

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є – СТІЛТЬЕСА РОЗПОДІЛУ ОДНОГО ВИПАДКОВОГО СТЕПЕНЕВОГО РЯДУ

Олег Макаrchук

Інститут математики НАН України

вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна

e-mail: makolpet@gmail.com

We investigate the asymptotic properties of the Fourier – Stieltjes transform of the distribution of a random variable with independent s -adic digits. We find the necessary and sufficient conditions for the zero value of the upper bound at infinity of the modulus of the corresponding Fourier – Stieltjes transform.

Досліджено асимптотичні властивості перетворення Фур'є – Стілтєса розподілу випадкової величини з незалежними s -ковими цифрами. Акцент зроблено на знаходженні необхідних і достатніх умов рівності нулю значення верхньої межі на нескінченності модуля відповідного перетворення Фур'є – Стілтєса.

1. Вступ. Нехай $F(x)$ — функція розподілу. Для перетворення Фур'є – Стілтєса функції $F(x)$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x)$$

розглянемо величину

$$L(F) = \lim_{|t| \rightarrow +\infty} \sup |f(t)|.$$

Якщо $F(x)$ є функцією стрибків, то відомо [1], що $L(F) = 1$, адже $f(t)$ є майже періодичною функцією. Якщо $F(x)$ абсолютно неперервна, то $L(F) = 0$. Якщо функція $F(x)$ є сингулярною, то $L(F)$ може набувати довільного значення з відрізка $[0; 1]$.

Приклад сингулярної функції $G(x)$, для якої $L(G) = 0$, наведено в роботі [2]. Приклади сингулярних функцій $G(x)$ таких, що $L(G) = 1$, наведено в [3, 4]. У роботі [5] для кожного заданого $a \in [0; 1]$ побудовано сингулярну функцію $G(x)$ таку, що $L(G) = a$.

Нехай s — натуральне число більше одиниці, (ψ_k) — послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень $0, 1, \dots, s-1$ з імовірностями $p_{0k}, p_{1k}, \dots, p_{(s-1)k}$ відповідно. Розглянемо випадкову величину

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k s^{-k}.$$

Необхідні й достатні умови того, що $L(F_\psi) = 0$, одержано в роботах [6, 7] для випадків $s = 2$, $s = 3$ відповідно.

У цій статті для кожного натурального $s \geq 4$ знайдено необхідні й достатні умови того, що $L(F_\psi) = 0$.

2. Необхідні й достатні умови того, що $L(F_\psi) = 0$. Для кожного натурального n і $j \in \{1, \dots, s-1\}$ позначимо

$$B_{jn} = \sum_{\substack{1 \leq i < k \leq s-1 \\ k-i=j}} p_{in} p_{kn},$$

$$f_n(x) = 1 - \sum_{j=1}^{s-1} 4B_{jn} \sin^2(xj),$$

$$g_{n-1}(x) = \prod_{k=1}^{+\infty} f_{n-1+k}\left(\frac{x}{2s^k}\right).$$

Теорема 1. Рівність $L(F_\psi) = 0$ справджується тоді й тільки тоді, коли для кожного $j \in \{0; 1, \dots, s-1\}$ виконується умова

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{jn} = \frac{1}{s}. \quad (1)$$

Доведення. У [6, 7] показано, що рівність $L(F_\psi) = 0$ справедлива тоді й тільки тоді, коли виконується умова (1), тому нехай у подальшому $s \geq 4$. Зрозуміло, що

$$f_\psi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_\psi(x) = M(e^{it\psi}) = \prod_{k=1}^{+\infty} M\left(e^{\frac{it\psi_n}{s^n}}\right).$$

