

УМОВИ СТІЙКОСТІ ВХОДУ ЗА СТАНОМ ДЛЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ З ПОСТІЙНИМИ ОПЕРАТОРАМИ

Євген Панасенко

*Запорізький національний університет
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, 69600, Україна
e-mail: panasenko.yevgeniy@gmail.com*

Олександр Покутний

*Київський національний університет імені Т. Шевченка
просп. акад. Глушкова, 4-Е, Київ, 03022, Україна
Інститут математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна
e-mail: lenasas@gmail.com, відповідальний за листування*

We investigate conditions of the input-to-state stability and controllability for the operator-differential boundary-value problem.

Досліджено умови стійкості входу за станом і керованості для операторно-диференціальної крайової задачі.

Вступ. Поняття стійкості вхід-стан (input-to-state stability (ISS)) введено у роботах Sontag [1 – 3] для звичайних диференціальних рівнянь, об'єднує класичну теорію Ляпунова і теорію стійкості входу-стану та має широке коло застосувань у теорії нелінійного керування, зокрема, для стабілізації нелінійних систем.

Також варто виділити роботи, присвячені умовам ISS і їхнім застосуванням [4 – 9]. У працях С. Дашковського та О. Капустяна розглядаються такі задачі, як знаходження локальних умов ISS збурених нелінійних рівнянь реакції-дифузії [4], досліджується стійкість нелінійної системи для параболічного рівняння у частинних похідних, на яку впливають зовнішні збурення. Авторами розроблено підхід для побудови відповідної коерцитивної функції Ляпунова, за допомогою якої встановлюється коректність розглянутої системи та визначаються умови, які гарантують властивість ISS [5]. У цій статті показано, яким чином можна дослідити умови ISS для крайової задачі з постійними операторами. Запропонований підхід дає можливість досліджувати аналогічне питання й у випадку імпульсних крайових задач, що започатковано у монографії Перестюка, Самойленка [10]. Такі задачі мають практичні застосування, зокрема, у задачах керованості диференціальними системами. Так, запропонований у [10] підхід до дослідження періодичних імпульсних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь узагальнено й успішно застосовано на випадок нетерових і нормально розв'язних крайових задач у [11].

2. Постановка задачі. Розглянемо крайову задачу керованості

$$\begin{cases} x'(t) = -Ax(t) + Bu, & t \in [0, T], \\ (I - D)x(t_1) = \alpha. \end{cases} \quad (1)$$

Загальний розв'язок має вигляд

$$x(t) = e^{-tA}C + \int_0^t e^{-(t-\tau)A}Bu \, d\tau, \quad (2)$$

де A, B, D — лінійні та обмежені оператори $\|D\| \leq q$ у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, $\alpha \in \mathcal{H}$, $A, B, D \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Будемо розглядати випадок, коли оператор A має обмежений обернений A^{-1} , $t_1 \in [0, T]$. Оскільки оператори постійні, то отримуємо зображення

$$\int_0^t e^{-(t-\tau)A}Bu \, d\tau = A^{-1}Bu - A^{-1}e^{-tA}Bu.$$

Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння можна подати у такому вигляді:

$$x(t) = e^{-tA}C + A^{-1}Bu - A^{-1}e^{-tA}Bu.$$

Оскільки оператори в рівнянні (1) постійні й обмежені, то неперервна диференційовність відповідних розв'язків безпосередньо випливає з означень. Підставляючи (2) у крайову умову, отримуємо рівність

$$\begin{aligned} x(t_1) - Dx(t_1) &= e^{-t_1A}C + A^{-1}Bu - A^{-1}e^{-t_1A}Bu \\ &\quad - De^{-t_1A}C - DA^{-1}Bu + DA^{-1}e^{-t_1A}Bu = \alpha. \end{aligned}$$

