

ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ТОНКОСТІННИХ СФЕРИЧНИХ ОБОЛОНОК

Юрій Троценко

Інститут математики НАН України

вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна

e-mail: trots@imath.kiev.ua

By using the Ritz method, we find the eigenforms and the eigenfrequencies of non-axisymmetric vibrations of thin-walled isotropic spherical shells. As examples, we give results of calculation of dynamic characteristics for a sphere with different geometric parameters for boundary conditions of free attachment.

Із застосуванням методу Рітца знайдено власні форми і частоти неосесиметричних коливань тонкостінних ізотропних сферичних оболонок. Як приклади наведено розрахунки динамічних характеристик для сфери при різних геометричних параметрах для граничних умов вільного кріплення.

Вступ. Сферичні оболонки широко використовуються в цивільних, механічних, авіаційних, ракетних, морських конструкціях, а також наноконструкціях. Багато таких конструкцій в процесі експлуатації піддаються значним динамічним навантаженням, а отже, спостерігається постійний інтерес до аналізу їхніх коливань. При цьому виникає необхідність у розробці більш точних методів розрахунку та нових моделей конструкцій для можливості врахування більш широкого спектра фізичних і геометричних параметрів таких механічних конструкцій. Основною задачею в усьому розрахунковому комплексі є визначення динамічних характеристик сферичної оболонки.

Монографія [1], одна з перших робіт у цьому напрямі, містить точний розв'язок у рамках теорії згину оболонок для осесиметричних коливань тонких неглибоких пружних сферичних оболонок. Зокрема, розв'язки застосовано до дослідження власних частот вільних осесиметричних коливань сферичних сегментів оболонки з різними крайовими умовами. Проведено порівняння з раніше відомими результатами для поперечних коливань неглибоких сферичних оболонок, де знехтувано ефектом поздовжньої інерції.

У роботі [2] аналіз коливань неглибоких сферичних оболонок поширено на: а) частоти порядку величини першої моди зсуву товщини в нескінченній пластині та б) оболонки помірної товщини. Виведено систему десятого порядку з трьох незв'язаних диференціальних рівнянь, які керують несиметричною динамічною деформацією неглибокої сферичної оболонки, що піддається довільним залежним від часу поверхневим навантаженням, і отримано сепарабельні розв'язки за допомогою функцій Бесселя.

Дослідження [3] стосується як осесиметричних, так і асиметричних коливань тонких пружних сферичних оболонок. Із обмеженим осесиметричним рухом без кручення основні рівняння для сферичних оболонок класичної теорії вигину першого наближення Лява зведено до системи двох пов'язаних диференціальних рівнянь щодо нормального переміщення серединної поверхні та функції напруження. Цю систему рівнянь застосовано до

вільних коливань напівсферичної оболонки з вільним краєм і отримано чисельні результати для найменшої власної частоти як функції товщини оболонки.

Статтю [4] присвячено теоретичному дослідженню вільних коливань довільних оболонок обертання за допомогою класичної теорії згину оболонок. Розроблено метод, застосовний до обертально-симетричних оболонок із меридіональними змінами (включаючи розриви) модуля Юнга, коефіцієнта Пуассона, радіусів кривини та товщини. За допомогою методу з [4] можна отримати власні частоти та відповідні форми мод осесиметричних або несиметричних вільних коливань обертально-симетричних оболонок без обмеження довжини меридіана оболонки.

У [5] розглянуто реакцію непологого сферичного сегмента оболонки з простою опорою, внутрішня поверхня якого ізольована від теплового потоку, який раптово прикладається до його зовнішньої поверхні. Проблема вирішено за допомогою процедури модального розширення, і результати наводяться для діапазону параметрів, які мають відношення до перехідної поведінки оболонки.

У дослідженні [6] метод Хольцера, розроблений для визначення крутильних частот вібраційного вала, узагальнено для аналізу вільних коливань сферичних оболонок. Зроблено висновок, що метод Хольцера насправді є дуже точним методом для визначення частот і форм сферичних оболонок, однак його не можна застосувати до надзвичайно тонких оболонок.

У роботі [7] розглянуто осесиметричні коливання глибоких багатошарових сферичних оболонок. Оболонка складається з товстого ядра і двох лицьових листів із однакового ізотропного матеріалу однакової товщини.

У [8] диференціальні рівняння вільних гармонічних коливань тонких пружних сферичних оболонок виведено в інваріантній формі разом із відповідними кінематичними та статичними граничними умовами. Наведено розв'язок для осесиметричних і неосесиметричних мод коливань оболонки у формі сферичної зони з двома межами. Як окремий випадок розглянуто задачу про неосесиметричні коливання сферичної оболонки з круглим отвором.

Аналізу вільних коливань сферичної оболонки з пружною або жорсткою опорою присвячено дослідження [9]. Переміщення оболонки записано у ряд добутків пов'язаних функцій Лежандра та тригонометричних функцій. Метод застосовано до замкнутої сферичної оболонки, яка спирається на чотири пружні опори, розташовані вздовж паралелі.

У [10] досліджено вільні коливання тонкої сферичної оболонки, заповненої стисливою рідиною. Враховано взаємодію на межі розділу між пружною структурою та стисливою рідиною. Метою цієї статті є розробка гібридної числової техніки для аналізу вільних коливань проблем взаємодії звуку та конструкції. Для моделювання акустичних збурень у порожнині використано метод граничних елементів, а для моделювання структурної динаміки оболонки — метод скінченних елементів.

Завдяки введенню двох функцій зміщення неосесиметричні вільні коливання повної тонкої ізотропної сферичної оболонки, зануреної в стисливе рідке середовище, розглянуто у статті [11]. Виявлено, що існують два класи вільних коливань. На перший клас не впливає навколишня рідина, а на другий впливає. Доведено, що частотні рівняння можна виразити через поліном.

Тривимірний метод аналізу для визначення частот вільних коливань і форм товстих оболонок обертання наведено у роботах [12, 13]. Середня поверхня оболонки може мати довільну кривину, а товщина стінки може довільно змінюватися. З використанням методу

Рітца для перших п'яти частот оболонок продемонстровано збіжність до чотиризначної точності. Наведено числові результати для двох типів товстих конічних оболонок і сферичних сегментів оболонки з лінійними змінами товщини та повністю вільними границями.

