

СТАБІЛІЗАЦІЯ ПЕРІОДИЧНИХ РУХІВ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ “РЕЗЕРВУАР – РІДИНА З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ” НА ОСНОВІ ПРИНЦИПІВ МОДАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

Олександр Константинов, Віктор Новицький

Інститут математики НАН України

вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна

e-mail: akonst.im@ukr.net, відповідальний за листування,

v.novytskyu@gmail.com

We investigate the problem of construction of a control system to ensure the periodic movement according to a given harmonic law of a mechanical system “reservoir – liquid with a free surface” with permanent disturbances (vibrations of the free surface of liquid). The control algorithm of the system is based on the model of a rigid body with a “solidified” liquid. The control with feedback is constructed analytically on the basis of the modal principle with preliminary reduction of the control system to the canonical Frobenius form. The results of numerical experiments confirm the expediency of the use of a linear system for disturbances as a model of construction of a control system with feedback for a complex nonlinear mechanical system.

Досліджено задачу побудови керування для забезпечення періодичного руху за заданим гармонічним законом механічної системи “резервуар – рідина з вільною поверхнею” при наявності постійних збурень — коливань вільної поверхні рідини. Програмне керування системою побудовано на основі моделі твердого тіла із “затверділою” рідиною. Керування зі зворотним зв’язком побудовано аналітично на основі модального принципу з попереднім приведенням системи керування до канонічної форми Фробеніуса. Результати чисельних експериментів підтверджують доцільність використання лінійної системи у збуреннях як моделі для побудови керування зі зворотним зв’язком для складної нелінійної механічної системи.

Вступ. Конструкції з рідиною з вільною поверхнею часто використовують у сучасній техніці як складові компоненти транспортних і енергетичних систем, систем транспортування і зберігання різних екологічно небезпечних і технологічних рідин. При цьому відносна маса рідини може бути значною, а тому рухомість рідини істотно впливає на динаміку і керування таких систем. Математичні моделі динаміки конструкцій з рідиною відносять до різновиду об’єктів із внутрішніми степенями вільності, й у випадку великої відносної маси рідини суттєвим є врахування сумісного характеру руху складових компонент системи, що традиційно є складною задачею. Із практики також відомо, що баки з рідиною у літаках, танкерах, залізничних і автомобільних цистернах значно впливають на стійкість і якість керування транспортними засобами. Тому дослідження в області побудови керування та забезпечення стійкості руху складних механічних систем залишаються актуальними і затребуваними як у теоретичному, так і прикладному аспектах.

В [1] досліджено коливання вільної поверхні рідини при наявності заданого програмного керування, зокрема, коли резервуар переміщується відповідно до заданого гармонічного закону. Сформульовано та розв'язано задачу про динамічну стійкість вільної поверхні рідини. При цьому можна виділити основний рух рідини (вимушені коливання) та додаткові рухи, які виникають тільки при визначених значеннях параметрів програмного керування. У [2–4] вивчали побудову автомата стабілізації заданого руху для системи “резервуар – рідина з вільною поверхнею” на основі лінійної моделі. У [5] побудовано робастне керування з лінійним зворотним зв'язком, яке використовують для переміщення резервуара з рідиною з вільною поверхнею при умові повного демпфування коливань вільної поверхні рідини. У [6] на основі комбінації вузькосмугового режекторного фільтра й фільтра низьких частот побудовано прилад для демпфування коливань вільної поверхні рідини в контейнері під час його транспортування у виробничому приміщенні. Аналогічні задачі з побудови стійкої системи керування рухомими контейнерами з рідиною як елементом виробничого процесу досліджено в [7–11].

У роботі [12] розглянуто керування узагальненим механічним пристроєм, динаміку якого описує система нелінійних диференціально-алгебраїчних рівнянь (алгебраїчними є обмеження на положення та швидкість контрольних точок у механізмі і величини керуючої сили). Побудована система керування є нелінійною, але її локальні особливості досліджено на основі лінійної моделі. Такий підхід забезпечує стійкість і необхідну якість динамічних процесів у системі керування. У [13] побудовано керування траєкторією роботаманіпулятора на основі лінійного робастного закону керування зі зворотним зв'язком із постійними коефіцієнтами підсилення, який дозволяє зробити похибки відтворення програмного руху рівномірно обмеженими. Значення коефіцієнтів підсилення зворотного зв'язку обчислено на основі функції Ляпунова. При необмеженому зростанні значень коефіцієнтів підсилення система керування стає глобально асимптотично стійкою. У [14, 15] розглянуто задачу синтезу керування зі зворотним зв'язком для лагранжевої склерономної механічної системи. Припустили, що сили керування є обмеженими і на систему діють зовнішні некеровані збурення. Побудовано алгоритм керування зі зворотним зв'язком, яке приводить систему у задане положення за визначений час (термінальне керування). Запропонований алгоритм застосовує лінійне керування зі зворотним зв'язком, яке забезпечує досягнення цілей керування та обмеження на величини фазових змінних і керуючих сил. Проблемам побудови алгоритмів керування складними механічними системами з лінійним зворотним зв'язком присвячено також роботи [16–23].