Випадок 1. Припустимо, що існує обернений оператор $(I - D)^{-1}$. Враховуючи, що $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, одержуємо, що оператор C має вигляд

$$C = e^{t_1A}(I - D)^{-1}\alpha - e^{t_1A}(A^{-1}Bu - A^{-1}e^{-t_1A}Bu).$$

Тоді

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-tA}e^{t_1A}(I - D)^{-1}\alpha - e^{-tA}e^{t_1A}(A^{-1}Bu - A^{-1}e^{-t_1A}Bu) + A^{-1}Bu - A^{-1}e^{-tA}Bu \\ &= e^{-(t-t_1)A}(I - D)^{-1}\alpha - e^{-(t-t_1)A}(A^{-1}Bu - A^{-1}e^{-t_1A}Bu) + A^{-1}Bu - A^{-1}e^{-tA}Bu. \end{aligned}$$

Із цього зображення розв'язку випливає оцінка

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq e^{-(t-t_1)\|A\|} \|I - D\|^{-1} \|\alpha\| \\ &\quad + e^{-(t-t_1)\|A\|} \left(\|A^{-1}\| \|Bu\| + \|A^{-1}\| e^{-t_1\|A\|} \|Bu\| \right) \\ &\quad + \left(\|A^{-1}\| + \|A^{-1}\| e^{-t\|A\|} \right) \|Bu\|. \end{aligned}$$

При отриманні останніх оцінок ми використовуємо звичайне зображення розв'язку й те, що оператори, які входять у рівняння та умови, є обмеженими. У подальших оцінках будемо використовувати нерівності $e^{-t\|A\|} \leq 1$, $e^{-t_1\|A\|} \leq 1$, коли будемо збирати відповідні доданки в нерівностях при керуванні й при параметрі α з імпульсної умови (для отримання умов стійкості входу за станом монотонна залежність від часу вимагається тільки при отриманні оцінок на параметр крайової умови). Використовуючи ці оцінки, бачимо, що в останніх двох доданках нерівності вирази однаково оцінюються й можна винести за дужки відповідний множник:

$$\|x(t)\| \leq e^{-t\|A\|} e^{t_1\|A\|} \|I - D\|^{-1} \|\alpha\| + 2(e^{t_1\|A\|} + 1) \|A^{-1}\| \|Bu\|.$$

Якщо $\|D\| \leq q < 1$, то

$$\|(I - D)^{-1}\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|D\|^k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}.$$

Таким чином, отримуємо оцінку

$$\|x(t)\| \leq \frac{e^{-t\|A\|}}{1 - q} e^{t_1\|A\|} \|\alpha\| + 2(e^{t_1\|A\|} + 1) \|A^{-1}\| \|Bu\|.$$

З неї випливає така теорема.

Теорема 1. Для розв'язку крайової задачі виконуються умови ISS з функціями

$$\beta(s, t) = \frac{se^{-t\|A\|}}{1 - q} e^{t_1\|A\|}, \quad \gamma(r) = 2(e^{t_1\|A\|} + 1) \|A^{-1}\| \|B\| r.$$

Випадок 2. Розглянемо випадок, коли існує $(I - D)^+$. Тоді крайова умова приводить до операторного рівняння

$$(I - D)e^{-t_1A}C = \alpha - (I - D)A^{-1}(Bu - e^{-t_1A}Bu). \quad (3)$$

Позначимо $Q = (I - D)e^{-t_1A}$. Тоді з умови існування псевдооберненого до $I - D$ випливає, що оператор Q завжди має псевдообернений Q^+ . На відміну від першого випадку, задача керованості (1) буде не завжди розв'язною. Необхідною й достатньою умовою розв'язності буде така:

$$P_{N(Q^*)}(\alpha - (I - D)A^{-1}(Bu - e^{-t_1A}Bu)) = 0. \quad (4)$$

За виконання цієї умови операторне рівняння (3) має множину розв'язків

$$C = Q^+(\alpha - (I - D)A^{-1}(Bu - e^{-t_1A}Bu)) + P_{N(Q)}\bar{C} \quad \forall \bar{C} \in \mathcal{H}. \quad (5)$$

