

АВТОНОМНА КРАЙОВА ЗАДАЧА, НЕ РОЗВ'ЯЗАНА ЩОДО ПОХІДНОЇ

Сергій Чуйко, Олена Чуйко

*Інститут динаміки складних технічних систем імені Макса Планка
Магдебург, Німеччина*

*Донбаський державний педагогічний університет
вул. Генерала Батюка, 19, Слов'янськ, 84 112, Україна
e-mail: chujko-slav@ukr.net, відповідальний за листування,
chuiko@mpi-magdeburg.mpg.de*

Дар'я Д'яченко

*Донбаський державний педагогічний університет
вул. Генерала Батюка, 19, Слов'янськ, 84 112, Україна
e-mail: dyachenkodaria2016@gmail.com*

We find constructive necessary and sufficient conditions for solvability and a scheme for construction of solutions of a nonlinear autonomous boundary-value problem unsolvable with respect to the derivative. Convergent iterative schemes for finding approximations to solutions of a nonlinear autonomous boundary-value problem unsolvable with respect to the derivative are constructed. As examples of the application of the constructed iterative scheme, we obtain approximations to the solutions of periodic boundary-value problems for Lienard-type equations unsolvable with respect to the derivative.

Знайдено конструктивні необхідні й достатні умови розв'язності та одержано схему побудови розв'язків автономної нелінійної крайової задачі, не розв'язаної щодо похідної. Побудовано збіжні ітераційні схеми для знаходження наближень до розв'язків нелінійної автономної крайової задачі, не розв'язаної щодо похідної. Як приклади застосування побудованої ітераційної схеми здобуто наближення до розв'язків періодичних крайових задач для рівнянь типу Льєнара, не розв'язаного щодо похідної.

1. Постановка задачі. Дослідимо побудову розв'язків

$$z(t, \varepsilon) : z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b(\varepsilon)], \quad b(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0], \quad z(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

автономної нетерової ($m \neq n$) крайової задачі [1–4]

$$z' = Az + f + \varepsilon Z(z, z', \varepsilon), \quad \ell z(\cdot, \varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot, \varepsilon), z'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon). \quad (1)$$

Розв'язки крайової задачі (1) шукатимемо в околі розв'язку

$$z_0(t) \in \mathbb{C}^1[a, b^*], \quad b^* := b(0)$$

породжувальної задачі

$$z'_0 = Az_0 + f, \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha \in \mathbb{R}^m$$

та його похідної. Тут $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $f \in \mathbb{R}^n$, $Z(z, z', \varepsilon)$ — нелінійна вектор-функція, неперервно диференційовна за невідомою z у малому околі розв'язку $z_0(t)$ породжувальної задачі та його похідної, а також неперервно диференційовна за малим параметром ε на відрізку $[0, \varepsilon_0]$; $\ell z(\cdot, \varepsilon)$ — лінійний і $J(z(\cdot, \varepsilon), z'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ — нелінійний векторні функціонали

$$\ell z(\cdot, \varepsilon), \quad J(z(\cdot, \varepsilon), z'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) : \mathbb{C}[a, b(\varepsilon)] \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

причому другий функціонал неперервно диференційовний за невідомими z , z' і малим параметром ε у малому околі розв'язку породжувальної задачі та на відрізку $[0, \varepsilon_0]$. У критичному випадку ($P_{Q^*} \neq 0$), за умови

$$P_{Q^*}\{\alpha - \ell K[f](\cdot)\} = 0, \quad (2)$$

породжувальна задача має сім'ю розв'язків [1, 3, 5, 6]

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f; \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Тут $Q := \ell X(\cdot) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ — стала матриця,

$$\text{rank } Q := n_1, \quad r := n - n_1,$$

$P_{Q^*} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ — ортопроектор:

$$P_{Q^*} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{N}(Q^*),$$

$X(t)$ — нормальна ($X(a) = I_n$) фундаментальна матриця однорідної частини породжувальної системи, $X_r(t) := X(t)P_{Q_r}$, матрицю P_{Q_r} утворено з r лінійно незалежних стовпців ортопроектора

$$P_Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}(Q),$$

крім того,

$$G[f; \alpha](t) := X(t)Q^+[\alpha - \ell K[f](\cdot)] + K[f](t)$$

— узагальнений оператор Гріна породжувальної задачі, Q^+ — псевдообернена матриця за Муром – Пенроузом, $K[f](t)$ — оператор Гріна задачі Коші породжувальної системи. Поставлена задача продовжує дослідження нелінійних автономних крайових задач [4, 5, 7–9], а також нелінійних крайових задач, не розв'язаних щодо похідної [10–12].

2. Необхідні й достатні умови існування розв'язків. У критичному випадку $P_{Q^*} \neq 0$ правий кінець $b(\varepsilon)$ проміжку $[a, b(\varepsilon)]$ невідомий [2, 3, 5–8]. Заміна

$$t = a + (\tau - a)(1 + \varepsilon \beta(\varepsilon)), \quad b(\varepsilon) := b^* + \varepsilon(b^* - a)\beta(\varepsilon), \quad \beta(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0], \quad \beta(0) := \beta^*$$

приводить крайову задачу (1) до вигляду

$$z' = Az + f + \varepsilon \tilde{Z}(z, z', \beta, \varepsilon), \quad \ell z(\cdot, \varepsilon) = \varepsilon \tilde{J}(z(\cdot, \varepsilon), z'(\cdot, \varepsilon), \beta, \varepsilon), \quad (3)$$