У роботах [24–28] досліджено задачі декомпозиції та керування у лінійних нестационарних керованих системах. Для лінійних нестационарних систем у канонічній блочній формі Гесенберга узагальнено метод модального керування. Розглянуто різноманітні аспекти застосування другого методу Ляпунова в задачах синтезу, що дозволило ефективно будувати зворотний зв'язок і відповідну функцію Ляпунова. Розроблені методи використано для дослідження задач синтезу та оцінки стану навігаційних систем, а також динаміки і керування гіроскопічними системами.

У цій статті розглянуто один із підходів до побудови керування механічною системою “резервуар – рідина з вільною поверхнею” для забезпечення періодичного руху резервуара (за заданим гармонічним законом). Поведінку системи розглядаємо на основі нелінійної багатомодової (12 форм коливань) моделі [29], яка описує сумісний рух резервуара та рідини під впливом керуючих сил. Використану модель побудовано на основі варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського. Для забезпечення мети керування спочатку бу-

дуємо програмне керування, яке обчислюємо для резервуара, рідину в якому вважаємо “затверділою”. Оскільки в системі завжди є збурення — похибки надання значень початкових умов фазових координат і коливання вільної поверхні рідини, для забезпечення заданого руху резервуара необхідно до програмного керування додати керування зі зворотним зв’язком. Керування зі зворотним зв’язком будуюмо на основі спрощеної моделі: лінійної стаціонарної системи з використанням як фазових змінних збурень переміщення та швидкості резервуара та амплітуди і швидкості коливань вільної поверхні рідини. Шукані збурення фазових координат отримуємо з повної нелінійної багатомодової моделі. На основі методу, розробленого в [24–28], систему зі збуреннями трансформуємо у канонічну форму Фробеніуса, за принципом модального керування обираємо відповідний спектр системи зі збуреннями та обчислюємо необхідні коефіцієнти зворотного зв’язку.

2. Об’єкт дослідження. Розглянемо циліндричний резервуар, частково заповнений рідиною. Резервуар вважаємо абсолютно твердим тілом, яке може здійснювати поступальні рухи під дією активних зовнішніх сил. Рідину вважаємо ідеальною, нестисливою, однорідною, а її початковий рух безвихровим. Відповідно до методики роботи [29] математичну модель системи “резервуар – рідина з вільною поверхнею” будуюмо на основі варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського

$$\delta I = 0, \quad I = \int_{t_1}^{t_2} L dt,$$

у якому функцію Лагранжа L задано у класичному вигляді Гамільтона – Остроградського як різницю між кінетичною та потенціальною енергіями

$$L = \frac{1}{2}\rho \int_{\tau} (\vec{\nabla}_3 \varphi + \dot{\vec{\varepsilon}})^2 d\tau + \frac{1}{2}M_T(\dot{\vec{\varepsilon}})^2 - (M_T + M_F)g\varepsilon_z - \frac{1}{2}\rho g \int_S (\xi^2 - H^2) dS + \vec{F} \cdot \vec{\varepsilon},$$

де ρ — щільність рідини, τ — область, яку займає рідина, $d\tau = r dr d\theta dz$ — циліндричні координати; при цьому напрямок осі Oz протилежний до напрямку вектора прискорення вільного падіння $\vec{g}$, а система координат нерухомо зв’язана з резервуаром;

$$\vec{\nabla}_3 = \vec{i}_1 \frac{\partial}{\partial r} + \vec{i}_2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{i}_3 \frac{\partial}{\partial z}, \quad \vec{\nabla}_2 = \vec{i}_1 \frac{\partial}{\partial r} + \vec{i}_2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta},$$

φ — потенціал швидкостей рідини, ξ — збурення вільної поверхні рідини (у незбуреному стані $\xi(r, \theta, t) = 0$), S — поперечний переріз циліндричного резервуара, H — глибина рідини в резервуарі, L_0 — контур, що обмежує S , M_T — маса резервуара, M_F — маса рідини, $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$ — вектор переміщення резервуара, $\vec{F}$ — головний вектор зовнішніх сил, які діють на резервуар.