Зауваження. Слід зауважити, що оператор Q завжди має узагальнено-обернений Q^- , який має вигляд

$$Q^- = e^{t_1A}(I - D)^+.$$

Тоді множина розв'язків операторного рівняння (3) може бути зображена таким чином:

$$C = e^{t_1A}(I - D)^+\alpha - e^{t_1A}(I - P_{N(I-D)})A^{-1}(Bu - e^{-t_1A}Bu) + P_{N(Q)}\bar{C} \quad \forall \bar{C} \in \mathcal{H}.$$

У цьому випадку загальний розв'язок крайової задачі буде мати вигляд

$$\begin{aligned} x(t, \overline{C}) &= e^{-tA} e^{t_1 A} (I - D)^+ \alpha \\ &\quad - e^{-tA} (I - P_{N(I-D)}) A^{-1} (Bu - e^{-t_1 A} Bu) \\ &\quad + e^{-tA} P_{N(Q)} \overline{C} + A^{-1} Bu - A^{-1} e^{-tA} Bu. \end{aligned}$$

З отриманого зображення отримуємо оцінку на норму кожного розв'язку

$$\begin{aligned} \|x(t, \overline{C})\| &\leq e^{-t\|A\|} e^{t_1\|A\|} \|(I - D)^+\| \|\alpha\| \\ &\quad + 2 \left(e^{t_1\|A\|} + 1 \right) \|A^{-1}\| \|Bu\| + \|P_{N(Q)}\| \|\overline{C}\|, \end{aligned}$$

що аналогічна до одержаної вище. Різниця в тому, що ми не можемо здобути більш точну оцінку на норму псевдооберненого оператора $(I - D)^+$ без додаткових умов, і у цій оцінці з'являється доданок, який містить оцінку на норму сталого елемента $\overline{C}$ (визначається довільним чином). Таким чином, приходимо до такої теореми.

Теорема 2 (достатня умова ISS). *За виконання умови*

$$P_{N(Q^*)}(\alpha - (I - D)A^{-1}(Bu - e^{-t_1 A} Bu)) = 0 \quad (6)$$

задача керуваності розв'язна й для кожного розв'язку справедлива оцінка

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq e^{-t\|A\|} e^{t_1\|A\|} \|(I - D)^+\| \|\alpha\| \\ &\quad + 2 \left(e^{t_1\|A\|} + 1 \right) \|A^{-1}\| \|Bu\| + \|P_{N(Q)}\| \|\overline{C}\|. \end{aligned}$$

Умови керуваності. З умови (6) можемо отримати операторне рівняння стосовно керування u :

$$Lu = P_{N(Q^*)}\alpha, \quad (7)$$

де оператор L має вигляд

$$L := P_{N(Q^*)}(I - D)A^{-1}(I - e^{t_1 A})B.$$

Припустимо, що оператор L має псевдообернений за Муром–Пенроузом L^+ [15]. Тоді необхідна й достатня умова розв'язності рівняння (7) має вигляд

$$P_{N(L^*)}P_{N(Q^*)}\alpha = 0.$$

За виконання цієї умови множина керувань набуває вигляду

$$u = L^+ P_{N(Q^*)}\alpha + P_{N(L)}\bar{u} \quad \forall \bar{u} \in \mathcal{H}.$$

Таким чином, приходимо до такої теореми.

Теорема 3 (достатні умови керованості).

а) *Задача (1) керована тоді й тільки тоді, коли для елемента α виконується умова*

$$P_{N(L^*)}P_{N(Q^*)}\alpha = 0. \quad (8)$$

При виконанні цієї умови множина керувань має вигляд

$$u = L^+P_{N(Q^*)}\alpha + P_{N(L)}\bar{u} \quad \forall \bar{u} \in \mathcal{H}. \quad (9)$$

б) *Умова*

$$P_{N(L^*)}P_{N(Q^*)} = 0$$

є достатньою умовою керованості для довільного елемента α . При цьому множина керувань має вигляд (9).