де

$$\tilde{Z}(z, z', \beta(\varepsilon), \varepsilon) := \beta(\varepsilon)A(z + f) + (1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))Z\left(z, \frac{z'}{(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))}, \beta(\varepsilon), \varepsilon\right),$$

до того ж, $\check{J}(z(\cdot, \varepsilon), z'(\cdot, \varepsilon), \beta, \varepsilon)$ — нелінійний векторний функціонал:

$$\check{J}(z(\cdot, \varepsilon), z'(\cdot, \varepsilon), \beta, \varepsilon) : \mathbb{C}[a, b^*] \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Необхідні й достатні умови існування розв'язків слабко нелінійної крайової задачі (3) визначає рівність

$$P_{Q^*} \{ \check{J}(z(\cdot, \varepsilon), z'(\cdot, \varepsilon), \beta, \varepsilon) - \ell K [\check{Z}(z(s, \varepsilon), z'(s, \varepsilon), \beta, \varepsilon)](\cdot) \} = 0.$$

Таким чином, отримуємо необхідні умови існування розв'язків слабко нелінійної крайової задачі (1).

Лема. У критичному випадку ($P_{Q^*} \neq 0$) породжувальна крайова задача розв'язна тоді й лише тоді, коли виконується умова (2). За цієї умови породжувальна задача має сім'ю розв'язків

$$z_0(\tau, c_r) = X_r(\tau)c_r + G[f; \alpha](\tau), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Якщо при цьому крайова задача (1) має розв'язок $z(t, \varepsilon)$, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на породжувальний $z_0(\tau, c_r^*)$, то вектор

$$c_0^* := \text{col}(c_r^*, \beta^*) \in \mathbb{R}^{r+1}, \quad c_r^* \in \mathbb{R}^r,$$

задовольняє рівняння

$$F(c_0^*) := P_{Q^*} \{ \check{J}(z_0(\cdot, c_r^*), z'_0(\cdot, c_r^*), \beta^*, 0); -\ell K [\check{Z}(z(s, c_r^*), z'(s, c_r^*), \beta^*, 0)](\cdot) \} = 0. \quad (4)$$

Рівняння (4) будемо далі називати рівнянням для породжувальних констант слабко нелінійної крайової задачі (1). Припустимо, що рівняння для породжувальних констант (4) має дійсні корені. Фіксуємо один із коренів c_0^* рівняння (4), приходимо до задачі про знаходження розв'язків

$$z(\tau, \varepsilon) = z_0(\tau, c_0^*) + x(\tau, \varepsilon)$$

в околі породжувального розв'язку

$$z_0(\tau, c_r^*) = X_r(\tau)c_r^* + G[f(s); \alpha](\tau), \quad c_r^* \in \mathbb{R}^r.$$

Для знаходження відхилення

$$x(\tau, \varepsilon) : x(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b^*], \quad x(\tau, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

від породжувального розв'язку $z_0(\tau, c_r^*)$ отримуємо крайову задачу

$$x'(\tau, \varepsilon) = A x(\tau, \varepsilon) + \varepsilon \check{Z}(z_0(\tau, c_r^*) + x(\tau, \varepsilon), z'_0(\tau, c_r^*) + x'(\tau, \varepsilon), \varepsilon), \quad (5)$$

$$\ell x(\cdot, \varepsilon) = \varepsilon \check{J}(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), z'_0(\cdot, c_r^*) + x'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon). \quad (6)$$

Відхилення від породжувального розв'язку $z_0(\tau, c_r^*)$ має вигляд

$$x(\tau, \varepsilon) = X_r(t)c_r(\varepsilon) + x^{(1)}(\tau, \varepsilon), \quad c_r(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0],$$

де

$$x^{(1)}(\tau, \varepsilon) := \varepsilon G \left[\check{Z}(z_0(s, c_r^*) + x(t, \varepsilon), z'_0(s, c_r^*) + x'(s, \varepsilon), \beta^* + \gamma, \varepsilon), \right.$$

$$\check{J}(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), z'_0(\cdot, c_r^*) + x'(\cdot, \varepsilon), \beta^* + \gamma, \varepsilon) \Big| (\tau).$$

У малому околі породжувального розв'язку $z_0(t, c_r^*)$ має місце розвинення

$$\begin{aligned} & \check{Z}(z_0(\tau, c_r^*) + x(\tau, \varepsilon), z'_0(\tau, c_r^*) + x'(\tau, \varepsilon), \beta^* + \gamma, \varepsilon) \\ &= \check{Z}(z_0(\tau, c_r^*), z'_0(\tau, c_r^*), 0) + A_1(\tau)x(\tau, \varepsilon) + A_2(\tau)x'(\tau, \varepsilon) + \varepsilon A_3(\tau) \\ & \quad + A_\beta(\tau, \beta^*)\gamma + R_1(z_0(\tau, c_r^*) + x(\tau, \varepsilon), z'_0(\tau, c_r^*) + x'(\tau, \varepsilon), \beta^* + \gamma, \varepsilon), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} A_1(\tau) &:= \frac{\partial \check{Z}(z, z', \beta, \varepsilon)}{\partial z} \Big|_{\substack{z=z_0(\tau, c_r^*), \\ z'=z'_0(\tau, c_r^*), \\ \beta=\beta^*, \\ \varepsilon=0}}, & A_2(\tau) &:= \frac{\partial \check{Z}(z, z', \beta, \varepsilon)}{\partial z'} \Big|_{\substack{z=z_0(\tau, c_r^*), \\ z'=z'_0(\tau, c_r^*), \\ \beta=\beta^*, \\ \varepsilon=0}}, \\ A_\beta(\tau, \beta^*) &:= \frac{\partial \check{Z}(z, z', \beta, \varepsilon)}{\partial \beta} \Big|_{\substack{z=z_0(\tau, c_r^*), \\ z'=z'_0(\tau, c_r^*), \\ \beta=\beta^*, \\ \varepsilon=0}}, & A_3(\tau) &:= \frac{\partial \check{Z}(z, z', \beta, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\substack{z=z_0(\tau, c_r^*), \\ z'=z'_0(\tau, c_r^*), \\ \beta=\beta^*, \\ \varepsilon=0}}. \end{aligned}$$

