

АСИМПТОТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-АЛГЕБРАЇЧНИХ СИСТЕМ

Марина Віра

*Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя
вул. Графська, 2, Ніжин, 16600, Україна
e-mail: vyuramaryna@gmail.com*

Микола Рашевський

*Відокремлений структурний підрозділ
“Криворізький фаховий коледж Національного авіаційного університету”
вул. Туполєва, 1, Кривий Ріг, 50024, Україна
e-mail: mora290466@gmail.com*

Петро Самусенко

*Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”
просп. Перемоги, 37, Київ, 03056, Україна
e-mail: psamusenko@ukr.net, відповідальний за листування*

We establish sufficient conditions for the existence and uniqueness of a solution of the two-point boundary-value problem for a linear singularly perturbed differential-algebraic system in the case of simple roots of the corresponding characteristic equation. We develop an algorithm of construction of asymptotic solutions of this boundary-value problem.

Одержано достатні умови існування та єдиності розв'язку двоточної крайової задачі для лінійної сингулярно збуреної диференціально-алгебраїчної системи у випадку простих коренів відповідного характеристичного рівняння. Розроблено алгоритм побудови асимптотичних розв'язків зазначеної крайової задачі.

1. Вступ. Підґрунтям досліджень властивостей розв'язків крайових задач для лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь є результати Біркгофа [1], Тамаркіна [2], Нуайона [3] і Туррітіна [4], в яких закладено основи асимптотичного аналізу вказаних систем. Знаючи фундаментальну матрицю лінійної системи, можна з'ясувати умови, при виконанні яких розв'язки збуреної системи, наприклад, є обмеженими або прямують до відповідних розв'язків незбуреної системи у випадку, коли малий параметр прямує до нуля [5]. Тоді розв'язки крайової задачі для сингулярно збуреної системи можна знайти як і у класичному випадку, використовуючи метод варіації довільних сталих [6]. При

цьому суттєво застосовується техніка зведення матриці коефіцієнтів системи до матриці квазидіагонального вигляду, діагональні елементи якої є жордановими клітинами [7 – 10].

Зрозуміло, що знаходження фундаментальної матриці лінійної системи диференціальних рівнянь є доволі складною задачею. Тому для вивчення крайових задач для сингулярно збурених систем часто використовують різноманітні асимптотичні методи, оскільки при цьому також є відомою асимптотична поведінка відповідної фундаментальної матриці.

Серед найбільш ефективних асимптотичних методів дослідження крайових задач для сингулярно збурених систем можна виокремити близькі за суттю метод Вішика – Люстерника [11], метод зрошування асимптотичних розвинень [12, 13] і метод примежових функцій [14 – 18]. Розв’язок крайової задачі будують у вигляді суми двох формальних рядів, один з яких є регулярним рядом (визначається відповідною незбуреною задачею), а інший — рядом примежового типу. Така структура розв’язку дозволяє зробити асимптотичний аналіз задачі, незважаючи на її суттєве спрощення і втрату частини крайових умов, що відбувається при переході від збуреної задачі до незбуреної.

Оригінальний підхід до асимптотичного інтегрування сингулярно збурених крайових задач запропонував Ломов [19]. У розробленому ним методі регуляризації сингулярно збурена задача переходом до простору більшого виміру стає регулярно збуреною, що дає змогу шукати її розв’язок у вигляді ряду за степенями малого параметра. Зазначимо, що Ломову вдалося знайти достатні умови збіжності асимптотичних розвинень розв’язків деяких сингулярно збурених задач.

У працях Самойленка, Бойчука та Каранджулова [20, 21] досліджено крайову задачу для сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = Ax + \varepsilon A_1(t)x + \varphi(t), \quad (1)$$

$$lx(\cdot) = h, \quad h \in R^m, \quad (2)$$

де l — лінійний обмежений m -вимірний функціонал, заданий інтегралом Рімана – Стілтєса. Розглядався як некритичний (дійсні частини власних значень матриці A не дорівнюють нулю), так і критичний випадки (нульовому власному значенню кратності k відповідає k лінійно незалежних власних векторів матриці A). Згідно з методом примежових функцій розв’язок задачі (1), (2) будувався у вигляді суми двох формальних рядів. Члени регулярного ряду знаходилися з алгебраїчних систем, а члени примежового ряду — із систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. При цьому суттєво використовувалася техніка проєкторів [22].

Крайову задачу для сингулярно збуреної диференціально-алгебраїчної системи

$$\varepsilon B(t) \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x, \quad (3)$$

$$Mx(0, \varepsilon) + Nx(T, \varepsilon) = d(\varepsilon), \quad (4)$$

розглянуто у праці Старуна [23]. Припускаючи регулярність в’язки $A(t, 0) - \lambda B(t)$ і простоту її нескінченних елементарних дільників, проведено розщеплення системи (3) на диференціальну і алгебраїчну системи меншої розмірності. Це дозволило звести задану задачу до двоточкової крайової задачі для системи диференціальних рівнянь і знайти вигляд вектора $d(\varepsilon)$, при якому задача (3), (4) є сумісною.