Для ефективного застосування варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського поставлено задачу ввести у розгляд мінімальну кількість незалежних змінних, що описують рух резервуара з рідиною, тобто фактично будуюмо розклади шуканих змінних, які задовольняють наперед усі кінематичні граничні умови. Оскільки безвихровий рух ідеальної однорідної нестисливої рідини згідно з теоремою Лагранжа повністю визначається рухом її границь, то збурення вільної поверхні рідини ξ та радіус-вектор $\vec{\varepsilon}(t)$ повністю характеризують рух самої рідини, і тому потенціал швидкостей φ потрібно вважати залежною змінною.

Відповідно до методики роботи [29] розклади шуканих змінних наведемо у вигляді

$$\xi(r, \theta, t) = \sum_i a_i(t) \psi_i(r, \theta), \quad \varphi = \sum_i b_i(t) \varphi_i(r, \theta, z), \quad (1)$$

де $a_i(t)$ — амплітуди форм коливань збуреної вільної поверхні рідини ξ . Системи функцій ψ_i і $\varphi_i = \psi_i \frac{\cosh \kappa_i(z+H)}{\kappa_i \sinh \kappa_i H}$ є розв'язком лінійної спектральної задачі [29] і мають вигляд

$$\psi_n(r, \theta) = J_n \left(\frac{\kappa_n^{(m)}}{R} r \right) \frac{\sin(n\theta)}{\cos(n\theta)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots$$

У роботі [29] розроблено метод виключення кінематичних граничних умов на вільній поверхні рідини, який дозволяє отримати дискретну модель механічної системи “резервуар – рідина з вільною поверхнею” мінімальної розмірності. На основі розробленого методу, варіаційних методів математичної фізики та асимптотичних методів нелінійної механіки в [29] побудовано математичну модель, яка дозволяє дослідити поступальні та кутові рухи механічної системи “резервуар – рідина з вільною поверхнею” при різних видах кінематичного збурення і динамічного (силового та моментного) збудження. Ця модель являє собою систему нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку щодо незалежних параметрів a_i — коефіцієнтів розкладу в ряд збурення вільної поверхні рідини ξ за формами коливань вільної поверхні ψ_i та ε_i — компонент вектора переміщень центру незбуреної вільної поверхні рідини ξ стосовно деякої нерухомої системи відліку

$$\begin{aligned} & \sum_i \ddot{a}_i \cdot \left\{ \beta_{ri}^q + \sum_j a_j \gamma_{ij}^q + \sum_{i,j} a_i a_j \delta_{rijk}^q \right\} \\ & + \ddot{\varepsilon} \cdot \left\{ \vec{B}_r^1 + \sum_i a_i \vec{B}_{ri}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{B}_{rij}^3 + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \vec{B}_{rijk}^4 \right\} \\ & = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j (\gamma_{ijr}^q - \gamma_{rij}^q) + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k (\delta_{ijk}^q - 2\delta_{rijk}^q) - \frac{1}{2} g \alpha_r^s - \alpha_r^p \dot{a}_r + g N_r a_r \\ & + \ddot{\varepsilon} \cdot \left\{ \vec{B}_r^1 + \sum_i a_i (\vec{B}_{ir}^2 - \vec{B}_{ri}^2) + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j 2(\vec{B}_{ijr}^3 - \vec{B}_{rij}^3) + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k 3(\vec{B}_{ijk}^4 - \vec{B}_{rijk}^4) \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \rho \left\{ \sum_i \ddot{a}_i [\vec{B}_i^1 + \sum_{i,j} a_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{i,j,k} a_j a_k \vec{B}_{ijk}^3] \right\} + (M_T + M_F) \ddot{\varepsilon} \\ & = \vec{F} - (M_T + M_F) g \vec{k} - \rho \left\{ \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k \vec{B}_{ijk}^3 \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Система (2), (3) містить $N + 3$ рівнянь (N — кількість форм коливань рідини, що розглядаються) та описує динаміку сумісного руху резервуара та рідини при різних видах кінематичного збурення і динамічного (силового) збудження. Рівняння (2) описують динаміку амплітуд форм коливань вільної поверхні рідини, а рівняння (3) — динаміку

резервуара, однак ці рівняння взаємопов’язані та містять сили взаємодії між компонентами механічної системи.