Залишок

$$R_1(z_0(\tau, c_r^*) + x(\tau, \varepsilon), z'_0(\tau, c_r^*) + x'(\tau, \varepsilon), \beta^* + \gamma, \varepsilon)$$

більш високого порядку малості по x , x' , γ та ε в околі точок $x = 0$, $x' = 0$, $\gamma = 0$ та $\varepsilon = 0$, ніж перші чотири члени розвинення, тому

$$\begin{aligned} R_1(z, z', \beta, \varepsilon) \Big|_{\substack{z=z_0(\tau, c_r^*), \\ z'=z'_0(\tau, c_r^*), \\ \beta=\beta^*, \\ \varepsilon=0}} &\equiv 0, & \frac{\partial R_1(z, z', \beta, \varepsilon)}{\partial z} \Big|_{\substack{z=z_0(\tau, c_r^*), \\ z'=z'_0(\tau, c_r^*), \\ \beta=\beta^*, \\ \varepsilon=0}} &\equiv 0, \\ \frac{\partial R_1(z, z', \beta, \varepsilon)}{\partial z'} \Big|_{\substack{z=z_0(\tau, c_r^*), \\ z'=z'_0(\tau, c_r^*), \\ \beta=\beta^*, \\ \varepsilon=0}} &\equiv 0, & \frac{\partial R_1(z, z', \beta, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\substack{z=z_0(\tau, c_r^*), \\ z'=z'_0(\tau, c_r^*), \\ \beta=\beta^*, \\ \varepsilon=0}} &\equiv 0, \\ \frac{\partial R_1(z, z', \beta, \varepsilon)}{\partial \beta} \Big|_{\substack{z=z_0(\tau, c_r^*), \\ z'=z'_0(\tau, c_r^*), \\ \beta=\beta^*, \\ \varepsilon=0}} &\equiv 0. \end{aligned}$$

У малому околі породжувального розв'язку $z_0(\tau, c_r^*)$ має місце також розвинення

$$\begin{aligned} & \check{J}(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), z'_0(\cdot, c_r^*) + x'(\cdot, \varepsilon), \beta^* + \gamma, \varepsilon) \\ &= \check{J}(z_0(\cdot, c_r^*), z'_0(\cdot, c_r^*), \beta^*, 0) + \ell_1 x(\cdot, \varepsilon) + \ell_2 x'(\cdot, \varepsilon) \\ & \quad + \varepsilon \ell_3(z_0(\cdot, c_r^*), \beta^*) + \gamma \ell_\beta(z_0(\cdot, c_r^*), \beta^*) J_1 \\ & \quad + \left(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), z'_0(\cdot, c_r^*) + x'(\cdot, \varepsilon), \beta^* + \gamma, \varepsilon \right). \end{aligned}$$

Тут $\ell_1 x(\cdot, \varepsilon)$, $\ell_2 x'(\cdot, \varepsilon)$, $\gamma \ell_\beta(z_0(\cdot, c_r^*), \beta^*)$ та $\varepsilon \ell_3(z_0(\cdot, c_r^*), \beta^*)$ — лінійні частини цього функціонала та член

$$\check{J}(z_0(\cdot, c_r^*), z'_0(\cdot, c_r^*), \beta^*, 0) = \check{J}(z(\cdot, 0), z'(\cdot, 0), \beta^*, 0)$$

нульового порядку по ε в околі точок $x = 0$, $x' = 0$, $\gamma = 0$ та $\varepsilon = 0$. Позначимо $(d \times (r+1))$ -вимірну матрицю

$$B_0 := P_{Q_d^*} \left\{ [\ell_1 X_r(\cdot) + \ell_2 X'_r(\cdot); \ell_\beta(z_0(\cdot, c_r^*), \beta^*)] - \ell K [A_1(s) X_r(s) + A_2(s) X'_r(s); A_\beta(s, \beta^*)](\cdot) \right\}$$

і вектор

$$\check{c}(\varepsilon) := \begin{pmatrix} c_r(\varepsilon) \\ \gamma(\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Необхідну й достатню умови існування розв'язків слабо нелінійної крайової задачі (3) визначає рівняння

$$B_0 \check{c}(\varepsilon) = -P_{Q^*} \left\{ \varepsilon \ell_3(z_0(\cdot, c_r^*), \beta^*) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), z'_0(\cdot, c_r^*) + x'(\cdot, \varepsilon), \beta^* + \gamma, \varepsilon) - \ell K [\varepsilon A_3(s) + R_1(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon), z'_0(s, c_r^*) + x'(s, \varepsilon), \beta^* + \gamma, \varepsilon)](\cdot) \right\} = 0,$$

розв'язне тоді й тільки тоді, коли

$$P_{B_0^*} P_{Q^*} \left\{ \varepsilon \ell_3(z_0(\cdot, c_r^*), \beta^*) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), z'_0(\cdot, c_r^*) + x'(\cdot, \varepsilon), \beta^* + \gamma, \varepsilon) - \ell K [\varepsilon A_3(s) + R_1(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon), z'_0(s, c_r^*) + x'(s, \varepsilon), \beta^* + \gamma, \varepsilon)](\cdot) \right\} = 0,$$