Більш складні випадки щодо структури кронекерової в'язки досліджено у працях Яковця, Віри та Пафика [24–26]. Припускалося, що в'язка $A(t, 0) - \lambda B(t)$ має як прості, так і кратні елементарні дільники (скінченні та нескінченні). Для знаходження розв'язку крайової задачі будували фундаментальну матрицю системи (3) [27] і відповідний вектор довільних сталих визначався з крайових умов. При цьому суттєвим було припущення про відмінність від нуля дійсних частин власних значень в'язки $A(t, 0) - \lambda B(t)$ або, якщо це не так, припущення про тотожну рівність нулю цих власних значень.

Випадок, коли дійсні частини власних значень в'язки $A(t, 0) - \lambda B(t)$ дорівнюють нулю, а самі власні значення відмінні від нуля, раніше не розглядався. Насамперед це пов'язано з методом побудови формальних розв'язків відповідної крайової задачі. Якщо вони будуються безпосередньо (метод примежових функцій [20, 21]), то членам сингулярної частини асимптотики не притаманна основна властивість примежових функцій (примежові функції достатньо великі в околі певних точок і експоненціально спадають поза цими околами). Якщо ж використовується фундаментальна матриця системи (3), то при знаходженні відповідного вектора довільних сталих із крайових умов нехтують експоненціально малими доданками [24–26], що в принципі не можливо, якщо власні значення в'язки $A(t, 0) - \lambda B(t)$ суто уявні і відмінні від нуля.

Саме такий випадок і досліджується у цій статті.

2. Асимптотичний аналіз крайової задачі. 2.1. Невироджений випадок. Розглянемо крайову задачу

$$\varepsilon B(t, \varepsilon) \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x + f(t, \varepsilon), \quad t \in [0; T], \quad (5)$$

$$Mx(0, \varepsilon) + Nx(T, \varepsilon) = d(\varepsilon), \quad (6)$$

де $x = x(t, \varepsilon)$ — шуканий n -вимірний вектор, $A(t, \varepsilon)$, $B(t, \varepsilon)$ — квадратні матриці n -го порядку, M , N — прямокутні $(l \times n)$ -вимірні матриці зі сталими елементами, $f(t, \varepsilon)$ та $d(\varepsilon)$ — відповідно n - і l -вимірні вектори, $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$, $0 < \varepsilon_0 \ll 1$. Припускаємо, що коефіцієнти задачі (5), (6) є дійсними або комплекснозначними функціями.

Крайову задачу (5), (6) розглядаємо у двох випадках — невинродженому та винродженому. Назвемо випадок невинродженим, якщо $\det B(t, \varepsilon) \neq 0$, $t \in [0; T]$, $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$.

Нехай виконуються такі умови:

1. Матриці $A(t, \varepsilon)$, $B(t, \varepsilon)$ і вектори $f(t, \varepsilon)$, $d(\varepsilon)$ допускають рівномірні асимптотичні розвинення

$$A(t, \varepsilon) = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k A_k(t), \quad B(t, \varepsilon) = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k B_k(t), \quad f(t, \varepsilon) = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k f_k(t), \quad t \in [0; T], \quad (7)$$

$$d(\varepsilon) = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k d_k.$$

2. Коефіцієнти $A_k(t)$, $B_k(t)$, $f_k(t)$ розвинень (7) нескінченно диференційовні на відрізьку $[0; T]$.

3. $\det B_0(t) \equiv 0$, $t \in [0; T]$.

4. В'язка матриць $A_0(t) - \lambda B_0(t)$, $t \in [0; T]$, регулярна, має $n - 1$ простих власних значень $\lambda_i(t)$, тобто

$$\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t), \quad t \in [0; T], \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, n-1},$$

причому $\operatorname{Re} \lambda_i(t) \leq 0$, $t \in [0; T]$, $i = \overline{1, n-1}$, і $\lambda_i(t) \neq 0$, $t \in [0; T]$, $i = \overline{1, n-1}$.

Тоді, не применшуючи загальності, можна вважати, що матриці $A_0(t)$ і $B_0(t)$ у системі (5) діагональні. Справді, з умов 1–4 випливає існування таких неособливих нескінченно диференційовних на заданому відрізку матриць $P(t)$ і $Q(t)$, що

$$P(t)A_0(t)Q(t) = \Omega_0(t) \equiv \operatorname{diag} \{1, \Lambda_{n-1}(t)\}, \quad P(t)B_0(t)Q(t) = H_0(t) \equiv \operatorname{diag} \{0, E_{n-1}\},$$

де $\Lambda_{n-1} = \operatorname{diag} \{\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_{n-1}(t)\}$, а E_{n-1} — одинична матриця $(n-1)$ -го порядку.

Отже, нехай

$$A_0(t) = \Omega_0(t), \quad B_0(t) = H_0(t).$$

Згідно з умовами 1–4 існують такі неособливі нескінченно диференційовні матриці $P(t, \varepsilon)$ і $Q(t, \varepsilon)$, що

$$P(t, \varepsilon)A(t, \varepsilon)Q(t, \varepsilon) = \Omega(t, \varepsilon) + \varepsilon P(t, \varepsilon)B(t, \varepsilon)Q'(t, \varepsilon), \quad (8)$$

$$P(t, \varepsilon)B(t, \varepsilon)Q(t, \varepsilon) = H(t, \varepsilon), \quad (9)$$

де

$$\Omega(t, \varepsilon) = \operatorname{diag} \{e(t, \varepsilon), \Lambda_{n-1}(t, \varepsilon)\}, \quad H(t, \varepsilon) = \operatorname{diag} \{h(t, \varepsilon), E_{n-1}(t, \varepsilon)\},$$

$$\Lambda_{n-1}(t, \varepsilon) = \operatorname{diag} \{\lambda_1(t, \varepsilon), \lambda_2(t, \varepsilon), \dots, \lambda_{n-1}(t, \varepsilon)\},$$

$$E_{n-1}(t, \varepsilon) = \operatorname{diag} \{e_1(t, \varepsilon), e_2(t, \varepsilon), \dots, e_{n-1}(t, \varepsilon)\}$$

і $\Omega(t, 0) = \Omega_0(t)$, $H(t, 0) = H_0(t)$ (алгоритм побудови перетворюючих матриць $P(t, \varepsilon)$ і $Q(t, \varepsilon)$ наведено в останній частині цієї роботи).