Дослідження [14] присвячено виведенню та аналізу коливань неглибокої сферичної оболонки, що піддається поперечному переміщенню великої амплітуди. Використано аналог для тонких неглибоких оболонок теорії фон Кармана для великого прогину пластин. Діапазон достовірності апроксимацій оцінюється шляхом порівняння аналітичного модального аналізу з чисельним розв'язком.

У статті [15] одержано оцінку частоти сферичних оболонок за допомогою методу узагальненої диференціальної квадратури (G.D.Q.M.), чисельної процедури, яка відноситься до класу узагальнених методів колокації. Теорія оболонки, використана в цьому дослідженні, є теорією деформації зсуву першого порядку з урахуванням поперечних деформацій зсуву та інерції повороту. Отримані рівняння оболонки в термінах переміщень серединної поверхні розв'язані за допомогою G.D.Q.M. Кілька порівнянь зроблено з доступними результатами, що показує надійність чисельної схеми.

У роботі [16] власні частоти та форми отримано для осесиметричних і неосесиметричних коливань. Наведено теорії вібрації повних сферичних оболонок і комп'ютерне моделювання вібрацій на основі скінченних елементів із геометричними дефектами та без них. Зроблено порівняння отриманих результатів із експериментальними.

У дослідженні [17] наведено тривимірний метод аналізу для визначення частот вільних коливань напівсферичних оболонок обертання з ексцентриситетом, що мають однакову товщину. На відміну від звичайних теорій оболонок, які є математично двовимірними, цей метод базується на тривимірних динамічних рівняннях пружності. Метод Рітца використано для розв'язання проблеми власних значень. Для перших п'яти частот оболонок обертання продемонстровано збіжність до трьох-чотирьох значущих цифр. Наведено чисельні результати для різноманітних напівсферичних оболонок обертання з ексцентриситетом.

У [18] досліджено вільні осесиметричні коливання замкненої сферичної нанооболонки з використанням теорії нелокальної пружності Ерінгена. Рівняння руху сформульовано з урахуванням гіпотез тонких оболонок, а розв'язок отримано за допомогою класичного методу розділення змінних. Вплив нелокального параметра на власні частоти та форми коливань порівнюється з їхніми локальними аналогами.

Теорію нелокальної пружності було розроблено, щоб описати деякі явища, які не можуть бути належним чином описані класичною теорією локальної пружності. Формалізм включає в себе дальні взаємодії між точками в неперервному середовищі. У роботі [19] сформульовано модель нелокальної сферичної оболонки для застосування до проблеми вільних коливань нанооболонок сферичної геометрії. Достовірність цієї моделі перевіряється за допомогою деяких наявних чисельних і експериментальних результатів.

Статтю [20] присвячено аналізу характеристик вільних коливань тонких сферичних оболонок із вільними граничними умовами. Досліджено властивості власних коливань для таких оболонок.

Розвинено варіаційний метод розв'язування спектральної задачі про вільні коливання незамкнутої в меридіональному напрямку оболонки обертання, який однаково ефективний як при середніх, так і малих значеннях відносної товщини оболонки, у роботі [21]. Координатні системи функцій будували з урахуванням структури асимптотичних формальних розкладів фундаментальної системи розв'язків вихідних рівнянь. На прикладі розрахунку частот і форм коливань кругової циліндричної оболонки показано, що запропонований

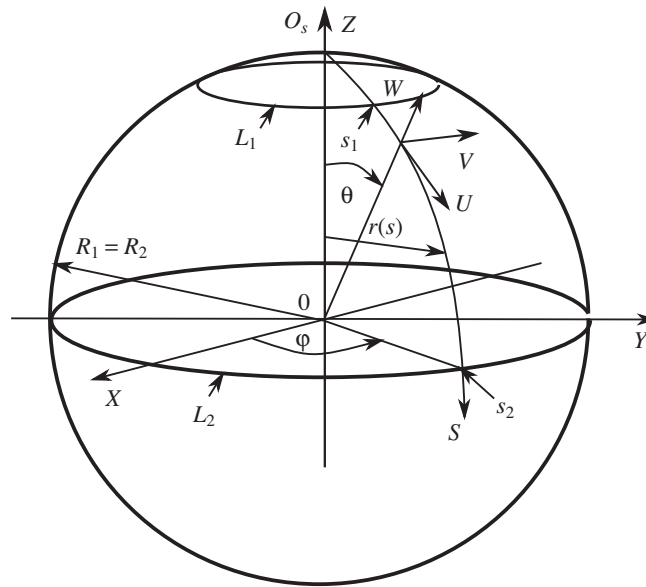


Рис. 1. Основні параметри сферичної оболонки.

алгоритм розв'язування задачі забезпечує рівномірну збіжність розв'язків і їхніх перших трьох похідних у всій області інтегрування рівнянь.

У роботі [22] запропоновано системи координатних функцій при застосуванні методу Рітца для знаходження власних форм і частот неосесиметричних коливань тонкостінних куполоподібних оболонок обертання. Побудову базисних функцій здійснено з урахуванням індивідуальних особливостей спектральної задачі, що забезпечує рівномірну збіжність обчислювального процесу. Як приклад наведено розрахунки динамічних характеристик для оболонки у формі сферичного купола.

У цій роботі розглядаємо вільні неосесиметричні коливання сферичної тонкостінної оболонки. Побудова розв'язків задачі базується на основі методу Рітца.

1. Варіаційне формулювання задачі. Розглянемо тонкостінну пружну оболонку, серединна поверхня якої є поверхнею обертання (рис. 1).

У такої оболонки лініями головних кривин будуть її меридіани і паралелі. Відповідно до цього, серединну поверхню оболонки віднесемо до ортогональної системи криволінійних координат s і φ , де φ — полярний кут, що відраховується від осі Ox за годинниковою стрілкою, якщо дивитися у бік зростання координати z , s — довжина дуги меридіана, яка відраховується від деякої початкової паралелі або полюса для замкненої оболонки.