Сукупність коефіцієнтів, які входять до системи рівнянь (2), (3), у межах прийнятої моделі визначає властивості механічної системи, яка розглядається, та особливості прояву у ній внутрішніх лінійних і нелінійних механізмів взаємодії. Ці коефіцієнти визначають через квадратури від розв’язку крайової задачі з визначення форм коливань вільної поверхні рідини. При цьому коефіцієнти β_{ir}^q , γ_{ijr}^q , δ_{ijk}^q , α_r^s , N_r , β_{ir}^k , γ_{ijr}^k , δ_{ijk}^k , λ_r відповідають випадку коливань рідини у нерухомому резервуарі, а коефіцієнти $\vec{B}_r^1$, $\vec{B}_{ri}^2$, $\vec{B}_{rij}^3$, $\vec{B}_{rijk}^4$ відображають взаємозв’язок коливань рідини та поступального руху резервуара. Повне виведення системи рівнянь (2), (3) і формул для обчислення коефіцієнтів у загальному випадку сумісного руху (поступального і кутового) циліндричного резервуара і рідини з вільною поверхнею наведено в роботі [29].

3. Обчислення власних частот механічної системи. Визначимо нижчу власну частоту механічної системи “резервуар – рідина з вільною поверхнею”. Відповідно до теорії механічних коливань [30] запишемо рівняння (2), (3) тільки для першої антисиметричної форми з можливістю горизонтального руху за координатою y у вигляді

$$\ddot{a}_1 \beta_{11}^q + B_1^{1y} \ddot{\varepsilon}_y + g N_1 a_1 = 0,$$

$$\frac{\rho B_1^{1y}}{M_T + M_F} \ddot{a}_1 + \ddot{\varepsilon}_y = 0,$$

і, з урахуванням позначень, $\Lambda_1 = \frac{B_1^{1y}}{\beta_{11}^q}$, $\Lambda_2 = \frac{\rho B_1^{1y}}{M_T + M_F}$, $\omega_1^2 = \frac{g N_1}{\beta_{11}^q}$, запишемо далі у канонічному вигляді

$$\ddot{a}_1 + \Lambda_1 \ddot{\varepsilon}_y + \omega_1^2 a_1 = 0, \quad (4)$$

$$\Lambda_2 \ddot{a}_1 + \ddot{\varepsilon}_y = 0. \quad (5)$$

Представляючи періодичні розв’язки системи рівнянь (4), (5) у вигляді

$$a_1 = A_1 \cos(\omega t) + B_1 \sin(\omega t), \quad \varepsilon_y = A_2 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t),$$

записуємо рівняння для амплітуд A_1 і A_2 (зауважимо, що рухи в напрямках Ox і Oy у системі (4), (5) розділяються):