При цьому на відрізку $[0; T]$ мають місце рівномірні асимптотичні розвинення

$$\Omega(t, \varepsilon) = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k \Omega_k(t), \quad H(t, \varepsilon) = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k H_k(t),$$

$$P(t, \varepsilon) = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k P_k(t), \quad Q(t, \varepsilon) = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k Q_k(t),$$

де $P_0(t) = Q_0(t) = E_n$, E_n — одинична матриця n -го порядку.

За побудовою

$$P(t, \varepsilon) = P_m(t, \varepsilon) + \varepsilon^{m+1} \tilde{P}(t, \varepsilon), \quad Q(t, \varepsilon) = Q_m(t, \varepsilon) + \varepsilon^{m+1} \tilde{Q}(t, \varepsilon),$$

де

$$P_m(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k P_k(t), \quad Q_m(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k Q_k(t),$$

а $\tilde{P}(t, \varepsilon) = O(1)$, $\tilde{Q}(t, \varepsilon) = O(1)$, $t \in [0; T]$, $\varepsilon \rightarrow 0+$.

Тоді з рівностей (8), (9) одержуємо

$$P_m(t, \varepsilon)A(t, \varepsilon)Q_m(t, \varepsilon) = \Omega_m(t, \varepsilon) + \varepsilon P_m(t, \varepsilon)B(t, \varepsilon)Q'_m(t, \varepsilon) + \varepsilon^{m+1}\tilde{\Omega}(t, \varepsilon),$$

$$P_m(t, \varepsilon)B(t, \varepsilon)Q_m(t, \varepsilon) = H_m(t, \varepsilon) + \varepsilon^{m+1}\tilde{H}(t, \varepsilon),$$

де

$$\Omega_m(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \Omega_k(t), \quad H_m(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k H_k(t),$$

а $\tilde{\Omega}(t, \varepsilon) = O(1)$, $\tilde{H}(t, \varepsilon) = O(1)$, $t \in [0; T]$, $\varepsilon \rightarrow 0+$.

У системі (5) зробимо заміну $y = Q_m(t, \varepsilon)x$ і домножимо її обидві частини зліва на $P_m(t, \varepsilon)$. Маємо

$$\varepsilon(H_m(t, \varepsilon) + \varepsilon^{m+1}\tilde{H}(t, \varepsilon))\frac{dy}{dt} = (\Omega_m(t, \varepsilon) + \varepsilon^{m+1}\tilde{\Omega}(t, \varepsilon))y + g(t, \varepsilon), \quad (10)$$

де $g(t, \varepsilon) = P_m(t, \varepsilon)f(t, \varepsilon)$.

Крайова умова (6) при цьому набуде вигляду

$$MQ_m(0, \varepsilon)y(0, \varepsilon) + NQ_m(T, \varepsilon)y(T, \varepsilon) = d(\varepsilon). \quad (11)$$

5. Припустимо, що $h(t, \varepsilon) = \varepsilon^k \tilde{h}(t, \varepsilon)$, де $\operatorname{Re} \tilde{h}(t, 0) < 0$, $t \in [0; T]$ (за умови 5 має місце невинороджений випадок). Зауважимо, що з умов 1 і 3 випливає, що $k > 0$.

Тоді матриця $H_m(t, \varepsilon)$, $m \geq k$, не особлива для всіх $t \in [0; T]$, $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$ і фундаментальна матриця відповідної однорідної системи

$$\varepsilon H_m(t, \varepsilon) \frac{dy}{dt} = \Omega_m(t, \varepsilon)y \quad (12)$$

має вигляд $Y_m(t, \varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t H_m^{-1}(t, \varepsilon)\Omega_m(t, \varepsilon)dt\right)$.

Розглянемо допоміжну крайову задачу для задачі (10), (11), знехтувавши у системі (10) матрицями $\tilde{H}(t, \varepsilon)$ і $\tilde{\Omega}(t, \varepsilon)$.

Частинний розв'язок неоднорідної системи

$$\varepsilon H_m(t, \varepsilon) \frac{dy}{dt} = \Omega_m(t, \varepsilon)y + g(t, \varepsilon) \quad (13)$$

шукаємо у вигляді

$$y(t, \varepsilon) = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k u_k(t). \quad (14)$$

Підставляючи (14) у систему (13) і порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε , отримуємо

$$u_0(t) = -\Omega_0^{-1}(t)g_0(t),$$

$$u_k(t) = \Omega_0^{-1}(t) \left(\sum_{s=0}^k H_s(t)u'_{k-s-1}(t) - \sum_{s=1}^k \Omega_s(t)u_{k-s}(t) - g_s(t) \right), \quad k \in N,$$

де $u_i(t) \equiv 0$, $t \in [0; T]$, $i < 0$; $H_j(t) \equiv 0$, $\Omega_j(t) \equiv 0$, $t \in [0; T]$, $j > m$; $g(t, \varepsilon) = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k g_k(t)$.