Проекції переміщення точок серединної поверхні на додатні напрямки меридіана і паралелі, а також на зовнішню нормаль до поверхні оболонки позначимо через u , v і w відповідно.

Далі будемо вважати, що переміщення настільки малі, що можна знехтувати членами другого і більш високого порядку мализни в порівнянні з лінійними. Будемо вважати також, що для оболонки справедливі гіпотези Кірхгофа – Лява.

Рівняння рівноважного стану оболонки, що знаходиться під дією сил інерції, можна отримати з використанням будь-якого варіаційного принципу механіки. Такий підхід дозволить сформулювати варіаційну постановку задачі, яка буде використана в подальшому при побудові її наближеного розв'язку.

Скористаємося принципом можливих переміщень, згідно з яким

$$\delta\Pi = \delta A, \quad (1)$$

де $\delta\Pi$ — варіація потенціальної енергії пружної деформації оболонки, δA — робота сил інерції на можливих переміщеннях, яка може бути наведена у вигляді

$$\delta A = - \iint_{\Sigma} \rho h \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} \delta \vec{U} d\Sigma, \quad (2)$$

де Σ , ρ і h — серединна поверхня, густина матеріалу і товщина оболонки відповідно, $\vec{U}$ — вектор із компонентами u , v і w .

Варіацію потенціальної енергії деформації серединної поверхні оболонки можна подати у вигляді [23]

$$\delta\Pi = \iint_{\Sigma} (T_1 \delta\varepsilon_1 + T_2 \delta\varepsilon_2 + S \delta\omega + M_1 \delta\kappa_1 + M_2 \delta\kappa_2 + 2H \delta\tau) d\Sigma, \quad (3)$$

де

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2), & T_2 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1), \\ M_1 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_1 + \nu\kappa_2), & M_2 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_2 + \nu\kappa_1); \\ S &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \omega, & H &= \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \tau, \end{aligned} \quad (4)$$

E і ν — модуль пружності і коефіцієнт Пуассона матеріалу оболонки відповідно. Компоненти тензора деформацій серединної поверхні оболонки ε_1 , ε_2 , κ_1 , κ_2 , ω , τ пов'язані з компонентами вектора переміщень співвідношеннями [23]

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R_1}, & \varepsilon_2 &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\cos \vartheta}{r} u + \frac{\sin \vartheta}{r} w, \\ \omega &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\cos \vartheta}{r} v, & \kappa_1 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u}{R_1} \right); \\ \kappa_2 &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\sin \vartheta}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\cos \vartheta}{r} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\cos \vartheta}{r} \frac{u}{R_1}, \\ \tau &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{R_1 \partial \varphi} - \frac{\cos \vartheta \sin \vartheta}{r^2} v + \frac{\cos \vartheta}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\sin \vartheta}{r} \frac{\partial v}{\partial s}, \end{aligned} \quad (5)$$

де $R_1(s)$ — радіус кривини меридіана оболонки; $\vartheta(s)$ — кут, утворений нормаллю до серединної поверхні і віссю обертання оболонки Oz , $r(s)$ — радіус кола, утвореного паралелями оболонки.

Будемо далі розглядати незамкнену оболонку обертання, обмежену контурами L_1 і L_2 , як показано на рис. 1.

Скориставшись формулами інтегрування за частинами для подвійних інтегралів, після ряду перетворень із урахуванням співвідношень (2)–(5) варіаційне рівняння (1) можна подати у вигляді

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\Sigma} \left[\left(-\frac{\partial T_1}{\partial s} + \frac{\cos \vartheta}{r} (T_2 - T_1) - \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial \varphi} - \frac{1}{r R_1} \frac{\partial}{\partial s} (M_1 r) + M_2 \frac{\cos \vartheta}{r R_1} - \frac{2}{r R_1} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right) \delta u \right. \\
 & + \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial S}{\partial s} - \frac{2 \cos \vartheta}{r} S - \frac{\sin \vartheta}{r^2} \frac{\partial M_2}{\partial \varphi} - 2H \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial s} (H \sin \vartheta) \right) \delta v \\
 & + \left(\frac{T_1}{R_1} + T_2 \frac{\sin \vartheta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial s^2} (M_1 r) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 M_2}{\partial \varphi^2} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} (M_2 \cos \vartheta) - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 H}{\partial s \partial \varphi} - \frac{2 \cos \vartheta}{r^2} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right) \delta w \Big] d\Sigma \\
 & + \oint_{L_2} \left[\left(T_1 + \frac{M_1}{R_1} \right) \delta u + \left(S + 2H \frac{\sin \vartheta}{r} \right) \delta v \right. \\
 & \left. + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} (M_1 r) - M_2 \frac{\cos \vartheta}{r} + \frac{2}{r} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right) \delta w - M_1 \frac{\partial \delta w}{\partial s} \right] dL_2 \\
 & - \oint_{L_1} \left[\left(T_1 + \frac{M_1}{R_1} \right) \delta u + \left(S + 2H \frac{\sin \vartheta}{r} \right) \delta v \right. \\
 & \left. + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} (M_1 r) - M_2 \frac{\cos \vartheta}{r} + \frac{2}{r} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right) \delta w - M_1 \frac{\partial \delta w}{\partial s} \right] dL_1 \\
 & = - \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right) \rho h r d s d \varphi. \tag{6}
 \end{aligned}$$

Враховуючи незалежність варіацій δu , δv і δw в області Σ , з варіаційного рівняння (6) отримаємо три рівняння, які описують рух оболонки під впливом її інерційних сил. Якщо в цих рівняннях перейти від зусиль до переміщень згідно з формулами (4) і (5), то отримаємо рівняння щодо переміщень u , v і w , які з огляду на їхню достатню громіздкість тут не наводимо. З рівняння (6) випливають також і граничні умови задачі. Так, у разі жорсткого кріплення краю оболонки матимемо

$$u = v = w = \frac{\partial w}{\partial s} = 0. \tag{7}$$

Відповідно на вільному краю оболонки повинні виконуватися граничні умови

$$\begin{aligned}
 T_1 = 0, \quad M_1 = 0, \quad S + 2H \frac{\sin \vartheta}{r} = 0, \\
 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} (M_1 r) - M_2 \frac{\cos \vartheta}{r} + \frac{2}{r} \frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0. \tag{8}
 \end{aligned}$$

В інших випадках кріплення краю оболонки використовуємо лінійні комбінації умов (7) і (8). Слід особливо зазначити, що найбільш складні силові граничні умови (8) є природними граничними умовами для відповідного функціонала, отриманого за допомогою принципу можливих переміщень. Отже, пошук його мінімуму можна здійснювати на класі функцій, що задовольняють лише кінематичні граничні умови.