Таким чином, маємо

$$\begin{aligned} \left| M\left(e^{\frac{it\psi_n}{s^n}}\right) \right|^2 &= \left(\sum_{k=0}^{s-1} p_{kn} \cos\left(\frac{kt}{s^n}\right) \right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{s-1} p_{kn} \sin\left(\frac{kt}{s^n}\right) \right)^2 \\ &= \sum_{k=0}^{s-1} p_{kn}^2 + \sum_{1 \leq j < l \leq s-1} 2p_{jn} p_{ln} \left(\cos\left(\frac{jt}{s^n}\right) \cos\left(\frac{lt}{s^n}\right) + \sin\left(\frac{jt}{s^n}\right) \sin\left(\frac{lt}{s^n}\right) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{s-1} p_{kn}^2 + \sum_{1 \leq j < l \leq s-1} 2p_{jn} p_{ln} \left(\cos\left(\frac{(j-l)t}{s^n}\right) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{s-1} p_{kn}^2 + \sum_{1 \leq j < l \leq s-1} 2p_{jn} p_{ln} \left(1 - 2 \sin^2\left(\frac{(j-l)t}{2s^n}\right) \right) \\ &= 1 - \sum_{1 \leq j < l \leq s-1} 4p_{jn} p_{ln} \left(\sin^2\left(\frac{(j-l)t}{2s^n}\right) \right) \\ &= 1 - \sum_{j=1}^{s-1} 4B_{jn} \sin^2\left(\frac{jt}{2s^n}\right) = f_n\left(\frac{t}{2s^n}\right). \end{aligned}$$

Отже, одержуємо рівність

$$|f_\psi(t)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_\psi(x) \right|^2 = g_0(t).$$

Нехай $L(F_\psi) = 0$.

Розглянемо окремі випадки.

Випадок А. Нехай $s = 2q + 1$ — непарне число. Зрозуміло, що для кожного значення $l \in \{1, \dots, q\}$ маємо

$$|f_\psi(2\pi l s^{n-1})|^2 = g_{n-1}(2\pi l) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty. \quad (2)$$

Для кожного значення $l \in \{1, \dots, q\}$ розглянемо неперервну функцію

$$F_l(x_0; x_1, \dots, x_{s-1}) = \left(\sum_{k=0}^{s-1} x_k \cos\left(\frac{2\pi l k}{s^2}\right) \right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{s-1} x_k \sin\left(\frac{2\pi l k}{s^2}\right) \right)^2$$

на компактї $A = \{(y_0; y_1, \dots, y_{s-1}) \mid y_0 + y_1 + \dots + y_{s-1} = 1; y_0, y_1, \dots, y_{s-1} \geq 0\}$.

Припустимо, що для деякої точки $(z_0; z_1, \dots, z_{s-1}) \in A$ виконується рівність

$$F_l(z_0; z_1, \dots, z_{s-1}) = 0,$$

звідки

$$\left(\sum_{k=1}^{s-1} z_k \sin\left(\frac{2\pi l k}{s^2}\right) \right)^2 = 0,$$

тому $z_1 = \dots = z_{s-1} = 0$, але $F_l(1; 0, \dots, 0) = 1 > 0$.

Отже, для кожного $l \in \{1, \dots, q\}$ існує

$$\min_{(x_0; x_1, \dots, x_{s-1})} F_l(z_0; z_1, \dots, z_{s-1}) = G(l; s) > 0.$$

Зрозуміло, що для кожного натурального $k \in N$

$$\sum_{0 \leq j < l \leq i-1} 4p_{jk}p_{lk} = 2 - 2 \sum_{j=0}^{m-1} p_{jn}^2 < 2,$$

тому, враховуючи $|\sin(x)| \leq |x|$ для кожного дійсного x , одержуємо

$$\begin{aligned} \prod_{k=3}^{+\infty} \left(1 - \sum_{j=1}^{s-1} 4B_{j(n+k)} \sin^2\left(\frac{2\pi j l}{s^k}\right) \right) &\geq \prod_{k=3}^{+\infty} \left(1 - \sum_{j=1}^{s-1} 4B_{j(n+k)} \sin^2\left(\frac{2\pi j l}{s^k}\right) \right) \\ &\geq \prod_{k=3}^{+\infty} \left(1 - \sum_{j=1}^{s-1} 4B_{j(n+k)} \left(\frac{2\pi j l}{s^k}\right)^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \prod_{k=3}^{+\infty} \left(1 - \frac{(s-1)^2}{s^{2k}} \sum_{j=1}^{s-1} 4B_{j(n+k)} \right) \\ &\geq \prod_{k=3}^{+\infty} \left(1 - \frac{2(s-1)^2}{s^{2k}} \right) > 0. \end{aligned}$$