Асимптотичний розв'язок крайової задачі (13), (11) шукаємо у вигляді

$$y_m(t, \varepsilon) = Y_m(t, \varepsilon)a(\varepsilon) + u_m(t, \varepsilon), \quad (15)$$

де $u_m(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k u_k(t)$, визначаючи вектор довільних сталих $a(\varepsilon)$ так, щоб функція $y_m(t, \varepsilon)$ задовольняла крайові умови (11) із точністю до членів $O(\varepsilon^{m+1})$:

$$\begin{aligned} & \left(MQ_m(0, \varepsilon) + NQ_m(T, \varepsilon) \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T H_m^{-1}(t, \varepsilon) \Omega_m(t, \varepsilon) dt \right) \right) a(\varepsilon) \\ & = d(\varepsilon) - MQ_m(0, \varepsilon)u_m(0, \varepsilon) - NQ_m(T, \varepsilon)u_m(T, \varepsilon). \end{aligned} \quad (16)$$

Для визначеності припустимо, що $\operatorname{Re} \lambda_i(t) < 0$, $t \in [0; T]$, $i = \overline{1, r}$, і $\operatorname{Re} \lambda_i(t) \leq 0$, $t \in [0; T]$, $i = \overline{r+1, n-1}$. Оскільки $Q_m(0, 0) = Q_m(T, 0) = E_n$, то система (16) буде сумісною, якщо, наприклад,

$$\det \left(M + R \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \Psi_m(t, \varepsilon) dt \right) \right) \neq 0, \quad \varepsilon \in (0; \varepsilon_0], \quad (17)$$

де перші r стовпців матриці R є нульовими, решта стовпців є стовпцями матриці N ,

$$\Psi_m(t, \varepsilon) = \operatorname{diag} \{0, \dots, 0, \psi_{r+1}(t, \varepsilon), \dots, \psi_n(t, \varepsilon)\},$$

$\psi_i(t, \varepsilon)$, $i = \overline{r+1, n-1}$, — відповідні діагональні елементи матриці $H_m^{-1}(t, \varepsilon) \Omega_m(t, \varepsilon)$.

Припустимо, що виконуються такі умови:

6. $l = n$.

7. $\det M \neq 0$ і $\|M^{-1}R\| < 1$.

Тоді, враховуючи діагональність матриць $H_m(t, \varepsilon)$ і $\Omega_m(t, \varepsilon)$, згідно з умовами 4, 5 маємо

$$\left\| \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \Psi_m(t, \varepsilon) dt \right) \right\| \leq 1.$$

Отже, матриця

$$M + R \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \Psi_m(t, \varepsilon) dt \right), \quad \varepsilon \in (0; \varepsilon_0],$$

не особлива і

$$\begin{aligned} a(\varepsilon) &= \left(MQ_m(0, \varepsilon) + NQ_m(T, \varepsilon) \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T H_m^{-1}(t, \varepsilon) \Omega_m(t, \varepsilon) dt \right) \right)^{-1} \\ &\quad \times (d(\varepsilon) - MQ_m(0, \varepsilon)u_m(0, \varepsilon) - NQ_m(T, \varepsilon)u_m(T, \varepsilon)). \end{aligned}$$

Побудований асимптотичний розв'язок допоміжної задачі (13), (11) використаємо для доведення існування та єдиності розв'язку крайової задачі (10), (11). Для цього у системі (10) покладемо

$$y = y_m(t, \varepsilon) + z, \quad (18)$$

де $z = z(t, \varepsilon)$ — нова невідома вектор-функція. Маємо

$$\varepsilon(H_m(t, \varepsilon) + \varepsilon^{m+1}\tilde{H}(t, \varepsilon))\frac{dz}{dt} = (\Omega_m(t, \varepsilon) + \varepsilon^{m+1}\tilde{\Omega}(t, \varepsilon))z + \varepsilon^{m+1}\tilde{q}(t, \varepsilon), \quad (19)$$

де $\tilde{q}(t, \varepsilon) = O(1)$, $t \in [0; T]$, $\varepsilon \rightarrow 0+$.

Крайова умова (11) при цьому набуде вигляду

$$MQ_m(0, \varepsilon)z(0, \varepsilon) + NQ_m(T, \varepsilon)z(T, \varepsilon) = \varepsilon^{m+1}\tilde{d}(\varepsilon), \quad (20)$$

де $\tilde{d}(\varepsilon) = O(1)$, $\varepsilon \rightarrow 0+$.