і, зокрема, розв'язне за умови

$$P_{B_0^*} P_{Q^*} = 0. \quad (7)$$

Тут $P_{B_0^*} \in \mathbb{R}^{d \times (r+1)}$ -вимірна матриця-ортопроектор [1, 13, 14]:

$$P_{B_0^*} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{N}(B_0^*).$$

Таким чином, за умови (7) для знаходження відхилення $x(\tau, \varepsilon)$ від породжувального розв'язку $z_0(\tau, c_r^*)$ отримуємо операторну систему

$$\begin{aligned} x(\tau, \varepsilon) &= X_r(\tau) c_r(\varepsilon) + x^{(1)}(\tau, \varepsilon), \\ x^{(1)}(\tau, \varepsilon) &= \varepsilon G \left[\check{Z}(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon), z'_0(s, c_r^*) + x'(s, \varepsilon), \beta^* + \gamma, \varepsilon), \right. \\ &\quad \left. \check{J}(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), z'_0(\cdot, c_r^*) + x'(\cdot, \varepsilon), \beta^* + \gamma, \varepsilon) \right](\tau), \\ \check{c}(\varepsilon) &= -B_0^+ P_{Q^*} \left\{ \varepsilon \ell_3(z_0(\cdot, c_r^*), \beta^*) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), z'_0(\cdot, c_r^*) + x'(\cdot, \varepsilon), \beta^* + \gamma, \varepsilon) - \right. \\ &\quad \left. - \ell K [\varepsilon A_3(s) + R_1(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon), z'_0(s, c_r^*) + x'(s, \varepsilon), \beta^* + \gamma, \varepsilon)](\cdot) \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Для побудови розв'язків операторних систем вигляду (8) традиційно [1, 13 – 15] застосовують ітераційну схему, яка відповідає методу простих ітерацій.

Таким чином, доведено таку теорему.

Теорема. У критичному випадку ($P_{Q^*} \neq 0$) породжувальна нетерова крайова задача за умови (2) має r -параметричну сім'ю розв'язків

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f; \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

За умови (7) для кожного з коренів рівняння (4) для породжувальних констант слабо нелінійної крайової задачі (1) у малому околі породжувального розв'язку $z_0(\tau, c_0^*)$ і константи β_0^* крайова задача (1) має принаймні один розв'язок. Послідовність наближень до розв'язку автономної нелінійної крайової задачі (1) визначає ітераційна схема

$$\begin{aligned} z_{k+1}(\tau, \varepsilon) &= z_0(\tau, c_0^*) + x_{k+1}(\tau, \varepsilon), \quad x_{k+1}(\tau, \varepsilon) = X_r(\tau)c_r(\varepsilon) + x_{k+1}^{(1)}(\tau, \varepsilon), \\ x_{k+1}^{(1)}(\tau, \varepsilon) &= \varepsilon G \left[\check{Z}(z_0(s, c_r^*) + x_k(s, \varepsilon), z_0'(s, c_r^*) + x_k'(s, \varepsilon), \beta^* + \gamma_k, \varepsilon); \right. \\ &\quad \left. \check{J}(z_0(\cdot, c_r^*) + x_k(\cdot, \varepsilon), z_0'(\cdot, c_r^*) + x_k'(\cdot, \varepsilon), \beta^* + \gamma_k, \varepsilon) \right](\tau), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \check{c}_{k+1}(\varepsilon) &= -B_0^+ P_{Q^*} \left\{ \varepsilon \ell_3(z_0(\cdot, c_r^*), \beta^*) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + X_r(\cdot)c_k(\varepsilon) \right. \\ &\quad \left. + x_{k+1}^{(1)}(\cdot, \varepsilon), z_0'(\cdot, c_r^*)X_r'(\cdot)c_k(\varepsilon) + (x_{k+1}^{(1)})'(\cdot, \varepsilon), \beta^* + \gamma_k, \varepsilon) \right. \\ &\quad \left. - \ell K \left[\varepsilon A_3(s) + R_1(z_0(s, c_r^*) + X_r(s)c_k(\varepsilon) + x_{k+1}^{(1)}(s, \varepsilon), \right. \right. \\ &\quad \left. \left. z_0'(s, c_r^*) + X_r'(s)c_k(\varepsilon) + (x_{k+1}^{(1)})'(s, \varepsilon), \beta^* + \gamma_k, \varepsilon) \right](\cdot) \right\}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Оцінку ε_* довжини проміжку ε^* значень малого параметра, на якому зберігається збіжність ітераційної схеми (9), побудованої за методом простих ітерацій, можна отримати аналогічно [1, 7, 15, 16].