2. Побудова розв'язків. Мализна параметрів руху оболонки і її симетрія дозволяють загальний рух розкласти на незалежні складові в напрямку і навколо поздовжньої осі, а також у двох взаємно перпендикулярних площинах Oxz і Oyz . Далі будемо розглядати поперечні коливання оболонки в одній з площин симетрії, за яку, зокрема, приймемо площину Oxz . У цьому випадку переміщення серединної поверхні оболонки будемо шукати у вигляді

$$\begin{aligned} u(s, \varphi, t) &= e^{i\omega t} U_n(s) \cos n\varphi, \\ v(s, \varphi, t) &= e^{i\omega t} V_n(s) \sin n\varphi, \\ w(s, \varphi, t) &= e^{i\omega t} W_n(s) \cos n\varphi, \end{aligned} \quad (9)$$

де n — число хвиль у круговому напрямку оболонки.

Перейдемо до безрозмірних величин, які пов'язані з відповідними розмірними величинами такими співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \{U_n, V_n, W_n\} &= R_0 \{\bar{U}_n, \bar{V}_n, \bar{W}_n\}, \quad \{r, s, R_1\} = R_0 \{\bar{r}, \bar{s}, \bar{R}_1\}, \\ c^2 &= \frac{h^2}{12R_0^2}, \quad \bar{\omega}^2 = \frac{R^2 \rho (1 - \nu^2)}{E} \omega^2, \end{aligned} \quad (10)$$

де R_0 — характерна для оболонки постійна величина, що має розмірність довжини, h — товщина оболонки.

Далі для скорочення запису риску над безрозмірними величинами будемо опускати.

Тоді варіаційне рівняння задачі про усталені вільні коливання оболонки обертання можна навести у вигляді

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{s_1}^{s_2} \left[\Psi_{11}(U_n, \delta U_n) + \Psi_{12}(V_n, \delta U_n) + \Psi_{13}(W_n, \delta U_n) \right. \\ &\quad + \Psi_{12}(\delta V_n, U_n) + \Psi_{22}(V_n, \delta V_n) + \Psi_{23}(W_n, \delta V_n) + \Psi_{13}(\delta W_n, U_n) \\ &\quad \left. + \Psi_{23}(\delta W_n, V_n) + \Psi_{33}(W_n, \delta W_n) \right] r ds \\ &\quad - \omega^2 \int_{s_1}^{s_2} (U_n \delta U_n + V_n \delta V_n + W_n \delta W_n) r ds = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Уведені тут диференціальні оператори $\Psi_{ij}(p, q)$, де p і q — довільні функції, у випадку застосування загальної теорії тонкостінних оболонок Новожилова [23] мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}
\Psi_{11}(p, q) &= \left(\frac{\cos^2 \vartheta}{r^2} + \frac{\nu_1 n^2}{r^2} + \frac{c^2 \cos^2 \vartheta}{r^2 R_1^2} + \frac{2(1-\nu)c^2 n^2}{r^2 R_1^2} \right) pq \\
&\quad + \left(\frac{dp}{ds} + \frac{\nu \cos \vartheta}{r} p \right) \frac{dq}{ds} + \frac{\nu \cos \vartheta}{r} \left[\frac{dp}{ds} + \frac{c^2}{R_1} \frac{d}{ds} \left(\frac{p}{R_1} \right) \right] q \\
&\quad + c^2 \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{p}{R_1} \right) + \frac{\nu \cos \vartheta}{r R_1} p \right] \frac{d}{ds} \left(\frac{q}{R_1} \right), \\
\Psi_{12}(p, q) &= \frac{n \cos \vartheta}{r^2} \left(1 + \frac{c^2 \sin \vartheta}{r R_1} \right) pq + \frac{\nu n}{r} \left[\frac{dq}{ds} + \frac{c^2 \sin \vartheta}{r} \frac{d}{ds} \left(\frac{q}{R_1} \right) \right] p \\
&\quad + \left[\left(\frac{\nu_1 n}{r} + \frac{2(1-\nu)c^2 n \sin \vartheta}{r^2 R_1} \right) \left(\frac{\cos \vartheta}{r} p - \frac{dp}{ds} \right) \right] q, \\
\Psi_{13}(p, q) &= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu \sin \vartheta}{r} \right) p \frac{dq}{ds} + \frac{\cos \vartheta}{r} \left(\frac{\sin \vartheta}{r} + \frac{\nu}{R_1} + \frac{c^2 n^2}{r^2 R_1} \right) pq \\
&\quad - c^2 \left(\frac{d^2 p}{ds^2} - \frac{\nu n^2}{r^2} p + \frac{\nu \cos \vartheta}{r} \frac{dp}{ds} \right) \frac{d}{ds} \left(\frac{q}{R_1} \right) - \frac{c^2 \cos \vartheta}{r R_1} \left(\frac{\cos \vartheta}{r} \frac{dp}{ds} + \nu \frac{d^2 p}{ds^2} \right) q \\
&\quad + \frac{2(1-\nu)c^2 n^2}{r^2 R_1} \left(\frac{\cos \vartheta}{r} p - \frac{dp}{ds} \right) q, \\
\Psi_{22}(p, q) &= \frac{1}{r^2} \left(n^2 + \nu_1 \cos^2 \vartheta + \frac{c^2 n^2 \sin^2 \vartheta}{r^2} \right) pq - \frac{\nu_1 \cos \vartheta}{r} \left(\frac{dp}{ds} q + p \frac{dq}{ds} \right) \\
&\quad + \nu_1 \frac{dp}{ds} \frac{dq}{ds} + \frac{2(1-\nu)c^2 \sin^2 \vartheta}{r^2} \left[\left(\frac{\cos \vartheta}{r} q - \frac{dq}{ds} \right) \left(\frac{\cos \vartheta}{r} p - \frac{dp}{ds} \right) \right], \\
\Psi_{23}(p, q) &= \left(\frac{n \sin \vartheta}{r^2} + \frac{\nu n}{r R_1} + \frac{c^2 n^3 \sin \vartheta}{r^4} \right) pq - \frac{c^2 n \sin \vartheta}{r^2} \left(\nu \frac{d^2 p}{ds^2} + \frac{\cos \vartheta}{r} \frac{dp}{ds} \right) q \\
&\quad + 2(1-\nu)c^2 \left[\frac{n \sin \vartheta}{r^2} \left(\frac{dp}{ds} - \frac{\cos \vartheta}{r} p \right) \left(\frac{dq}{ds} - \frac{\cos \vartheta}{r} q \right) \right], \\
\Psi_{33}(p, q) &= c^2 \left[\frac{d^2 p}{ds^2} \frac{d^2 q}{ds^2} + \frac{\nu \cos \vartheta}{r} \left(\frac{d^2 p}{ds^2} \frac{dq}{ds} + \frac{d^2 q}{ds^2} \frac{dp}{ds} \right) - \frac{\nu n^2}{r^2} \left(\frac{d^2 p}{ds^2} q + \frac{d^2 q}{ds^2} p \right) \right] \\
&\quad + \frac{\cos^2 \vartheta + 2(1-\nu)n^2}{r^2} \frac{dp}{ds} \frac{dq}{ds} - \frac{n^2 \cos \vartheta (3-2\nu)}{r^3} \left(\frac{dq}{ds} p + \frac{dp}{ds} q \right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} + \frac{2\nu \sin \vartheta}{r R_1} + \frac{c^2 n^4 + 2(1-\nu)c^2 n^2 \cos^2 \vartheta}{r^4} \right) pq,
\end{aligned}$$