Згідно з [27] фундаментальна матриця відповідної однорідної системи

$$\varepsilon(H_m(t, \varepsilon) + \varepsilon^{m+1}\tilde{H}(t, \varepsilon))\frac{dz}{dt} = (\Omega_m(t, \varepsilon) + \varepsilon^{m+1}\tilde{\Omega}(t, \varepsilon))z \quad (21)$$

має вигляд

$$Z(t, \varepsilon) = (U_m(t, \varepsilon) + \varepsilon^{m-k}\tilde{U}(t, \varepsilon)) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t W(t, \varepsilon) dt\right),$$

де $U_m(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^m \varepsilon^s U_s(t)$, $U_m(t, \varepsilon)$, $\tilde{U}(t, \varepsilon) = O(1)$, $t \in [0; T]$, $\varepsilon \rightarrow 0+$, причому $U_s(t) \equiv E$, $t \in [0; T]$, $s = \overline{0, m-2k+1}$, а $W(t, \varepsilon)$ — така діагональна матриця, що

$$W(t, \varepsilon) = H_m^{-1}(t, \varepsilon)\Omega_m(t, \varepsilon) + \varepsilon^{m-2k+1}\tilde{W}(t, \varepsilon),$$

$\tilde{W}(t, \varepsilon) = O(1)$, $i = \overline{1, n}$, $t \in [0; T]$, $\varepsilon \rightarrow 0+$.

Загальний розв'язок системи (19) шукатимемо у вигляді

$$z(t, \varepsilon) = Z(t, \varepsilon)b(\varepsilon) + \varepsilon^m \int_0^t Z(t, \varepsilon)Z^{-1}(\tau, \varepsilon)H^{-1}(\tau, \varepsilon)\tilde{q}(\tau, \varepsilon)d\tau,$$

визначаючи вектор $b(\varepsilon)$ так, щоб виконувалася крайова умова (20), тобто

$$\begin{aligned} & (MQ_m(0, \varepsilon)Z(0, \varepsilon) + NQ_m(T, \varepsilon)Z(T, \varepsilon))b(\varepsilon) \\ &= \varepsilon^{m+1}\tilde{d}(\varepsilon) - \varepsilon^m NQ_m(T, \varepsilon) \int_0^T Z(T, \varepsilon)Z^{-1}(\tau, \varepsilon)H^{-1}(\tau, \varepsilon)\tilde{q}(\tau, \varepsilon)d\tau, \end{aligned}$$

або

$$\begin{pmatrix} MQ_m(0, \varepsilon)(U_m(0, \varepsilon) + \varepsilon^{m-k+1}\tilde{U}(0, \varepsilon)) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& + NQ_m(T, \varepsilon)(U_m(T, \varepsilon) + \varepsilon^{m-k}\tilde{U}(T, \varepsilon)) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T W(t, \varepsilon) d\tau\right) b(\varepsilon) \\
& = \varepsilon^{m+1}\tilde{d}(\varepsilon) - \varepsilon^m NQ_m(T, \varepsilon) \int_0^T Z(T, \varepsilon)Z^{-1}(\tau, \varepsilon)H^{-1}(\tau, \varepsilon)\tilde{q}(\tau, \varepsilon)d\tau.
\end{aligned} \tag{22}$$

Визначник системи (22), як і системи (16), для достатньо малих ε і достатньо великих m відмінний від нуля. Тому з умов 6, 7 випливає сумісність системи (22) щодо $b(\varepsilon)$. При цьому $b(\varepsilon) = O(\varepsilon^{m-k})$, $\varepsilon \rightarrow 0+$.

Таким чином, крайова задача (19), (20) має єдиний розв'язок $z = z(t, \varepsilon)$ і $z(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{m-k})$, $t \in [0; T]$, $\varepsilon \rightarrow 0+$.

Теорема 1. Нехай $A(t, \varepsilon), B(t, \varepsilon), f(t, \varepsilon) \in C^{m+1}(G)$, де

$$G = \{(t, \varepsilon) \in R^2 : 0 \leq t \leq T, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\},$$

$d(\varepsilon) \in C^{m+1}[0; \varepsilon_0]$ і виконуються умови 3–7. Тоді для достатньо малих ε , $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, і достатньо великого m , $m > 2k - 1$, існує єдиний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$ крайової задачі (5), (6), причому

$$\|x(t, \varepsilon) - x_m(t, \varepsilon)\| = O(\varepsilon^{m-k}), \quad t \in [0; T], \quad \varepsilon \rightarrow 0+. \tag{23}$$

Зауваження. Якщо $B(t, \varepsilon) = E$, то, використовуючи розроблений алгоритм, можна побудувати асимптотичні розв'язки крайової задачі

$$\begin{aligned}
\varepsilon \frac{dx}{dt} &= A(t, \varepsilon)x + f(t, \varepsilon), \quad t \in [0; T], \\
Mx(0, \varepsilon) + Nx(T, \varepsilon) &= d(\varepsilon)
\end{aligned}$$

у випадку, коли дійсні частини власних значень матриці $A_0(t)$ можуть бути не додатні.

2.2. Вироджений випадок. Як зазначалося раніше, за умови 5 має місце не вироджений випадок. Тому у цьому пункті припускаємо виконання такої умови.

8. Нехай $h(t, \varepsilon) \equiv 0$, $t \in [0; T]$, $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$.

Як і в не виродженому випадку, крайова задача (5), (6) зводиться до задачі (10), (11). При цьому фундаментальна матриця системи (12) є прямокутною

$$Y_m(t, \varepsilon) = K \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t H_{m1}^{-1}(t, \varepsilon)\Omega_{m1}(t, \varepsilon)dt\right),$$

де $K = \text{colon}(e_2, e_3, \dots, e_n)$, e_i , $i = \overline{2, n}$, — n -вимірний вектор, у якого i -та координата дорівнює 1, решта дорівнюють нулю, $H_m(t, \varepsilon) = \text{diag}\{0, H_{m1}(t, \varepsilon)\}$, $\Omega_m(t, \varepsilon) = \text{diag}\{\omega_m(t, \varepsilon), \Omega_{m1}(t, \varepsilon)\}$.