3. Періодична задача для рівняння типу Льєнара, не розв'язаного щодо похідної. Досліджуємо далі задачу про знаходження $\mathcal{T}(\varepsilon)$ -періодичних аналітичних розв'язків рівняння типу Льєнара, не розв'язаного щодо похідної [17, с. 174]

$$y''(t, \varepsilon) + y(t, \varepsilon) = f + \varepsilon Y(y(t, \varepsilon), y'(t, \varepsilon), y''(t, \varepsilon), \varepsilon). \quad (10)$$

Періодичні розв'язки рівняння типу Льєнара (10) шукаємо у малому околі періодичного розв'язку $y_0(t) \in \mathbb{C}^2[0; 2\pi]$ породжувального рівняння

$$y_0''(t) + y_0(t) = f, \quad f \in \mathbb{R},$$

де $Y(y, y', y'', \varepsilon)$ — нелінійна функція, аналітична за невідомою y та її похідними y' , y'' у малому околі розв'язку породжувальної задачі та його похідних y_0' , y_0'' , а також аналітична за малим параметром ε на відрізку $[0, \varepsilon_0]$. Поставлена задача продовжує дослідження автономних нелінійних крайових задач [4, 5, 7 – 9], а також крайових задач, не розв'язаних щодо похідної [10, 12]. Період шуканого розв'язку

$$\mathcal{T}(\varepsilon) := 2\pi(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)), \quad \mathcal{T}(0) = 2\pi$$

рівняння типу Льєнара, не розв'язного щодо похідної (10), невідомий [4] і підлягає визначенню в процесі побудови розв'язку. Внаслідок очевидної рівності

$$\int_0^{2\pi} H(t) f dt = 0, \quad H(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

породжувальна задача для періодичної задачі для рівняння типу Льєнара (10) розв'язна для будь-якої сталої $f \in \mathbb{R}$ у вигляді

$$y_0(t, c_0) = c_{0a} \cos t + c_{0b} \sin t + g[f](t), \quad c_0 = \text{col}(c_{0a}, c_{0b}) \in \mathbb{R}^2,$$

де

$$g[f](t) := \int_0^t \sin(t-s) f ds$$

— оператор Гріна породжувальної 2π -періодичної задачі. Здійснюючи в рівнянні типу Льєнара (10) заміну незалежної змінної [4, 5, 8]

$$t = \tau(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)), \quad \beta(0) := \beta_0,$$

приходимо до задачі про знаходження 2π -періодичних розв'язків

$$y(\tau, \varepsilon) : y(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^2[0, 2\pi], \quad y(\tau, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

рівняння

$$y''(\tau, \varepsilon) + y(\tau, \varepsilon) = f + \varepsilon \mathcal{Y}(y(\tau, \varepsilon), y'(\tau, \varepsilon), y''(\tau, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon),$$

а також функції $\beta(\varepsilon)$, аналітичної на відрізку $[0, \varepsilon_0]$. За умови $1 + \varepsilon\beta(\varepsilon) \neq 0$ функція

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(y(\tau, \varepsilon), y'(\tau, \varepsilon), y''(\tau, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon) \\ := -(2 + \varepsilon\beta(\varepsilon))\beta(\varepsilon)(y(\tau, \varepsilon) + f) \\ + (1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))^2 Y\left(y(\tau, \varepsilon), \frac{y'(\tau, \varepsilon)}{(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))}, \frac{y''(\tau, \varepsilon)}{(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))^2}, \varepsilon\right) \end{aligned}$$

аналітична за невідомою $y(\tau, \varepsilon)$ та її похідними $y'(\tau, \varepsilon)$, $y''(\tau, \varepsilon)$ у малому околі розв'язку породжувальної задачі та його похідних $y'_0(\tau, c_0)$, $y''_0(\tau, c_0)$, аналітична за функцією $\beta(\varepsilon)$ у малому околі точки β_0 , а також аналітична за малим параметром ε на відрізку $[0, \varepsilon_0]$. Необхідна й достатня умова існування 2π -періодичних розв'язків рівняння (10)

$$\int_0^{2\pi} H(s) \mathcal{Y}(y(s, \varepsilon), y'(s, \varepsilon), y''(s, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon) ds = 0$$

приводить до рівняння для породжувальних амплітуд

$$\mathcal{F}(\check{c}_0) := \int_0^{2\pi} H(s) \mathcal{Y}(y_0(s, c_0), y'_0(s, c_0), y''_0(s, c_0), \beta_0, 0) ds = 0. \quad (11)$$

Таким чином, отримуємо необхідні умови існування періодичних розв'язків рівняння типу Льєнара (10), а саме, наслідок із доведеної леми.

Наслідок. Якщо $\mathcal{T}(\varepsilon)$ -періодична задача для рівняння типу Льєнара, не розв'язаного щодо похідної (10), має аналітичний розв'язок, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на породжувальний

$$y_0(t, c_0^*) = c_{0a}^* \cos t + c_{0b}^* \sin t + g[f](t),$$

то вектор $\check{c}_0$ задовольняє рівняння

$$\mathcal{F}(\check{c}_0) = 0, \quad \check{c}_0 = \text{col}(c_0^*, \beta_0^*) \in \mathbb{R}^3.$$

Припустимо, що рівняння для породжувальних амплітуд (11) має дійсні корені. Фіксуємо один із коренів $\check{c}_0 \in \mathbb{R}^3$ рівняння (11), приходимо до задачі про знаходження періодичних розв'язків рівняння типу Льєнара (10), не розв'язаного щодо похідної

$$y(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau, c_0^*) + x(\tau, \varepsilon)$$

в околі породжувального розв'язку

$$y_0(\tau, c_0^*) = c_{0a}^* \cos \tau + c_{0b}^* \sin \tau + g[f](\tau).$$

Позначимо (2×3) -вимірну матрицю

$$\mathcal{B}_0 = \left. \frac{\partial F(\check{c})}{\partial \check{c}} \right|_{\substack{c_0=c_0^* \\ \beta=\beta_0^*}}.$$

У випадку $P_{\mathcal{B}_0^*} P_{Q_d^*} = 0$ рівняння типу Льєнара (10) має принаймні один періодичний розв'язок, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на породжувальний $y_0(t, c_0^*)$. Цей критичний випадок названо критичним випадком першого порядку [1, 4, 5, 8]. Тут $P_{\mathcal{B}_0^*} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ -матриця-ортопроектор [1, 13, 14]:

$$P_{\mathcal{B}_0^*}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{B}_0^*).$$

Для знаходження періодичного розв'язку рівняння типу Льєнара (10) застосовний метод декомпозиції Адомяна [18, 19].