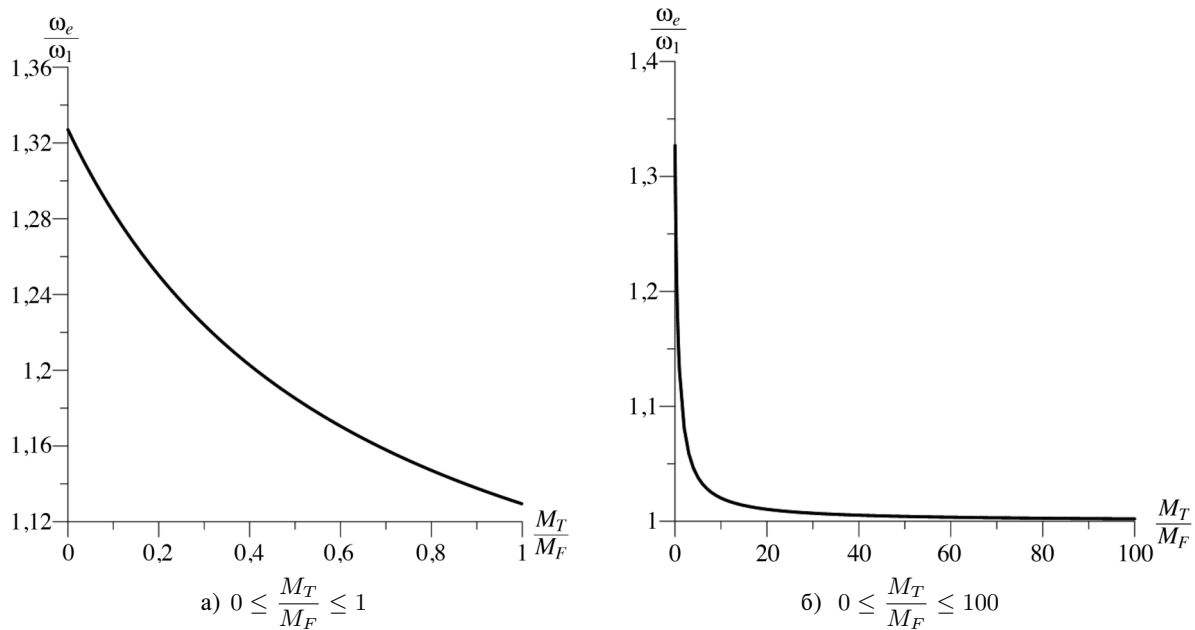
$$(\omega_1^2 - \omega^2) A_1 - \Lambda_1 \omega^2 A_2 = 0,$$

$$-\Lambda_2 \omega^2 A_1 - \omega^2 A_2 = 0,$$

Записана система рівнянь має нетривіальний розв’язок, якщо визначник матриці коефіцієнтів дорівнює нулю. Дорівнюючи цей визначник нулю, розв’яжемо бікватратне рівняння і отримаємо формулу для визначення власної частоти механічної системи

$$\omega_e = \frac{\omega_1}{\sqrt{1 - \Lambda_1 \Lambda_2}}. \quad (6)$$

Як можна бачити з визначення ω_e , власна частота системи при збільшенні маси резервуара (тобто при збільшенні значення Λ_2 при постійному значенні Λ_1) буде наближатися

Рис. 1. Залежність власної частоти системи від маси резервуара M_T .

до власної частоти ω_1 першої антисиметричної форми ψ_1 . Це підтверджує відому теорему з механіки про те, що після звільнення від зв'язку власна частота системи зменшується. У цьому випадку збільшення маси резервуара послаблює в'язі, оскільки коливання рідини дедалі все менше впливають на коливання резервуара. Нехай резервуар радіуса $R = 1$ м і маси M_T частково заповнений рідиною (водою) маси M_F до глибини $H = R$. Залежність власної частоти системи ω_e від співвідношення мас резервуара та рідини наведено на рис. 1. Наведені на графіках значення ω_e збігаються зі значеннями, отриманими в результаті частотного аналізу коливань вільної поверхні рідини на стінці резервуара для нелінійної багаточастотної моделі системи “циліндричний резервуар – рідина з вільною поверхнею”.

4. Побудова керування зі зворотним зв'язком на основі модального принципу. Якщо зовнішня сила $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$, яка діє на систему “резервуар – рідина з вільною поверхнею”, має за мету здійснення необхідного закону руху або мінімізацію заданого функціонала, то таку силу прийнято називати керуванням. У цій роботі поставлено задачу побудови керування F_y , яке б забезпечувало програмний рух резервуара з рідиною у напрямку Oy за заданим періодичним законом $\varepsilon_y = A \cos(\Omega t)$, $\dot{\varepsilon}_y = -A\Omega \sin(\Omega t)$. При цьому закон руху рідини задаємо відповідно до моделі “затверділої” рідини, тобто збурення вільної поверхні рідини повинні бути відсутні $\xi(t) = \dot{\xi}(t) = 0$. Тоді програмне керування F_{PR} будується згідно з другим законом Ньютона та має вигляд $F_{PR} = (M_T + M_F)\ddot{\varepsilon}_y$. Однак, оскільки у системі присутні постійні збурення — збурення початкових умов параметрів руху ε_y , $\dot{\varepsilon}_y$, ξ , $\dot{\xi}$ та коливання вільної поверхні рідини, введемо у систему лінійне керування зі зворотним зв'язком F_{BC} і постійними коефіцієнтами підсилення m_i , $i = 1, \dots, 4$, у вигляді $F_{BC} = \sum_{i=1}^4 m_i x_i$, яке буде корегувати існуючі похибки — відхилення наявних значень параметрів руху від заданих програмних значень

$$x_1 = \xi(t), \quad x_2 = \dot{\xi}(t), \quad x_3 = \varepsilon_y - A \cos(\Omega t), \quad x_4 = \dot{\varepsilon}_y + A\Omega \sin(\Omega t). \quad (7)$$