Таким чином, умови (2) виконуються тільки тоді, коли для кожного числа $l \in \{1, \dots, q\}$

$$\left(\sum_{k=0}^{s-1} p_{kn} \cos\left(\frac{2\pi lk}{s}\right) \right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{s-1} p_{kn} \sin\left(\frac{2\pi lk}{s}\right) \right)^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

При $l \in \{1, \dots, q\}$ позначимо

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{s-1} p_{kn} \cos\left(\frac{2\pi lk}{s}\right) &= A_{ln}, \\ \sum_{k=0}^{s-1} p_{kn} \sin\left(\frac{2\pi lk}{s}\right) &= B_{ln}. \end{aligned}$$

Зрозуміло, що для кожного $l \in \{1, \dots, q\}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_{ln} = \lim_{n \rightarrow +\infty} B_{ln} = 0.$$

Розглянемо систему лінійних рівнянь щодо $p_{0n}, p_{1n}, \dots, p_{(s-1)n}$:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{s-1} p_{kn} = 1, \\ \sum_{k=0}^{s-1} p_{kn} \cos\left(\frac{2\pi lk}{s}\right) = A_{ln}, \quad l \in \{1, \dots, q\}, \\ \sum_{k=0}^{s-1} p_{kn} \sin\left(\frac{2\pi lk}{s}\right) = B_{ln}, \quad l \in \{1, \dots, q\}. \end{cases}$$

Нехай Δ — визначник матриці, рядками якої є вектори

$$\overline{e}_0 = (1; 1, \dots, 1),$$

$$\overline{e}_l = \left(\cos\left(\frac{2\pi l \cdot 0}{s}\right); \cos\left(\frac{2\pi l \cdot 1}{s}\right), \dots, \cos\left(\frac{2\pi l(s-1)}{s}\right) \right), \quad l \in \{1, \dots, q\},$$

$$\overline{e}_{q+l} = \left(\sin\left(\frac{2\pi l \cdot 0}{s}\right); \sin\left(\frac{2\pi l \cdot 1}{s}\right), \dots, \sin\left(\frac{2\pi l(s-1)}{s}\right) \right), \quad l \in \{1, \dots, q\}.$$

Оскільки

$$\sum_{j=0}^{s-1} \cos(jx) = \frac{\cos(0,5(s-1)x) \sin(0,5sx)}{\sin(0,5x)}, \quad \sin(0,5x) \neq 0,$$

$$\sum_{j=0}^{s-1} \sin(jx) = \frac{\sin(0,5(s-1)x) \sin(0,5sx)}{\sin(0,5x)}, \quad \sin(0,5x) \neq 0,$$

то легко бачити, що

$$\sum_{k=0}^{s-1} \cos\left(\frac{2\pi lk}{s}\right) = 0 \quad \forall l \in Z \setminus \{0\}, \quad (3)$$

$$\sum_{k=0}^{s-1} \sin\left(\frac{2\pi lk}{s}\right) = 0 \quad \forall l \in Z. \quad (4)$$