Приклад. Критичний випадок першого порядку має місце для задачі про знаходження періодичних розв'язків нелінійного автономного рівняння, не розв'язаного щодо похідної

$$y'' + y = 1 + \frac{\varepsilon y}{12} (1 + y - y''). \quad (12)$$

Дійсно, рівняння для породжувальних амплітуд (12) у випадку задачі про знаходження періодичного розв'язку рівняння (12) має простий корінь

$$c_{0a}^* = 1, \quad c_{0b}^* = 0, \quad \beta_0^* = 0,$$

який визначає породжувальний розв'язок $y_0(\tau, c_0^*) = 1$. Матриця $\mathcal{B}_0$ при цьому — матриця повного рангу

$$\mathcal{B}_0 = \frac{\pi}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок періодичної задачі для рівняння (12) шукаємо у вигляді [18, 19]

$$y(\tau, \varepsilon) := y_0(\tau, c_0^*) + u_1(\tau, \varepsilon) + \dots + u_k(\tau, \varepsilon) + \dots,$$

$$\beta(\varepsilon) := \beta_0^* + \gamma_1(\varepsilon) + \dots + \gamma_k(\varepsilon) + \dots$$

Нелінійна функція

$$\mathcal{Y}(y(\tau, \varepsilon), y'(\tau, \varepsilon), y''(\tau, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)$$

аналітична за невідомою $y(\tau, \varepsilon)$ в околі розв'язку та її похідними $y'(\tau, \varepsilon)$, $y''(\tau, \varepsilon)$ у малому околі розв'язку $y_0(\tau, c_0^*)$ породжувальної задачі та його похідних $y'_0(\tau, c_0)$, $y''_0(\tau, c_0)$, аналітична за функцією $\beta(\varepsilon)$ у малому околі точки β_0 , а також аналітична за малим параметром ε на відрізку $[0, \varepsilon_0]$, тому у зазначеному околі має місце розклад [19]

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(y(\tau, \varepsilon), y'(\tau, \varepsilon), y''(\tau, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon) \\ = \mathcal{Y}(y_0(\tau, c_0^*), y'_0(\tau, c_0^*), y''_0(\tau, c_0^*), \beta_0^*, 0) \\ + \mathcal{Y}_1(y_0(\tau, c_0^*), u_1(\tau, \varepsilon), y'_0(\tau, c_0^*), u'_1(\tau, \varepsilon), y''_0(\tau, c_0^*), u''_1(\tau, \varepsilon), \beta_0^*, \gamma_1(\varepsilon)) + \dots \\ + \mathcal{Y}_k(y_0(\tau, c_0^*), u_1(\tau, \varepsilon), \dots, u_k(\tau, \varepsilon), \dots, \beta_0^*, \gamma_1, \dots, \gamma_k) + \dots \end{aligned}$$

Перше наближення

$$y_1(\tau, \varepsilon) := y_0(\tau, c_0^*) + u_1(\tau, \varepsilon)$$

до розв'язку періодичної задачі для рівняння (12) визначає розв'язок періодичної задачі для рівняння першого наближення

$$u''_1(\tau, \varepsilon) + u_1(\tau, \varepsilon) = \mathcal{Y}(y_0(\tau, c_0^*), y'_0(\tau, c_0^*), y''_0(\tau, c_0^*), \beta_0^*, 0),$$

де

$$\mathcal{Y}(y_0(\tau, c_0^*), y'_0(\tau, c_0^*), y''_0(\tau, c_0^*), \beta_0^*, 0) = \frac{1}{6}.$$

Таким чином, отримуємо перше наближення

$$y_1(\tau, \varepsilon) = 1 + \frac{\varepsilon}{6}$$

до розв'язку періодичної задачі для рівняння (12), де

$$u_1(\tau, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{6}, \quad \gamma_1(\varepsilon) = 0.$$

Друге наближення

$$y_2(\tau, \varepsilon) := y_0(\tau, c_0^*) + u_1(\tau, \varepsilon) + u_2(\tau, \varepsilon)$$

до розв'язку періодичної задачі для рівняння (12) визначає розв'язок періодичної задачі для рівняння другого наближення

$$u''_2(\tau, \varepsilon) + u_2(\tau, \varepsilon) = \mathcal{Y}_1(y_0(\tau, c_0^*), u_1(\tau, \varepsilon), y'_0(\tau, c_0^*), u'_1(\tau, \varepsilon), y''_0(\tau, c_0^*), u''_1(\tau, \varepsilon), \beta_0^*, \gamma_1(\varepsilon)),$$

де

$$\mathcal{Y}_1(y_0(\tau, c_0^*), u_1(\tau, \varepsilon), y'_0(\tau, c_0^*), u'_1(\tau, \varepsilon), y''_0(\tau, c_0^*), u''_1(\tau, \varepsilon), \beta_0^*, \gamma_1(\varepsilon)) = \frac{1}{24}.$$

Таким чином, отримуємо друге наближення

$$y_2(\tau, \varepsilon) = 1 + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon^2}{24}$$