Асимптотичний розв'язок допоміжної крайової задачі (13), (11) шукаємо у вигляді (15).

9. Нехай $l = n - 1$.

У цьому випадку визначник (17) за аналогічних припущень щодо власних значень в'язки $A_0(t) - \lambda B_0(t)$ набуде вигляду

$$\det \left(MK + R \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \Psi_m(t, \varepsilon) dt \right) \right), \quad (24)$$

де, як і раніше, перші $r + 1$ стовпців матриці R є нульовими, решта стовпців є стовпцями матриці N ,

$$\Psi_m(t, \varepsilon) = \text{diag} \{0, \dots, 0, \psi_{r+1}(t, \varepsilon), \dots, \psi_n(t, \varepsilon)\},$$

$\psi_i(t, \varepsilon)$, $i = \overline{r+1, n-1}$, — відповідні діагональні елементи матриці $H_{m1}^{-1}(t, \varepsilon)\Omega_{m1}(t, \varepsilon)$.

10. Припустимо, що $\det MK \neq 0$ і $\|(MK)^{-1}R\| < 1$.

Тоді система (16) сумісна і

$$a(\varepsilon) = \left(MQ_m(0, \varepsilon)K + NQ_m(T, \varepsilon)K \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \Psi_m(t, \varepsilon) dt \right) \right)^{-1} \\ \times (d(\varepsilon) - MQ_m(0, \varepsilon)u_m(0, \varepsilon) - NQ_m(T, \varepsilon)u_m(T, \varepsilon)).$$

Доведемо існування та єдиність розв'язку крайової задачі (10), (11). Для цього скористаємося побудованим асимптотичним розв'язком (15) допоміжної задачі (11), (13).

Використовуючи заміну (18), від системи (10) перейдемо до системи (19). У цьому випадку фундаментальна матриця відповідної однорідної системи (21) має вигляд

$$Z(t, \varepsilon) = (U_m(t, \varepsilon) + \varepsilon^{m-k}\tilde{U}(t, \varepsilon)) \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t W(t, \varepsilon) dt \right),$$

де $U_m(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^m \varepsilon^s U_s(t)$ — прямокутна матриця розмірів $n \times (n-1)$, $U_m(t, \varepsilon)$, $\tilde{U}(t, \varepsilon) = O(1)$, $t \in [0; T]$, $\varepsilon \rightarrow 0+$, причому $U_s(t) \equiv K$, $t \in [0; T]$, $s = \overline{0, m-2k+1}$, а $W(t, \varepsilon)$ — така діагональна матриця, що

$$W(t, \varepsilon) = H_{m1}^{-1}(t, \varepsilon)\Omega_{m1}(t, \varepsilon) + \varepsilon^{m-2k+1}\tilde{W}(t, \varepsilon),$$

$\tilde{W}(t, \varepsilon) = O(1)$, $i = \overline{1, n}$, $t \in [0; T]$, $\varepsilon \rightarrow 0+$.

Аналогічно, матриця

$$\hat{Z}(t, \varepsilon) = (V_m(t, \varepsilon) + \varepsilon^{m-k}\tilde{V}(t, \varepsilon)) \exp \left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t W^*(t, \varepsilon) dt \right)$$

є фундаментальною матрицею системи, спряженої до (21):

$$\varepsilon \frac{d}{dt} ((H_m(t, \varepsilon) + \varepsilon^{m+1}\tilde{H}(t, \varepsilon))^* z) = -(\Omega_m(t, \varepsilon) + \varepsilon^{m+1}\tilde{\Omega}(t, \varepsilon))^* z.$$

Тут структура прямокутної матриці $V_m(t, \varepsilon)$ така ж, як і структура $U_m(t, \varepsilon)$, а $W^*(t, \varepsilon)$ — матриця, спряжена до $W(t, \varepsilon)$.

Позначимо через $\varphi(t, \varepsilon)$ і $\psi(t, \varepsilon)$ власні вектори відповідно матриць $H(t, \varepsilon)$ і $H^*(t, \varepsilon)$, які відповідають нульовим власним значенням цих матриць.

Тоді загальний розв'язок системи (19) матиме вигляд [27]

$$\begin{aligned} z(t, \varepsilon) = & Z(t, \varepsilon)b(\varepsilon) + \varepsilon^m \int_0^t Z(t, \varepsilon) \widehat{Z}^*(\tau, \varepsilon) \widetilde{q}(\tau, \varepsilon) d\tau \\ & - \varepsilon^m \varphi(t, \varepsilon) (\psi^*(t, \varepsilon) (\Omega(t, \varepsilon) \varphi(t, \varepsilon) - \varepsilon H(t, \varepsilon) \varphi'(t, \varepsilon)))^{-1} \psi^*(t, \varepsilon) \widetilde{q}(t, \varepsilon). \end{aligned}$$

Як і раніше, визначимо вектор довільних сталих $b(\varepsilon)$ так, щоб виконувалася крайова умова (20)

$$\begin{aligned} & (MQ_m(0, \varepsilon)Z(0, \varepsilon) + NQ_m(T, \varepsilon)Z(T, \varepsilon))b(\varepsilon) \\ & = \varepsilon^{m+1} \widetilde{d}(\varepsilon) - \varepsilon^m NQ_m(T, \varepsilon) \int_0^T Z(T, \varepsilon) \widehat{Z}^*(\tau, \varepsilon) \widetilde{q}(\tau, \varepsilon) d\tau \\ & + \varepsilon^m (MQ_m(0, \varepsilon)c(0, \varepsilon) + NQ_m(T, \varepsilon)c(T, \varepsilon)), \end{aligned}$$