Отже, маємо

$$\overline{e_0} \cdot \overline{e_0} = 1,$$

$$\overline{e_l} \cdot \overline{e_l} = \sum_{k=0}^{s-1} \cos^2\left(\frac{2\pi lk}{s}\right) = \frac{s}{2} + 0,5 \sum_{k=0}^{s-1} \cos\left(\frac{4\pi lk}{s}\right) = \frac{s}{2} \quad \forall l \in \{1, \dots, q\},$$

$$\overline{e_{q+l}} \cdot \overline{e_{q+l}} = \sum_{k=0}^{s-1} \sin^2\left(\frac{2\pi lk}{s}\right) = \frac{s}{2} - 0,5 \sum_{k=0}^{s-1} \cos\left(\frac{4\pi lk}{s}\right) = \frac{s}{2} \quad \forall l \in \{1, \dots, q\},$$

$$\begin{aligned} \overline{e_l} \cdot \overline{e_r} &= \sum_{k=0}^{s-1} \cos\left(\frac{2\pi lk}{s}\right) \cos\left(\frac{2\pi rk}{s}\right) \\ &= 0,5 \sum_{k=0}^{s-1} \cos\left(\frac{2\pi(l+r)k}{s}\right) + 0,5 \sum_{k=0}^{s-1} \cos\left(\frac{2\pi(l-r)k}{s}\right) = 0 \quad \forall l, r \in \{1, \dots, q\}, \quad l \neq r, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{e_l} \cdot \overline{e_{r+q}} &= \sum_{k=0}^{s-1} \cos\left(\frac{2\pi lk}{s}\right) \sin\left(\frac{2\pi rk}{s}\right) \\ &= 0,5 \sum_{k=0}^{s-1} \sin\left(\frac{2\pi(l+r)k}{s}\right) + 0,5 \sum_{k=0}^{s-1} \sin\left(\frac{2\pi(l-r)k}{s}\right) = 0 \quad \forall l, r \in \{1, \dots, q\}, \quad l \neq r, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{e_{l+q}} \cdot \overline{e_{r+q}} &= \sum_{k=0}^{s-1} \sin\left(\frac{2\pi lk}{s}\right) \sin\left(\frac{2\pi rk}{s}\right) \\ &= 0,5 \sum_{k=0}^{s-1} \cos\left(\frac{2\pi(l-r)k}{s}\right) - 0,5 \sum_{k=0}^{s-1} \cos\left(\frac{2\pi(l+r)k}{s}\right) = 0 \quad \forall l, r \in \{1, \dots, q\}, \quad l \neq r. \end{aligned}$$

Таким чином, визначник Грама системи векторів $\overline{e_0}, \overline{e_1}, \dots, \overline{e_{2q}}$ рівний $\frac{s^{s-1}}{2^{s-1}}$, тому $\Delta \neq 0$.

Розглянемо визначники

$$\Delta_{p_{0n}} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ A_{1n} & \cos\left(\frac{2\pi}{s}\right) & \dots & \cos\left(\frac{2\pi(s-1)}{s}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{qn} & \cos\left(\frac{2\pi q}{s}\right) & \dots & \cos\left(\frac{2\pi(s-1)q}{s}\right) \\ B_{1n} & \sin\left(\frac{2\pi}{s}\right) & \dots & \sin\left(\frac{2\pi(s-1)}{s}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{qn} & \sin\left(\frac{2\pi q}{s}\right) & \dots & \sin\left(\frac{2\pi(s-1)q}{s}\right) \end{pmatrix},$$

$$\Delta_{p_{0n}}(1) = \det \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{s}\right) & \dots & \cos\left(\frac{2\pi(s-1)}{s}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos\left(\frac{2\pi q}{s}\right) & \dots & \cos\left(\frac{2\pi(s-1)q}{s}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{s}\right) & \dots & \sin\left(\frac{2\pi(s-1)}{s}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin\left(\frac{2\pi q}{s}\right) & \dots & \sin\left(\frac{2\pi(s-1)q}{s}\right) \end{pmatrix}.$$