Таким чином, повне керування, яке діє на систему, має вигляд

$$F_y = F_{PR} + F_{BC} = (M_T + M_F)\ddot{\varepsilon}_y - \sum_{i=1}^4 m_i x_i, \quad (8)$$

де коефіцієнти підсилення зворотного зв'язку m_i мають значення, які повинні забезпечити не тільки виконання задачі стабілізації заданого програмного руху, але й стійкість системи керування.

Керування зі зворотним зв'язком побудуємо на основі лінеаризованої системи рівнянь руху (2), (3), у якій буде враховано коливання вільної поверхні рідини по першій антисиметричній формі a_1 із можливістю горизонтального переміщення резервуара по горизонтальній координаті ε_y . Відповідні рівняння мають вигляд

$$\ddot{a}_1 \beta_{11}^q + B_1^{1y} \ddot{\varepsilon}_y + g N_1 a_1 = 0, \quad \rho B_1^{1y} \ddot{a}_1 + (M_T + M_F) \ddot{\varepsilon}_y = F_y,$$

і, з урахуванням позначень, $\nu_1 = \frac{B_1^{1y}}{\beta_{11}^q}$, $\nu_2 = \rho B_1^{1y}$, $\omega_1^2 = \frac{g N_1}{\beta_{11}^q}$, $M = M_T + M_F$, можуть бути записані як

$$\ddot{a}_1 + \nu_1 \ddot{\varepsilon}_y + \omega_1^2 a_1 = 0, \quad \nu_2 \ddot{a}_1 + M \ddot{\varepsilon}_y = F_y. \quad (9)$$

Введемо також позначення для фазових змінних $x_1 = a_1(t)$, $x_2 = \dot{a}_1(t)$, $x_3 = \varepsilon_y - A \cos(\Omega t)$, $x_4 = \dot{\varepsilon}_y + A \Omega \sin(\Omega t)$ та керування $u = F_y$ і приведемо систему диференціальних рівнянь (9) до нормальної форми Коші

$$\dot{x} = Fx + Gu, \quad (10)$$

де x — вектор фазових змінних $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, u — керування, а матриця F і вектор G мають вигляд

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_1 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

з позначеннями $\lambda_1 = -\frac{M\omega_1^2}{M - \nu_1\nu_2}$, $\lambda_2 = \frac{\nu_2\omega_1^2}{M - \nu_1\nu_2}$, $\beta_1 = -\frac{\nu_1}{M - \nu_1\nu_2}$, $\beta_2 = \frac{1}{M - \nu_1\nu_2}$. У системі (10) фазові змінні (x_1, x_2, x_3, x_4) мають сенс збурень, тобто відхилень дійсних значень параметрів руху системи від програмних.

Побудоване керування зі зворотним зв'язком повинне забезпечити асимптотичну стійкість руху системи зі збуреннями. Для його побудови будемо використовувати метод, розроблений Новицьким [24–27]: рівняння системи зі збуреннями (10) послідовно перетворюються у форму, канонічну за керуванням, потім у канонічну форму Гессенберга і, зрештою, у канонічну форму Фробеніуса.

Оскільки у системі (10) вектор керування має розмірність 1, після перетворення система (10) у формі, канонічній за керуванням, повинна мати вигляд

$$\dot{y} = Ay + Bu, \quad B = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T. \quad (12)$$

Відповідно до [11] побудуємо неособливе перетворення $y = Tx$, де пряма й обернена матриця перетворення T мають вигляд

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{\beta_1}{\beta_2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\beta_2} \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \beta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_2 \end{bmatrix}.$$

Застосовуючи перетворення T до системи (10), тобто

$$A = TFT^{-1}, \quad B = TG,$$

отримуємо вирази для A та B у системі (12) у формі, канонічній щодо керування

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \beta_1 \\ \lambda_1 - \frac{\beta_1 \lambda_2}{\beta_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_2 \\ \frac{\lambda_2}{\beta_2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Другим етапом буде зведення системи (10) до канонічної форми Гессенберга. Матриці A та B у канонічній формі Гессенберга набудуть вигляду