де $\nu_1 = (1-\nu)/2$,

У разі застосування технічної теорії оболонок Власова [24], замість наведених вище формул слід скористатися такими виразами для $\Psi_{ij}(p, q)$:

$$\Psi_{11}(p, q) = \left(\frac{\cos^2 \vartheta}{r^2} + \frac{\nu_1 n^2}{r^2} \right) pq + \left(\frac{dp}{ds} + \frac{\nu \cos \vartheta}{r} p \right) \frac{dq}{ds} + \frac{\nu \cos \vartheta}{r} \frac{dp}{ds} q,$$

$$\begin{aligned}\Psi_{12}(p, q) &= \left(\frac{n \cos \vartheta}{r^2} + \frac{\nu_1 n \cos \vartheta}{r^2} \right) pq + \frac{\nu n}{r} p \frac{dq}{ds} - \frac{\nu_1 n}{r} q \frac{dp}{ds}, \\ \Psi_{13}(p, q) &= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu \sin \vartheta}{r} \right) p \frac{dq}{ds} + \left(\frac{\cos \vartheta \sin \vartheta}{r^2} + \frac{\nu \cos \vartheta}{r R_1} \right) pq, \\ \Psi_{22}(p, q) &= \left(\frac{n^2}{r^2} + \frac{\nu_1 \cos^2 \vartheta}{r^2} \right) pq + \left(\nu_1 \frac{dp}{ds} - \frac{\nu_1 \cos \vartheta}{r} p \right) \frac{dq}{ds} - \frac{\nu_1 \cos \vartheta}{r} \frac{dp}{ds} q, \\ \Psi_{23}(p, q) &= \left(\frac{n \sin \vartheta}{r^2} + \frac{\nu n}{r R_1} \right) pq.\end{aligned}$$

Вираз для $\Psi_{33}(p, q)$ залишено без змін.

Розв'язки, що задовольняють рівняння (11), повинні бути підпорядковані певним граничним умовам. Наприклад, для випадку жорсткого кріплення торців оболонки будемо мати

$$\begin{aligned}U_n(s) = V_n(s) = W_n(s) &= \left. \frac{dW_n(s)}{ds} \right|_{s=s_1} = 0, \\ U_n(s) = V_n(s) = W_n(s) &= \left. \frac{dW_n(s)}{ds} \right|_{s=s_2} = 0.\end{aligned}\tag{12}$$

Пошук мінімуму функціонала, варіацію якого представлено в формі (11), на класі функцій, що задовольняють кінематичні граничні умови, будемо здійснювати за допомогою методу Рітца, згідно з яким компоненти переміщень оболонки подамо у вигляді скінченних рядів вигляду

$$U_n(s) = \sum_{j=1}^N a_j u_j(s), \quad V_n(s) = \sum_{j=1}^N b_j v_j(s), \quad W_n(s) = \sum_{j=1}^N c_j w_j(s),\tag{13}$$

де a_j , b_j і c_j — постійні, що підлягають визначенню.

Будемо розглядати випадок, коли обидва торці вільні; тоді, не обмежуючи переміщення оболонки, координатні функції $u_j(s)$, $v_j(s)$ і $w_j(s)$ можна подати у вигляді

$$u_j(s) = v_j(s) = w_j(s) = P_j \left(\frac{2(s-s_2)}{s_2-s_1} + 1 \right), \quad j = 1, 2, \dots, N.\tag{14}$$

Тут $P_j(s)$ — зміщені на одиницю за індексом j многочлени Лежандра, обчислення яких і їхніх перших двох похідних можна проводити за допомогою рекурентних співвідношень

$$\begin{aligned}P_{j+2}(s) &= \frac{1}{j+1} [(2j+1)sP_{j+1}(s) - jP_j(s)], \\ P'_{j+2}(s) &= sP'_{j+1}(s) + (j+1)P_{j+1}(s), \\ P''_{j+2}(s) &= sP''_{j+1}(s) + (j+2)P'_{j+1}(s), \\ P_1(s) &= 1, \quad P_2(s) = s, \quad j = 1, 2, \dots, N-2.\end{aligned}\tag{15}$$

При такому представленні розклади (13) задовольняють умови вільного кріплення торців оболонки при будь-яких значеннях вектора

$$\vec{X} = [a_1, a_2, \dots, a_N, b_1, b_2, \dots, b_N, c_1, c_2, \dots, c_N].$$

При цьому забезпечується повнота і лінійна незалежність функцій, що входять у розклади (13).