Використовуючи формули Крамера і розкладаючи визначник $\Delta_{p_{0n}}$ за першим стовпцем, маємо

$$p_{0n} = \frac{\Delta_{p_{0n}}}{\Delta} = \frac{\Delta_{p_{0n}}(1) + \sum_{k=1}^q (-1)^{k+1} A_{ln} \Delta_{p_{0n}}(A_{ln}) + (-1)^{k+1+q} B_{ln} \Delta_{p_{0n}}(B_{ln})}{\Delta}$$

$$\rightarrow \frac{\Delta_{p_{0n}}(1)}{\Delta} = p_0^*, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Міркуємо аналогічно стосовно $p_{1n}, p_{2n}, \dots, p_{(s-1)n}$ і їхніх граничних значень $p_1^*, p_2^*, \dots, p_{s-1}^*$ відповідно. Очевидно, що $p_1^*, p_2^*, \dots, p_{s-1}^* \in \epsilon$ є єдиним (адже $\Delta \neq 0$) розв'язком системи

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{s-1} x_k = 1, \\ \sum_{k=0}^{s-1} x_k \cos\left(\frac{2\pi lk}{s}\right) = 0, \quad l \in \{1, \dots, q\}, \\ \sum_{k=0}^{s-1} x_k \sin\left(\frac{2\pi lk}{s}\right) = 0, \quad l \in \{1, \dots, q\}. \end{cases} \quad (5)$$

З іншого боку, враховуючи рівності (3) і (4), легко бачити, що $\left(\frac{1}{s}, \frac{1}{s}, \dots, \frac{1}{s}\right)$ — розв'язок системи (5). Отже, для кожного $l \in \{0, \dots, s-1\}$ маємо

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{ln} = \frac{1}{s}.$$

Випадок Б. Нехай $s = 2q$ — парне число. Міркуючи аналогічно до випадку А, отримуємо

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{s-1} p_{kn} \cos\left(\frac{2\pi lk}{2q}\right) &= 0 \quad \forall l \in \{1, \dots, q\}, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{s-1} p_{kn} \sin\left(\frac{2\pi lk}{2q}\right) &= 0 \quad \forall l \in \{1, \dots, q-1\}. \end{aligned}$$

Повторюючи міркування випадку А, одержуємо умову (1).

Нехай для кожного $l \in \{0, \dots, s-1\}$

$$p_{ln} \rightarrow \frac{1}{s}, \quad n \rightarrow +\infty;$$

покажемо, що $L(F_\psi) = 0$. Припустимо, що $L(F_\psi) > 0$.

Зрозуміло, що

$$L^2(F_\psi) = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} g_0(x).$$

Нехай πt_n — зростаюча необмежена зверху послідовність дійсних чисел така, що

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_0(t_n) = L^2(F_\psi).$$

Далі маємо

$$\begin{aligned} \frac{\pi t_n}{s^{\lfloor \log_s(t_n) \rfloor + 2}} &< \frac{\pi t_n}{s^{\log_s(t_n) + 1}} = \frac{\pi}{s}, \\ \frac{\pi t_n}{s^{\lfloor \log_s(t_n) \rfloor + 2}} &\geq \frac{\pi t_n}{s^{\log_s(t_n) + 2}} = \frac{\pi}{s^2}. \end{aligned}$$

Оскільки послідовність $\frac{\pi t_n}{s^{\lfloor \log_s(t_n) \rfloor + 2}}$ обмежена, то з неї можливо виділити збіжну підпослідовність, тобто існує зростаюча необмежена зверху послідовність дійсних чисел $\tilde{t}_n$ така, що

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} |g_0(\pi \tilde{t}_n)| &= L^2(F_\psi), \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{t}_n}{s^{\lfloor \log_s(\tilde{t}_n) \rfloor + 2}} &= \gamma \in \left[\frac{1}{s^2}, \frac{1}{s}\right]. \end{aligned}$$

Отже, нехай

$$\gamma^*(n) = \frac{\tilde{t}_n}{s^{\lfloor \log_s(\tilde{t}_n) \rfloor + 2}}.$$