Приклад. Розглянемо двовимірний випадок. Нехай матриці A , B і D мають вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

точка $t_1 = 1/2$, вектор $\alpha = (4, 3)^T$. Неважко показати, що $\|A\| = 3$, $\|B\| = 5$, $\|D\| = 2/3$, $\|A^{-1}\| = 3/4$, $\|\alpha\| = 5$. З теореми 1 випливає така оцінка для розв'язку:

$$\|x(t)\| \leq 15e^{3/2-3t} + \frac{15}{4}(3 + e^{3/4})\|u\|.$$

Висновки. Зауважимо, що побудована теорія працює й у випадку необмеженого оператора A . У цьому випадку необхідна умова для генератора напівгрупи e^{-tA} , що породжується цим оператором. Достатньо, щоб ця напівгрупа була або додатного скінченного типу, або була експоненціально-дихотомічною [12, 13]. За цих умов можна отримати відповідні оцінки без припущення оборотності оператора A . Більш того, використовуючи техніку, що запропонована у роботі [14], можна аналогічним чином встановити умови узагальненої розв'язності й відповідної стійкості без припущення нормальної розв'язності відповідних операторів L_i , $I - D$, L . До того ж, аналогічним чином можна досліджувати й імпульсні крайові задачі, що передбачаємо зробити у подальших роботах.

Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів. Усі необхідні дані містяться в статті. Підтримано науковою темою Відділення цільової підготовки Київського національного університету імені Тараса Шевченка при НАН України на 2022 – 2023 рр., 3М2022, 0122U002463.

Література

1. E. D. Sontag, *Comments on integral variants of ISS*, Systems Control Lett., **34**(1-2), 93 – 100 (1998).
2. E. D. Sontag, *Smooth stabilization implies coprime factorization*, IEEE Trans. Automat. Control, **34**(4), 435 – 443 (1989).
3. E. D. Sontag, Y. Wang, *On characterizations of the input-to-state stability property*, Systems Control Lett., **24**(5), 351 – 359 (1995).
4. S. Dashkovskiy, O. Kapustyan, J. Schmid, *A local input-to-state stability result w.r.t. attractors of nonlinear reaction-diffusion equations*, Math. Control Signals Systems, **32**, 309 – 326 (2020); DOI: <https://doi.org/10.1007/s00498-020-00256-w>.

5. S. Dashkovskiy, O. Kapustyan, V. Slynko, *Well-posedness and robust stability of a nonlinear ODE-PDE system*, arXiv.org (2103.15747 [math.AP]): 1–45 (2021); DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2103.15747>.
6. B. Jacob, A. Mironchenko, *Noncoercive Lyapunov functions for input-to-state stability of infinite-dimensional systems*, arXiv.org, (1911.01327 [math.OC]): 1–27 (2019); DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1911.01327>.
7. A. Mironchenko, C. Prieur, *Input-to-state stability of infinite-dimensional systems: recent results and open questions*, arXiv.org, (1910.01714 [math.OC]): 1–83 (2020); DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1910.01714>.
8. S. Dashkovskiy, V. Slynko, *Dwell-time stability conditions for infinite dimensional impulsive systems*, *Automatica*, **147**, 1–12 (2023); DOI: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2022.110695>.
9. A. Mironchenko, F. Wirth, *Lyapunov characterization of input-to-state stability for semilinear control systems over Banach spaces*, *Systems Control Lett.*, **119**, 64–70 (2018).
10. A. M. Samoilenko, N. A. Perestyuk, *Impulsive differential equations*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ (1995); DOI: <https://doi.org/10.1142/2892>.
11. А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко, *Нормально разрешимые краевые задачи*, Наукова думка, Київ (2019).
12. S. G. Krein, *Linear differential equations in Banach space*, American Mathematical Society, Providence, RI (1971).
13. Yu. L. Daleckii, M. G. Krein, *Stability of solutions of differential equations in Banach space*, American Mathematical Society, Providence, RI (1974).
14. Є. В. Панасенко, О. О. Покутний, *Імпульсна крайова задача для рівняння Ляпунова у просторі Гільберта, Нелін. коливання*, **25**, № 4, 361–369 (2022).
15. О. А. Бойчук, О. О. Покутний, *Нормально-розв'язні крайові задачі для операторно-диференціальних рівнянь*, Наукова думка, Київ (2022); DOI: <https://doi.org/10.37863/2843457491-61>.

Одержано 05.09.23,
після доопрацювання — 15.11.23