Компоненти вектора $\vec{X}$ далі визначаємо з умови стаціонарності відповідного функціонала I . При цьому вихідна задача зводиться до розв'язування однорідної алгебраїчної системи

$$(A - \omega^2 B) \vec{X}^T = 0, \quad (16)$$

де $\vec{X}^T$ — транспонований вектор $\vec{X}$, A і B — симетричні матриці порядку $3N$.

Елементи матриць A і B , які розташовані на головній діагоналі і вище неї, будуть обчислюватися за такими формулами:

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= \int_{s_1}^{s_2} \Psi_{11}(u_j, u_i) r ds, & a_{i,j+N} &= \int_{s_1}^{s_2} \Psi_{12}(v_j, u_i) r ds, \\ a_{i,j+2N} &= \int_{s_1}^{s_2} \Psi_{13}(w_j, u_i) r ds, & a_{i+N,j+N} &= \int_{s_1}^{s_2} \Psi_{22}(v_j, v_i) r ds, \\ a_{i+N,j+2N} &= \int_{s_1}^{s_2} \Psi_{23}(w_j, v_i) r ds, & a_{i+2N,j+2N} &= \int_{s_1}^{s_2} \Psi_{33}(w_j, w_i) r ds, \\ b_{i,j} &= \int_{s_1}^{s_2} u_j u_i r ds, & b_{i,j+N} &= b_{i,j+2N} = b_{i+N,j+2N} = 0, \\ b_{i+N,j+N} &= \int_{s_1}^{s_2} v_j v_i r ds, & b_{i+2N,j+2N} &= \int_{s_1}^{s_2} w_j w_i r ds. \end{aligned}$$

При виведенні цих виразів було використано представлення для варіації функціонала δI у формі (11), що забезпечило простоту їхнього отримання і значні зручності при програмуванні запропонованого алгоритму розв'язування цієї задачі.

3. Деякі результати розрахунків. Наведені вище формули справедливі для довільної тонкостінної оболонки обертання. Щоб перейти до сферичної оболонки, покладемо $R_0 = R_1$, $r = \sin \vartheta$ і $\vartheta = s$. Уведемо до розгляду позначення $\vartheta_1 = s_1$, $\vartheta_2 = s_2$, $\vartheta_0 = \vartheta_2 - \vartheta_1$ і $\delta = R_1/h$. В усіх наведених розрахунках коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$,

У статті всі розрахунки проводили з використанням загальної теорії тонких оболонок [23]. Для порівняння отримуваних результатів також використовували технічну теорію [24], що окремо зазначено у тексті.

У табл. 1 наведено значення перших п'яти безрозмірних частот ω_i , $i = \overline{1,5}$, неосесиметричних коливань ($n = 1$) оболонки залежно від числа членів N у розкладах (13) при

Таблиця 1. Значення перших п'яти частот ω_i коливань оболонки ($n = 1$) залежно від числа членів N у розкладах (13) при $\vartheta_0 = 180^\circ$

N	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$\delta = 100$					
8	0,70100	0,83043	0,88686	0,91889	1,18323
10	0,70100	0,83037	0,88218	0,90970	0,94241
12	0,70100	0,83037	0,88198	0,90889	0,92806
14	0,70100	0,83037	0,88197	0,90886	0,92655
16	0,70100	0,83037	0,88197	0,90886	0,92646
$\delta = 1000$					
8	0,70094	0,83000	0,88454	0,91062	1,18322
10	0,70094	0,82995	0,88070	0,90578	0,92480
12	0,70094	0,82995	0,88058	0,90548	0,92004
14	0,70094	0,82995	0,88058	0,90547	0,91957
16	0,70094	0,82995	0,88058	0,90547	0,91955

Таблиця 2. Значення функцій U_1 , V_1 , W_1 ($n = 1$) для першої форми коливань оболонки у точці $\vartheta = 18^\circ$ залежно від числа членів N у розкладах (13) при $\vartheta_0 = 180^\circ$

N	U_1	V_1	W_1
$\delta = 100$			
10	0,43738	-0,51422	0,58779
12	0,43744	-0,51427	0,58790
14	0,43744	-0,51427	0,58789
16	0,43744	-0,51427	0,58789
$\delta = 1000$			
10	0,43736	-0,51417	0,58769
12	0,43743	-0,51423	0,58779
14	0,43743	-0,51423	0,58779
16	0,43743	-0,51423	0,58779

$\vartheta_0 = 180^\circ$, для двох значень параметра δ . Результати табл. 1 показують, що запропоновані координатні функції дозволяють розраховувати з високим ступенем точності нижчі частоти коливань як для оболонок середньої товщини, так і для досить тонких оболонок при невеликій кількості наближень у методі Рітца.

Дані табл. 2 свідчать про швидку збіжність обчислювального процесу також при визначенні форм коливань сферичної оболонки. Тут і далі нормування власних форм коливань оболонки обирали з умови $W_{1,1}(\vartheta_0/4) = 1$.