Зрозуміло, що існує додатне число A і натуральне число $N(L)$ таке, що для кожного натурального $n > N(L)$

$$B_{1n} > A.$$

Якщо γ не можна подати у вигляді $\frac{a}{s^b}$ для деяких натуральних a, b , то γ має єдине s -кове зображення, причому існує пара цифр (qw) , відмінна від пар (00) та $((s-1)(s-1))$, яка зустрічається нескінченну кількість разів у s -ковому розкладі числа γ . Таким чином,

$$\gamma = \Delta_{\alpha_{01}\alpha_{02}\dots\alpha_{0d_0}qw\alpha_{11}\alpha_{12}\dots\alpha_{1d_1}\dots qw\alpha_{n1}\alpha_{n2}\dots\alpha_{nd_n}\dots}^s.$$

Нехай

$$\gamma^*(n) = \Delta_{\alpha_{01}\alpha_{02}\dots\alpha_{0d_0}qw\alpha_{11}\alpha_{12}\dots\alpha_{1d_1}\dots qw\alpha_{n1}\alpha_{n2}\dots\alpha_{nd_n}\tau_1\tau_2\dots}^s,$$

де $\tau_1, \tau_2, \dots$ — деякі цифри. Зрозуміло, що для кожного $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$

$$\gamma^* \cdot s^{d_0+2+d_1+\dots+2+d_k} = w_k + \Delta_{qw\dots}^s,$$

де w_k — деяке ціле число, причому

$$0 < \Delta_{qw(0)}^s \leq \Delta_{qw\dots}^s \leq \Delta_{qw(s-1)}^s < 1.$$

Нехай також

$$M(q; w) = \min \{ \sin^2(\pi \Delta_{qw(0)}^s); \sin^2(\pi \Delta_{qw(s-1)}^s) \}.$$

Зрозуміло, що $M(q; w) > 0$. Одержуємо

$$\sin^2(\pi \gamma^*(n) \cdot s^{d_0+2+d_1+\dots+2+d_k}) = \sin^2(\pi w_k + \pi \Delta_{qw\dots}^s) = \sin^2(\pi \Delta_{qw\dots}^s) \geq M(q; w).$$

Якщо $n > N(A)$, то виконується нерівність

$$f_n(\gamma^*(n) \cdot s^{d_0+2+d_1+\dots+2+d_k}) \leq 1 - 4B_{1n} \leq 1 - 4AM(q; w).$$

Таким чином, при досить великому n

$$g_0(\pi \tilde{t}_n) \leq (1 - 4AM(q; w))^j \rightarrow 0, \quad j \rightarrow +\infty,$$

і маємо суперечність із припущенням $L(F_\psi) > 0$.

Якщо γ подати у вигляді $\frac{a}{s^b}$ для деяких натуральних a, b , то γ має два s -кові зображення, одне з яких містить період (0) , а інше — період $(s-1)$.

Розглянемо такі випадки.

Випадок 1. Послідовність $(\gamma^*(n))$ містить підпослідовність $(\gamma^{**}(n))$ таку, що

$$\gamma^{**}(n) = \Delta_{\beta_{01}\beta_{02}\dots\beta_{0c_0} \underbrace{(s-1)(s-1)\dots(s-1)}_{e_1} \beta_{11}\beta_{12}\dots\beta_{1c_1} \dots \underbrace{(s-1)(s-1)\dots(s-1)}_{e_n} \beta_{n1}\beta_{n2}\dots\beta_{nc_n} \xi_1 \xi_2 \dots}^s,$$

де $\xi_1, \xi_2, \dots$ — деякі цифри, (e_n) — зростаюча послідовність натуральних чисел.

