_t^\beta u_1(x, t), D_x^\alpha \partial_t^\beta u_2(x, t))$, де $|\alpha| + 2\beta \leq 1$, неперервні на множині $\Omega_0 \cup \Omega' = S_\varepsilon \cup S$. При $\beta = 0$ маємо неперервність $D_x^\alpha u_1$ і $D_x^\alpha u_2$ для $|\alpha| \leq 1$. Отже, виконується умова б1).

Нарешті, розглянемо умову в1). Використовуючи включення (10)

$$(f_1, f_2, g_1, g_2, h_1, h_2) \in \mathcal{Q}^{-1+n/2, -1/2+n/4; \varphi}$$

і [19] (теорема 1) із $s = 1 + n/2$, робимо висновок, що

$$(u_1(x, t), u_2(x, t)) \in (H^{1+n/2, 1/2+n/4; \varphi}(\Omega))^2.$$

Розглянемо простір $H^{1+n/2, 1/2+n/4; \varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$ із функціональним параметром φ , який задовольняє інтегральну умову (7). З [14] (теорема 1.13(i)) при $p = 0$ і $b = 1$ випливає, що всі елементи цього простору є неперервними на $\mathbb{R}^{n+1}$ функціями. За означенням, простір $H^{1+n/2, 1/2+n/4; \varphi}(\Omega)$ складається зі звужень на Ω розподілів із простору $H^{1+n/2, 1/2+n/4; \varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$. Тому для u_1 і u_2 існують такі w_1 і w_2 із простору $H^{1+n/2, 1/2+n/4; \varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$, що $u_1 = w_1 \upharpoonright \Omega$ і $u_2 = w_2 \upharpoonright \Omega$. Це означає, що u_1 і u_2 є неперервними функціями на $\overline{\Omega}$, тобто виконується умова в1).

Теорему 2 доведено.

Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів. Усі необхідні дані містяться в статті. Всі автори зробили рівномірний внесок у цю роботу. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Література

1. В. А. Ильин, *О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений*, Успехи мат. наук, **15**, № 2, 97 – 154 (1960).
2. А. М. Ильин, А. С. Калашников, О. А. Олейник, *Линейные уравнения второго порядка параболического типа*, Успехи мат. наук, **17**, № 3, 3 – 146 (1962).
3. В. А. Солонников, *О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида*, Тр. Мат. ин-та АН СССР, **83**, 3 – 163 (1965).
4. С. Д. Ивасишен, *Матрицы Грина параболических граничных задач*, Вища школа, Киев (1990).
5. S. D. Eidel'man, *Parabolic equations. Encyclopaedia of mathematical sciences*, Vol. 63, Springer, Berlin, 205 – 316 (1994).
6. S. D. Eidel'man, N. V. Zhitarashu, *Parabolic boundary value problems*, Birkhäuser, Basel (1998).
7. R. Denk, M. Hieber, J. Prüss, *Optimal L_p - L_q -estimates for parabolic boundary value problems with inhomogeneous data*, Math. Z., **257**, № 1, 193 – 224 (2007).
8. N. Lindemulder, *Maximal regularity with weights for parabolic problems with inhomogeneous boundary conditions*, J. Evol. Equat., **20**, № 1, 59 – 108 (2020).
9. H. Dong, D. Kim, *Elliptic and parabolic equations with measurable coefficients in weighted Sobolev spaces*, Adv. Math., **274**, 681 – 735 (2015).
10. F. Hummel, *Boundary value problems of elliptic and parabolic type with boundary data of negative regularity*, J. Evol. Equat., **21**, № 2, 1945 – 2007 (2021).
11. J. LeCrone, J. Prüss, M. Wilke, *On quasilinear parabolic evolution equations in weighted L_p -spaces II*, J. Evol. Equat., **14**, № 3, 509 – 533 (2014).
12. V. Los, V. A. Mikhailets, A. A. Murach, *Parabolic problems in generalized Sobolev spaces*, Commun. Pure Appl. Anal., **20**, № 10, 3605 – 3636 (2021).
13. V. Los, V. A. Mikhailets, A. A. Murach, *An isomorphism theorem for parabolic problems in Hörmander spaces and its applications*, Commun. Pure Appl. Anal., **16**, № 1, 69 – 97 (2017).
14. В. М. Лось, В. А. Михайлец, О. О. Мурач, *Параболічні граничні задачі та узагальнені простори Соболева*, Наукова думка, Київ (2023).
15. V. A. Mikhailets, A. A. Murach, *Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems*, De Gruyter, Berlin (2014).
16. A. Anop, R. Denk, A. Murach, *Elliptic problems with rough boundary data in generalized Sobolev spaces*, Commun. Pure Appl. Anal., **20**, № 2, 697 – 735 (2021).
17. V. A. Mikhailets, A. A. Murach, *The refined Sobolev scale, interpolation, and elliptic problems*, Banach J. Math. Anal., **6**, № 2, 211 – 281 (2012).
18. O. Diachenko, V. Los, *Some problems for Petrovskii parabolic systems in generalized Sobolev spaces*, J. Elliptic Parabol. Equat., **8**, 313 – 329 (2022).
19. О. В. Дяченко, В. М. Лось, *Умови регулярності розв'язків деяких параболических систем*, Укр. мат. журн., **74**, № 8, 1107 – 1117 (2022); **English translation:** Ukr. Math. J., **74**, № 8, 1263 – 1274 (2023).
20. В. П. Михайлов, *Смешанная и краевая задачи для параболических уравнений и систем. Математическая энциклопедия*, т. 5, Советская энциклопедия, Москва (1985).
21. В. М. Лось, *Класичні розв'язки параболических початково-крайових задач і простори Хермандера*, Укр. мат. журн., **68**, № 9, 1229 – 1239 (2016); **English translation:** Ukr. Math. J., **68**, № 9, 1412 – 1423 (2017).
22. L. Hörmander, *Linear partial differential operators*, Springer, Berlin (1963).
23. В. М. Лось, *Анізотропні простори Хермандера на бічній поверхні циліндра*, Нелін. коливання, **18**, № 2, 226 – 237 (2015); **English translation:** J. Math. Sci. (N. Y.), **217**, № 4, 456 – 467 (2016).

Одержано 24.07.23