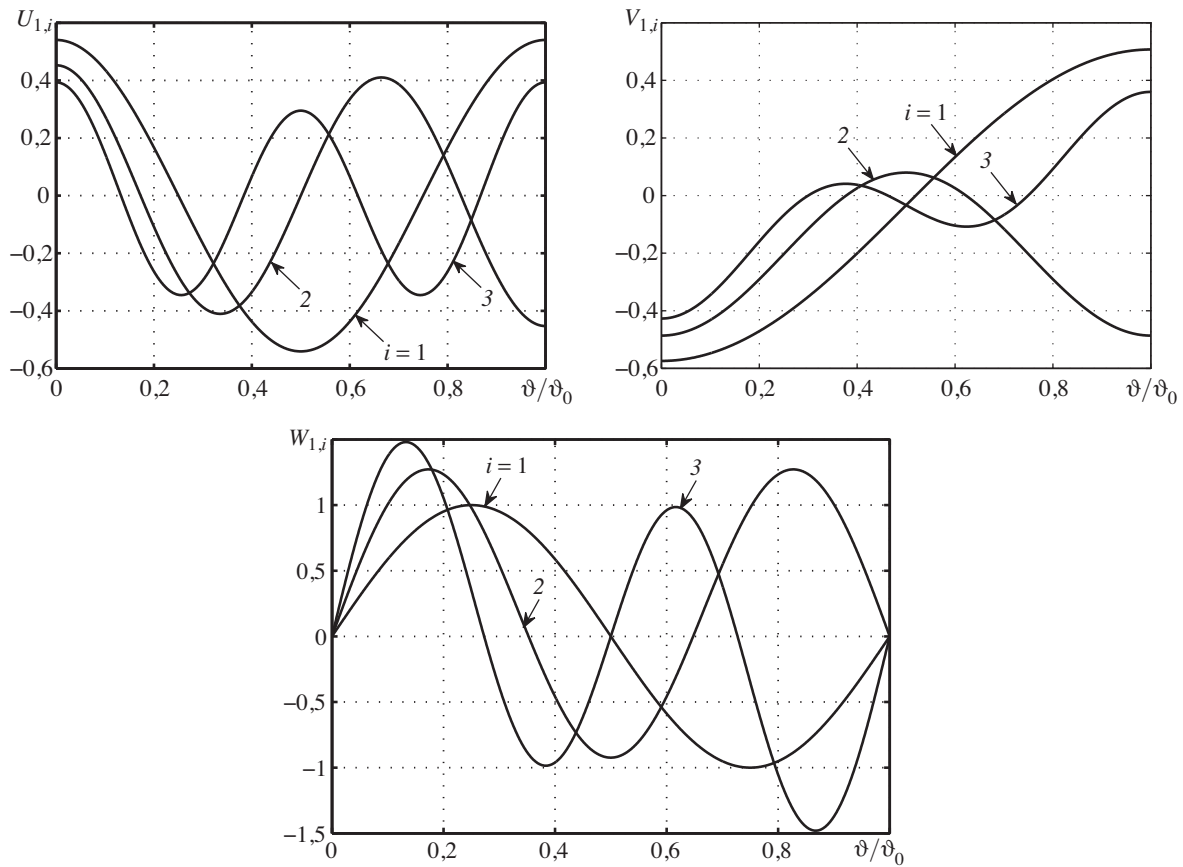


Рис. 2. Перші три форми вільних коливань сферичної оболонки $U_{1,i}$, $V_{1,i}$, $W_{1,i}$, $i = 1, 2, 3$, при $n = 1$, $\delta = 100$, $\vartheta_0 = 180^\circ$.

На рис. 2 показано поведінку перших трьох форм вільних коливань сферичної оболонки $U_{1,i}$, $V_{1,i}$, $W_{1,i}$, $i = 1, 2, 3$, при $n = 1$, $\delta = 100$, $\vartheta_0 = 180^\circ$.

Зауважимо, що при обчисленні інтегралів для визначення коефіцієнтів матриць A і B алгебраїчної системи (16) використовували чисельний метод Гауса, що дозволило проводити інтегрування безпосередньо від 0 до 180° , уникаючи при цьому особливості, коли $r = 0$. Також зауважимо, що при $n = 1$ з розгляду виключено форми коливань, які відповідають поступальному та обертальному руху оболонки як твердого тіла.

У табл. 3 наведено значення частот $c_{n,1} = \omega_{n,1}\delta\sqrt{2(1+\nu)/(1-\nu^2)}$ першої форми коливань сферичної оболонки, отримані у цій роботі (перший рядок), а також обчислені у роботі [8] (другий рядок). Порівняння представлених результатів вказує на їхню хорошу узгодженість.

У табл. 4 наведено значення нижчих частот першої форми коливань сферичної оболонки при $\vartheta_1 = 0^\circ$, отримані у цій роботі за загальною та технічною теоріями оболонок (перший та другий рядки). Дані табл. 4 свідчать, що результати розрахунків частот за технічною теорією оболонок можуть бути дещо завищеними.

Висновки. У цій статті на основі методу Рітца запропоновано підхід до розв'язування задачі про вільні неосесиметричні коливання пружної тонкостінної сферичної оболонки. У рамках одного алгоритму проведено розрахунки як з використанням загальної теорії тонких пружних оболонок, так і з застосуванням технічної теорії. Як і слід було очікувати,

Таблиця 3. Значення частот $c_{n,1}$ першої форми коливань сферичної оболонки при $\vartheta_1 = 0^\circ$, отримані у цій роботі (перший рядок), а також обчислені у роботі [8] (другий рядок)

ϑ_2	n	δ			
		25	50	100	200
60°	2	3,086	3,145	3,184	3,210
		3,085	3,145	3,184	3,210
	3	7,650	7,931	8,132	8,267
		7,647	7,929	8,132	8,267
	4	13,666	14,354	14,902	15,284
		13,659	14,350	14,901	15,284
150°	2	6,322	6,991	7,430	7,712
		6,315	6,989	7,429	7,710
	3	16,831	19,489	21,376	22,651
		16,811	19,479	21,372	22,645
	4	28,563	34,507	38,925	42,091
		28,538	34,489	38,917	42,076

Таблиця 4. Значення перших п'яти частот коливань сферичної оболонки ω_i при $n = 1$, $\vartheta_1 = 0^\circ$, $\delta = 100$ (другий рядок — результати, отримані з використанням технічної теорії оболонок)