до розв'язку періодичної задачі для рівняння (12), де

$$u_2(\tau, \varepsilon) = \frac{1}{24}, \quad \gamma_2(\varepsilon) = 0.$$

Продовжуючи, отримуємо сьоме наближення

$$y_7(\tau, \varepsilon) = 1 + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon^2}{24} + \frac{11\varepsilon^3}{864} + \frac{5\varepsilon^4}{1152} + \frac{197\varepsilon^5}{124\,416} + \frac{301\varepsilon^6}{497\,664} + \frac{4279\varepsilon^7}{17\,915\,904}$$

до розв'язку періодичної задачі для рівняння (12), де

$$u_7(\tau, \varepsilon) = \frac{1}{17\,915\,904}, \quad \gamma_7(\varepsilon) = 0.$$

Для знайдених наближень до періодичного розв'язку рівняння (12) мають місце нерівності

$$|u_1(\tau, \varepsilon)| \leq \varepsilon \gamma |y_0(\tau, c_0^*)|, \quad |u_{k+1}(\tau, \varepsilon)| \leq \varepsilon \gamma |u_k(\tau, \varepsilon)|,$$

$$\gamma = \frac{4279}{10\,836}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 7,$$

що свідчить про практичну збіжність отриманих наближень до періодичного розв'язку рівняння (12) для

$$\varepsilon \in [0, \varepsilon_0], \quad \varepsilon_0 \approx 2,53\,237.$$

Точність знайдених наближень до періодичного розв'язку рівняння (12) визначають нев'язки

$$\Delta_k(\varepsilon) := \left\| y_k''(\tau, \varepsilon) + y_k(\tau, \varepsilon) - 1 - \frac{\varepsilon y_k(\tau, \varepsilon)}{12} (1 + y_k(\tau, \varepsilon) - y_k''(\tau, \varepsilon)) \right\|_{\mathbb{C}[0;2\pi]},$$

$$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$$

Зокрема,

$$\Delta_0(0, 1) \approx 0,0166\,667, \quad \Delta_1(0, 1) \approx 0,000\,418\,981,$$

$$\Delta_2(0, 1) \approx 0,0000\,128\,487, \quad \Delta_3(0, 1) \approx 4,39\,101 \times 10^{-7},$$

$$\Delta_4(0, 1) \approx 1,60\,474 \times 10^{-8}, \quad \Delta_5(0, 1) \approx 6,13\,796 \times 10^{-10},$$

$$\Delta_6(0, 1) \approx 2,42\,633 \times 10^{-11}, \quad \Delta_7(0, 1) \approx 9,83\,373 \times 10^{-13},$$

$$\Delta_0(0, 01) \approx 0,00166\,667, \quad \Delta_1(0, 01) \approx 4,16\,898 \times 10^{-6},$$

$$\Delta_2(0, 01) \approx 1,27\,431 \times 10^{-8}, \quad \Delta_3(0, 01) \approx 4,34\,527 \times 10^{-11},$$

$$\Delta_4(0, 01) \approx 1,58\,549 \times 10^{-13}, \quad \Delta_5(0, 01) \approx 6,06\,286 \times 10^{-16},$$

$$\Delta_6(0, 01) \approx 2,81\,893 \times 10^{-18}, \quad \Delta_7(0, 01) \approx 2,81\,893 \times 10^{-18}.$$

Порівняємо знайдені наближення до періодичного розв'язку рівняння (12) із точним розв'язком цього рівняння

$$\frac{12 - \varepsilon - \sqrt{144 - 72\varepsilon + \varepsilon^2}}{2\varepsilon} = 1 + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon^2}{24} + \frac{11\varepsilon^3}{864} + \frac{5\varepsilon^4}{1152}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{197 \varepsilon^5}{124\,416} + \frac{301 \varepsilon^6}{497\,664} + \frac{4279 \varepsilon^7}{17\,915\,904} \\
& + \frac{6931 \varepsilon^8}{71\,663\,616} + \frac{103\,049 \varepsilon^9}{2\,579\,890\,176} + \frac{19\,217 \varepsilon^{10}}{1\,146\,617\,856} + \dots,
\end{aligned}$$

а саме, з положенням рівноваги рівняння (12):

$$y'(\varepsilon) = 0, \quad y(\varepsilon) = 1 + \frac{\varepsilon y(\varepsilon) (1 + y(\varepsilon))}{12}, \quad \varepsilon \in \left[0; 12(3 - 2\sqrt{2})\right],$$

де

$$12(3 - 2\sqrt{2}) \approx 2,05\,887.$$

Рівняння (12) має також положення рівноваги

$$\frac{12 + \varepsilon - \sqrt{144 - 72\varepsilon + \varepsilon^2}}{2\varepsilon},$$

не обмежене в околі нуля, яке не є шуканим розв'язком цього рівняння.

Таким чином, враховуючи область визначення положення рівноваги рівняння (12), можна казати про практичну збіжність знайдених наближень до періодичного розв'язку рівняння (12) для значень малого параметра

$$\varepsilon \in \left[0; 12(3 - 2\sqrt{2})\right].$$

Точність знайдених наближень до періодичного розв'язку рівняння (12) визначають функції

$$\delta_k(\varepsilon) := |y_k(\tau, \varepsilon) - y(\varepsilon)|, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$$