де

$$c(t, \varepsilon) = \varphi(t, \varepsilon) (\psi^*(t, \varepsilon) (\Omega(t, \varepsilon) \varphi(t, \varepsilon) - \varepsilon H(t, \varepsilon) \varphi'(t, \varepsilon)))^{-1} \psi^*(t, \varepsilon) \widetilde{q}(t, \varepsilon).$$

Записуючи останню систему у вигляді

$$\begin{aligned} & \left(MQ_m(0, \varepsilon)(U_m(0, \varepsilon) + \varepsilon^{m-k} \widetilde{U}(0, \varepsilon)) \right. \\ & \quad \left. + NQ_m(T, \varepsilon)(U_m(T, \varepsilon) + \varepsilon^{m-k} \widetilde{U}(T, \varepsilon)) \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T W(t, \varepsilon) dt \right) \right) b(\varepsilon) \\ & = \varepsilon^{m+1} \widetilde{d}(\varepsilon) - \varepsilon^m NQ_m(T, \varepsilon) \int_0^T Z(T, \varepsilon) \widehat{Z}^*(\tau, \varepsilon) \widetilde{q}(\tau, \varepsilon) d\tau \\ & \quad + \varepsilon^m (MQ_m(0, \varepsilon)c(0, \varepsilon) + NQ_m(T, \varepsilon)c(T, \varepsilon)), \end{aligned} \tag{25}$$

переконаємося, що визначник системи (25) для достатньо малих ε і достатньо великих m відмінний від нуля. Тому з умов 9, 10 випливає сумісність системи (25) щодо $b(\varepsilon)$. Як і раніше, $b(\varepsilon) = O(\varepsilon^{m-k})$, $\varepsilon \rightarrow 0+$.

Теорема 2. Нехай $A(t, \varepsilon), B(t, \varepsilon), f(t, \varepsilon) \in C^{m+1}(G)$, $d(\varepsilon) \in C^{m+1}[0; \varepsilon_0]$ і виконуються умови 3, 4, 8–10. Тоді для достатньо малих ε , $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, і достатньо великого m , $m > 2k - 1$, існує єдиний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$ крайової задачі (5), (6), причому

$$\|x(t, \varepsilon) - x_m(t, \varepsilon)\| = O(\varepsilon^{m-k}), \quad t \in [0; T], \quad \varepsilon \rightarrow 0+. \tag{26}$$

3. Існування перетворюючих матриць. Доведемо, що за умов 1–4 існують такі неособливі достатньо гладкі матриці $P(t, \varepsilon)$, $Q(t, \varepsilon)$, що виконуються рівності (8), (9). Для цього вкажемо алгоритм визначення коефіцієнтів розвинень

$$P(t, \varepsilon) = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k P_k(t), \quad Q(t, \varepsilon) = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k Q_k(t). \quad (27)$$

Підставимо розвинення (27) до системи (8), (9) і порівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε :

$$P_0(t)A_0(t)Q_0(t) = \Omega_0(t), \quad (28)$$

$$P_0(t)B_0(t)Q_0(t) = H_0(t), \quad (29)$$

$$P_k(t)A_0(t) + A_0(t)Q_k(t) = \Omega_k(t) + F_k(t), \quad (30)$$

$$P_k(t)B_0(t) + B_0(t)Q_k(t) = H_k(t) + G_k(t), \quad k \in N, \quad (31)$$

де

$$\begin{aligned} F_k(t) &= \sum_{s=0}^k \sum_{i=0}^{k-s} P_s(t)B_i(t)Q'_{k-s-i-1}(t) \\ &\quad - \sum_{s=1}^{k-1} \sum_{i=0}^{k-s} P_s(t)A_i(t)Q_{k-s-i}(t) - \sum_{i=1}^k A_i(t)Q_{k-i}(t), \\ G_k(t) &= - \sum_{s=1}^{k-1} \sum_{i=0}^{k-s} P_s(t)B_i(t)Q_{k-s-i}(t) - \sum_{i=1}^k B_i(t)Q_{k-i}(t), \end{aligned}$$

$$Q'_j(t) \equiv 0, \quad t \in [0; T], \quad j < 0.$$

Як і раніше, вважаємо, що $P_0(t) = Q_0(t) = E_n$. Тоді з системи (28), (29) одержуємо

$$\Omega_0(t) = A_0(t), \quad H_0(t) = B_0(t).$$

Нехай $\Omega_k(t)$ та $H_k(t)$ — діагональні матриці, діагональними елементами яких є діагональні елементи матриць $-F_k(t)$ і $-G_k(t)$ відповідно.