ϑ_2	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
30°	0,96300	1,13532	1,56813	2,28551	3,19428
	0,96378	1,13736	1,57112	2,28895	3,19426
60°	0,90000	0,94503	0,99124	1,07782	1,22524
	0,90027	0,94561	0,99239	1,07962	1,22763
90°	0,83605	0,90919	0,93843	0,96490	1,00292
	0,83619	0,90950	0,93896	0,96577	1,00420
120°	0,76623	0,87383	0,91304	0,93496	0,95415
	0,76632	0,87403	0,91338	0,93547	0,95489
150°	0,71748	0,84290	0,89168	0,91696	0,93393
	0,71756	0,84306	0,89195	0,91733	0,93444
180°	0,70100	0,83037	0,88197	0,90886	0,92646
	0,70107	0,83052	0,88223	0,90924	0,92698

використання технічної теорії може приводити до отримання дещо завищених частот щодо загальної теорії оболонок. Для прийнятих граничних умов вільного кріплення торців

оболонки вдається частково уникнути відомої особливості, коли радіус кола, утвореного паралеллю оболонки r , дорівнює нулю. Запропонований підхід дозволяє обчислювати нижчі власні частоти та форми коливань оболонки при невеликій кількості наближень у методі Рітца. Також показано, що за цих граничних умов товщина оболонки не впливає на швидкість збіжності обчислювального процесу. Достовірність отриманих у цій роботі результатів підтверджено їх порівнянням із результатами з [8].

Автор заявляє про відсутність конфлікту інтересів. Усі необхідні дані містяться в статті. Роботу виконано за часткової фінансової підтримки за проєктом “Математичне моделювання складних динамічних систем і процесів, викликаних державною безпекою”, реєстраційний № 0123U100853.

Література

1. A. Kalnins, P. M. Naghdi, *Axisymmetric vibrations of shallow elastic spherical shells*, J. Acoust. Soc. Amer., **32**, № 3, 342–347 (1960).
2. A. Kalnins, *Axisymmetric vibrations of shallow elastic spherical shells*, J. Acoust. Soc. Amer., **33**, № 8, 1102–1107 (1961).
3. P. M. Naghdi, A. Kalnins, *On vibrations of elastic spherical shells*, J. Appl. Mech., 65–72 (1962).
4. A. Kalnins, *Free vibration of rotationally symmetric shell*, J. Acoust. Soc. Amer., **36**, № 7, 1355–1365 (1964).
5. H. Kraus, *Thermally induced vibrations of thin nonshallow spherical shells*, AIAA J., **4**, № 3, 500–505 (1966).
6. M. S. Zarghamee, A. R. Robinson, *A numerical method for analysis of free vibration of spherical shells*, AIAA J., **5**, № 7, 1355–1365 (1967).
7. S. Mirza, A. V. Singh, *Free vibration of deep spherical sandwich shells*, J. Engrg. Math., **8**, № 1, 71–79 (1974).
8. F. I. Niordson, *Free vibrations of thin elastic spherical shells*, Internat. J. Solids Struct., **20**, № 7, 667–687 (1984).
9. T. Irie, G. Yamada, Y. Muramoto, *Free Vibration of a point-supported spherical shell*, J. Appl. Mech., **52**, 890–896 (1985).
10. R. Mingsian R. Bai, Kuorung Wu, *Free vibration of a thin spherical shell containing a compressible fluid*, J. Acoust. Soc. Amer., **95**, № 6, 3300–3310 (1994).
11. Ding Haojiang, Chen Weiqiu, *Exact shell theory analysis of free vibrations of submerged thin spherical shells*, Internat. J. Solids Struct., **35**, № 33, 4381–4389 (1998).
12. Arthur W. Leissa, Jae-Hoon Kang, *Three-dimensional vibration analysis of thick shells of revolution*, J. Eng. Mech., **125**, 1365–1371 (1999).
13. Sh. Jae-Hoon Kang, Arthur W. Leissa, *Three-dimensional vibrations of thick spherical shell segments with variable thickness*, Internat. J. Solids Struct., **37**, 4811–4823 (2000).
14. Oliver Thomas, C. Touze, A. Chaigne, *Non-linear vibrations of free-edge thin spherical shells: modal interaction rules and 1:1:2 internal resonance*, Internat. J. Solids Struct., **42**, 3339–3373 (2005).
15. E. Artioli, E. Viola, *Free vibration analysis of spherical caps using a G.D.Q. numerical solution*, J. Pressure Vessel Technol., **128**, 370–378 (2006).
16. Thomas A. Duffey, Jason E. Pepin, Amy N. Robertson, Michael L. Steinzig, *Kimberly Coleman vibrations of complete spherical shells with imperfections*, J. Vibr. Acoust., **129**, 363–370 (2007).
17. Sh. Jae-Hoon Kang, *Vibrations of hemi-spherical shells of revolution with eccentricity from a three-dimensional theory*, J. Vibr. Control, **8**, № 13, 2017–2030 (2011).
18. R. Zaera, J. Fernandez-Saez, J. A. Loya, *Axisymmetric free vibration of closed thin spherical nano-shell*, Compos. Struct., **104**, 154–161 (2013).

19. E. Ghavanloo, H. Rafii-Tabar, S. A. Fazelzadeh, *New insights on nonlocal spherical shell model and its application to free vibration of spherical fullerene molecules*, Internat. J. Mech. Sci., 161 – 162 (2019).
20. Koji Sekine, *Free vibration characteristics of thin spherical shells*, EPI Int. J. Eng., **4**, № 2, 196 – 203 (2021).
21. В. А. Троценко, Ю. В. Троценко, *Решение задачи о собственных колебаниях незамкнутой оболочки вращения в условиях ее сингулярного возмущения*, Нелін. коливання, **8**, № 3, 415 – 432 (2005).
22. Ю. В. Троценко, *О построении координатных функций для метода Рунца при расчете неосесимметричных собственных колебаний оболочки вращения в форме купола*, Нелін. коливання, **18**, № 4, 555 – 574 (2015).
23. В. В. Новожилов, *Теория тонких оболочек*, Судостроение, Ленинград (1962).
24. В. З. Власов, *Общая теория оболочек и ее приложения в технике*, Гостехиздат, Москва, Ленинград (1949).

*Одержано 13.06.23,
після доопрацювання — 26.06.23*