Зокрема,

$$\begin{aligned}
\delta_0(0, 1) &\approx 0,0170\,965, & \delta_1(0, 1) &\approx 0,000\,429\,849, \\
\delta_2(0, 1) &\approx 0,000\,013\,182, & \delta_3(0, 1) &\approx 4,50\,491 \times 10^{-7}, \\
\delta_4(0, 1) &\approx 1,64\,637 \times 10^{-8}, & \delta_5(0, 1) &\approx 6,29\,718 \times 10^{-10}, \\
\delta_6(0, 1) &\approx 2,48\,927 \times 10^{-11}, & \delta_7(0, 1) &\approx 1,00\,885 \times 10^{-12}, \\
\delta_0(0, 01) &\approx 0,00\,167\,085, & \delta_1(0, 01) &\approx 4,17\,944 \times 10^{-6}, \\
\delta_2(0, 01) &\approx 1,27\,750 \times 10^{-8}, & \delta_3(0, 01) &\approx 4,35\,617 \times 10^{-11}, \\
\delta_4(0, 01) &\approx 1,58\,947 \times 10^{-13}, & \delta_5(0, 01) &\approx 6,07\,224 \times 10^{-16}, \\
\delta_6(0, 01) &\approx 2,39\,809 \times 10^{-18}, & \delta_7(0, 01) &\approx 9,71\,169 \times 10^{-21}.
\end{aligned}$$

Запропоновану у статті схему дослідження умов розв'язності та побудови розв'язків автономної крайової задачі, не розв'язаної щодо похідної, можна перенести на автономні крайові задачі з імпульсним впливом [1, 20, 21], а також на автономні нелінійні диференціально-алгебраїчні крайові задачі [22, 23].

Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів. Усі необхідні дані містяться в статті. Ця робота частково підтримана грантом у рамках двосторонньої угоди між Академією наук Австрії та НАН України.

Література

1. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, 2nd ed., De Gruyter, Berlin, Boston (2016).
2. O. Vejvoda, *On perturbed nonlinear boundary-value problems*, Czechoslovak Math. J., № 11, 323 – 364 (1961).
3. С. М. Чуйко, О. В. Старкова, *О приближенном решении автономных краевых задач методом наименьших квадратов*, Нелін. коливання, **12**, № 4, 556 – 573 (2009); **English translation:** Nonlinear Oscil. (N.Y.), **12**, № 4, 574 – 591 (2009).
4. И. Г. Малкин, *Некоторые задачи теории нелинейных колебаний*, Гостехиздат, Москва (1956).
5. A. Boichuk, S. Chuiko, *Autonomous weakly nonlinear boundary-value problems in critical cases*, Differential Equat., № 10, 1353 – 1358 (1992).
6. S. M. Chuiko, O. V. Starkova, *Autonomous Noether boundary-value problems not solved with respect to the derivative*, J. Math. Sci., **232**, № 5, 799 – 783 (2018).
7. С. М. Чуйко, *Область сходимости итерационной процедуры для автономной краевой задачи*, Нелін. коливання, **9**, № 3, 416 – 432 (2006); **English translation:** Nonlinear Oscil. (N.Y.), **9**, № 3, 405 – 422 (2006).
8. С. М. Чуйко, І. О. Бойчук, *Автономна нетерова крайова задача в критичному випадку*, Нелін. коливання, **12**, № 3, 405 – 416 (2009); **English translation:** Nonlinear Oscil. (N.Y.), **12**, № 3, 417 – 428 (2009).
9. С. М. Чуйко, О. В. Старкова, *Автономные краевые задачи в частном критическом случае*, Динам. системы, **27**, 127 – 142 (2009).
10. Н. М. Матвеев, *Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений*, Высшая школа, Москва (1963).
11. Г. В. Демиденко, С. В. Успенский, *Уравнения и системы, не разрешенные относительно производной*, Научная книга, Новосибирск (1998).
12. С. М. Чуйко, О. В. Старкова, О. Е. Пирус, *Нелинейные нетеровы краевые задачи, не разрешенные относительно производной*, Динам. системы, **2(30)**, № 1-2, 169 – 186 (2012).
13. А. А. Бойчук, *Конструктивные методы анализа краевых задач*, Наукова думка, Киев (1990).
14. А. А. Бойчук, С. М. Чуйко, *Конструктивні методи аналізу крайових задач теорії нелінійних коливань*, Наукова думка, Київ (2023).
15. Д. К. Лика, Ю. А. Рябов, *Методы итераций и мажорирующие уравнения Ляпунова в теории нелинейных колебаний*, Штиинца, Кишинев (1974).
16. S. M. Chuiko, *Nonlinear matrix differential-algebraic boundary value problem*, Lobachevskii J. Math., **38(2)**, 236 – 244 (2017).
17. В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, *Справочник по нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Факториал, Москва (1997).
18. G. Adomian, *A review of the decomposition method in applied mathematics*, J. Math. Anal. Appl., **135**, 501 – 544 (1988).
19. С. М. Чуйко, О. С. Чуйко, М. В. Попов, *Метод декомпозиції Адомяна у теорії нелінійних періодичних крайових задач*, Нелін. коливання, **25**, № 4, 413 – 425 (2022); **English translation:** J. Math. Sci., **277**, № 2, 338 – 351 (2023).
20. А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк, *Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием*, Вища школа, Киев (1987).
21. S. M. Chuiko, *A generalized Green operator for a linear Noetherian differential-algebraic boundary-value problem*, Siberian Adv. Math., **30**, 177 – 191 (2020).
22. S. L. Campbell, *Singular systems of differential equations*, Pitman Advanced Publishing Program, San Francisco, London, Melbourne (1980).
23. S. M. Chuiko, *Weakly nonlinear boundary value problem for a matrix differential equation*, Miskolc Math. Notes, **17**, № 1, 139 – 150 (2016).

Одержано 29.06.23,
після доопрацювання — 21.10.23