Отже, маємо

$$\{\gamma^{**}(n) \cdot s^{c_0+e_1+c_1+\dots+e_{n-1}+c_{n-1}}\} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow +\infty,$$

де $\{x\}$ — дробова частина числа x . А тому

$$\sin^2(\pi\gamma^*(n) \cdot s^{c_0+e_1+c_1+\dots+e_{n-1}+c_{n-1}-1}) \rightarrow \frac{\pi}{s}, \quad n \rightarrow +\infty,$$

тобто існує послідовність натуральних (h_n) така, що

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \pi \left\{ \frac{\tilde{t}_n}{s^{h_n}} \right\} = \frac{\pi}{s}.$$

Далі одержуємо

$$g_0(\tilde{t}_n) \leq g_{h_n}(\tilde{t}_n) \rightarrow \left(\sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{s} \cos\left(\frac{\pi}{s}\right) \right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{s} \sin\left(\frac{\pi}{s}\right) \right)^2 = 0, \quad n \rightarrow +\infty,$$

що суперечить припущенню $L(F_\psi) > 0$.

Випадок 2. Послідовність $(\gamma^*(n))$ містить підпослідовність $(\gamma^{***}(n))$ таку, що

$$\gamma^{***}(n) = \Delta_{\beta_{01}\beta_{02}\dots\beta_{0w_0} \underbrace{00\dots 0}_{q_1} \beta_{11}\beta_{12}\dots\beta_{1w_1} \dots \underbrace{00\dots 0}_{q_n} \beta_{n1}\beta_{n2}\dots\beta_{nw_n} \eta_1\eta_2\dots},$$

де $\eta_1, \eta_2, \dots$ — деякі цифри, (q_n) — зростаюча послідовність натуральних чисел.

Не обмежуючи загальності, можна вважати, що для певної цифри $r \in \{1, 2, \dots, s-1\}$ і для кожного $k \in Z_+$ виконується рівність $\beta_{0w_k} = r$.

Таким чином, маємо

$$\{\gamma^{***}(n) \cdot s^{w_0-1+q_1+w_1-1+\dots+q_{n-1}+w_{n-1}-1}\} \rightarrow \frac{r}{s}, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Тобто

$$\sin^2(\pi\gamma^{***}(n) \cdot s^{w_0-1+q_1+w_1-q+\dots+q_{n-1}+w_{n-1}-1}) \rightarrow \frac{\pi r}{s}, \quad n \rightarrow +\infty,$$

а тому існує послідовність натуральних (l_n) така, що

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \pi \left\{ \frac{\tilde{t}_n}{s^{l_n}} \right\} = \frac{\pi r}{s}.$$

Отримуємо

$$g_0(\tilde{t}_n) \leq g_{l_n}(\tilde{t}_n) \rightarrow \left(\sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{s} \cos\left(\frac{\pi r}{s}\right) \right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{s} \sin\left(\frac{\pi r}{s}\right) \right)^2 = 0, \quad n \rightarrow +\infty,$$

що суперечить припущенню $L(F_\psi) > 0$. Отже, $L(F_\psi) = 0$.

Автор заявляє про відсутність конфлікту інтересів. Усі необхідні дані містяться в статті.
Автор заявляє про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Література

1. А. Ф. Турбин, Н. В. Працевитый, *Фрактальные множества, функции, распределения*, Наук. думка, Киев (1992).
2. M. Girault, *Les fonctions caractéristiques et leurs transformations*, Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, **4**, 223–239 (1954).
3. C. G. Eseen, *Fourier analysis of distribution functions*, Acta Math., **77**, 1–125 (1945).
4. B. Jessen, A. Wintner, *Distribution function and Riemann zeta-function*, Trans. Amer. Math. Soc., **38**, № 1, 48–88 (1935).
5. L. Schvartz, *Sur le module de la fonction caractéristique du calcul des probabilités*, C. R. Acad. Sci. Paris, **212**, 418–421 (1941).
6. Я. В. Гончаренко, *Асимптотичні властивості характеристичної функції випадкової величини з незалежними двійковими цифрами та згортки сингулярних розподілів*, Наук. записки Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Фіз.-мат. науки, № 3, 376–390 (2002).
7. Я. В. Гончаренко, І. О. Микитюк, *Поведінка модуля характеристичної функції випадкової величини з незалежними s -адичними цифрами на нескінченності*, Наук. записки Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Фіз.-мат. науки, № 9, 121–127 (2008).

Одержано 25.08.23