Покладемо

$$\begin{aligned} P_k(t) &= \begin{pmatrix} 0 & p_{12}^{(k)}(t) & \dots & p_{1n}^{(k)}(t) \\ p_{21}^{(k)}(t) & 0 & \dots & p_{2n}^{(k)}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1}^{(k)}(t) & p_{n2}^{(k)}(t) & \dots & 0 \end{pmatrix}, \\ Q_k(t) &= \begin{pmatrix} 0 & q_{12}^{(k)}(t) & \dots & q_{1n}^{(k)}(t) \\ q_{21}^{(k)}(t) & 0 & \dots & q_{2n}^{(k)}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n1}^{(k)}(t) & q_{n2}^{(k)}(t) & \dots & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Оскільки модуль Якобіана системи (30), (31)

$$\prod_{\substack{i,j=1,n-1 \\ i \neq j}} |\lambda_i(t) - \lambda_j(t)| \neq 0, \quad t \in [0; T],$$

то система (30), (31) щодо $P_k(t)$, $Q_k(t)$ має єдиний розв'язок.

Використовуючи метод математичної індукції, можна довести сумісність системи (30), (31) для будь-якого $k \in N$.

Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів. Усі необхідні дані містяться в статті. Всі автори зробили рівномірний внесок у цю роботу. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Література

1. G. D. Birkhoff, *On the asymptotic character of the certain linear differential equations containing a parameter*, Trans. Amer. Math. Soc., **9**, № 2, 219–231 (1908).
2. J. Tamarkin, *Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansion of an arbitrary function in series of fundamental functions*, Math. Z., **27**, № 1, 1–54 (1928).
3. P. Noaillon, *Developpements asymptotiques dans les equations differentielles lineaires a parametre variable*, Mem. Soc. Sci. Liege, III ser., tome 9 (1912).
4. H. L. Turrittin, *Asymptotic expansions of solutions of systems of ordinary linear differential equations containing a parameter*, Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, **2**, 81–116 (1952).
5. W. Wasow, *On the asymptotic solution of boundary value problems for ordinary differential equations containing a parameter*, J. Math. Phys., **23**, 173–183 (1944).
6. G. A. Bliss, *A boundary value problem for a system of ordinary linear differential equations of the first order*, Trans. Amer. Math. Soc., **28**, № 4, 561–584 (1926).
7. W. A. Harris, *Singular perturbations of two-point boundary problems for systems of ordinary differential equations*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, **5**, № 1, 212–225 (1960).
8. W. A. Harris, *Singular perturbations of two point boundary problems*, J. Math. Mech., **11**, № 11, 371–382 (1962).
9. K. W. Chang, *Singular perturbations of a general boundary value problem*, SIAM J. Math. Anal., **3**, № 3, 520–526 (1972).
10. Y. A. Konyaev, *On a method of studying multipoint boundary value problems*, Sib. Math. J., **33**, № 6, 1020–1027 (1992).
11. M. I. Visik, L. A. Lytjsternik, *Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with small parameter*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **20**, 239–364 (1962).
12. M. Van Dyke, *Perturbation methods in fluid mechanics*, annotated ed., Parabolic Press, Stanford (1975).
13. S. Kaplun, P. A. Lagerstrom, *Asymptotic expansions of Navier–Stokes solutions for small Reynolds numbers*, J. Math. Mech., **6**, № 5, 585–593 (1957).
14. A. B. Vasil'eva, *Asymptotic behaviour of solutions to certain problems involving non-linear differential equations containing a small parameter multiplying the highest derivatives*, Russian Math. Surveys, **18**, № 3, 13 (1963).
15. R. E. O'Malley, *Two-parameter singular perturbation problems for second-order equations*, J. Math. Mech., **16**, № 10, 1143–1164 (1967).
16. R. E. O'Malley, *A singular singularly-perturbed linear boundary value problem*, SIAM J. Math. Anal., **10**, № 4, 695–708 (1979).
17. A. B. Vasil'eva, V. F. Butuzov, L. V. Kalachev, *The boundary function method for singular perturbation problems*, SIAM, Philadelphia (1995); <https://doi.org/10.1137/1.9781611970784>.
18. A. B. Vasil'eva, V. F. Butuzov, N. N. Nefedov, *Singularly perturbed problems with boundary and internal layers*, Proc. Steklov Inst. Math., **268**, 258–273 (2010).

19. S. A. Lomov, *Introduction to the general theory of singular perturbations*, Transl. Math. Monogr., **112** (1992).
20. A. M. Samoilenko, A. A. Boichuk, L. I. Karandzhulov, *Fredholm boundary value problems with a singular perturbation*, Differ. Equat., **37**, 1243–1251 (2001).
21. L. I. Karandzhulov, *Critical case for singularly perturbed linear boundary-value problems of ordinary differential equations*, Miskolc Math. Notes, **7**, № 1, 27–42 (2006).
22. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators: and Fredholm boundary-value problems*, Walter de Gruyter GmbH & Co KG (2016).
23. І. І. Старун, *Крайові задачі для лінійних систем*, Нелін. коливання, **5**, № 4, 540–548 (2002).
24. В. П. Яковець, М. Б. Віра, *Про побудову асимптотичних розв'язків двоточкових крайових задач для вироджених сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь*, Нелін. коливання, **13**, № 2, 272–286 (2010).
25. М. Б. Віра, *Асимптотика розв'язків крайових задач для лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь у випадку кратного спектра граничної матриці*, Нелін. коливання, **21**, № 4, 444–456 (2018).
26. С. П. Пафик, *Асимптотичне розв'язання двоточнової крайової задачі для лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь у некритичному та критичному стійких випадках*, Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка, **1**, № 40, 19–25 (2019).
27. А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець, *Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями*, Вища школа, Київ (2000).

Одержано 31.01.24,
після доопрацювання — 15.02.24