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

тобто матриця A буде мати нижньотрикутну форму, а вектор B після перетворень залишиться незмінним. Відповідно до методу [11] перехід матриці A системи (12) буде виглядати як серія неособливих перетворень $A^{(i)} = R^{(i)} A^{(i-1)} R^{(i-1)^T}$, $i = 1, \dots, 4$, при цьому $A^0 = A$. Введемо позначення $\gamma_1 = \lambda_1 - \frac{\beta_1 \lambda_2}{\beta_2}$, $\gamma_2 = \frac{\lambda_2}{\beta_2}$ для відповідних елементів матриці A , тоді система (12) у канонічній формі Гессенберга має вигляд

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \gamma_2 \gamma_1 \beta_1 & 0 & \gamma_2 \beta_1 & 0 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \quad (13)$$

Третім етапом буде зведення системи (13) до канонічної форми Фробеніуса. Матриці A та B у канонічній формі Фробеніуса повинні мати вигляд

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

тобто у матриці A тільки у нижньому рядку можуть бути довільні значення, а вектор B після перетворень знову залишається незмінним. Як і на другому етапі, відповідно до методу [27] перехід матриці A системи (13) до канонічної форми Фробеніуса буде виглядати як серія неособливих перетворень $A^{(i)} = R^{(i)} A^{(i-1)} R^{(i-1)}$, $i = 1, \dots, 4$. З урахуванням позначень $\gamma_1 = \lambda_1 - \frac{\beta_1 \lambda_2}{\beta_2}$, $\gamma_2 = \frac{\lambda_2}{\beta_2}$ система (13) у канонічній формі Фробеніуса має вигляд

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \quad (14)$$

Перемноження всіх матриць перетворень, які послідовно дозволяють перейти від початкової системи (10) до канонічної стосовно фазових координат (тобто канонічної щодо керування та за Фробеніусом) системи (14), дає можливість отримати пряму та обернену матрицю для такої трансформації

$$T = \begin{bmatrix} -\frac{\beta_2}{\beta_1(\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1)} & 0 & \frac{1}{\beta_1(\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1)} & 0 \\ 0 & -\frac{\beta_2}{\beta_1(\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1)} & 0 & \frac{1}{\beta_1(\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1)} \\ \frac{1}{\beta_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta_1} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_1 \\ \beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1 & 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & \beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1 & 0 & \beta_2 \end{bmatrix}.$$

У систему (14) підключимо зворотний зв'язок $u = -\sum_{i=1}^4 k_i y_i$ та отримаємо рівняння замкненої системи

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & \lambda_1 - k_3 & -k_4 \end{bmatrix} y. \quad (15)$$

Необхідно знайти значення коефіцієнтів k_i зворотного зв'язку, які б забезпечили асимптотичну стійкість замкненої системи (15). Як відомо [28, 29], коефіцієнтами характеристичного полінома матриці у формі Фробеніуса є елементи нижнього рядка, тому характеристичний поліном системи (15) має вигляд

$$f(z) = z^4 + k_4 z^3 + (k_3 - \lambda_1) z^2 + k_2 z + k_1. \quad (16)$$

Для забезпечення асимптотичної стійкості системи (15) необхідно, щоб корені характеристичного полінома були дійсними негативними числами [28, 29]. Скористаємося для цього модальним принципом керування, тобто будемо задавати властивості замкненої системи через надання значень коренів характеристичного полінома, а потім знайдемо значення коефіцієнтів підсилення зворотного зв'язку. Задаємо значення коренів характеристичного полінома μ_i , $i = 1, \dots, 4$, і отримуємо відповідний вигляд характеристичного полінома

$$\begin{aligned} f(z) = & z^4 + (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4) z^3 \\ & + (\mu_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_3 + \mu_1 \mu_4 + \mu_2 \mu_3 + \mu_2 \mu_4 + \mu_3 \mu_4) z^2 \\ & + (\mu_1 \mu_2 \mu_3 + \mu_1 \mu_2 \mu_4 + \mu_1 \mu_3 \mu_4 + \mu_2 \mu_3 \mu_4) z + \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4. \end{aligned}$$

Порівнюючи значення коефіцієнтів характеристичного полінома шуканої (10) і канонічної (15) систем, отримаємо значення коефіцієнтів підсилення m_i зворотного зв'язку у явному вигляді

$$\begin{aligned} k_1 &= \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4, & k_2 &= \mu_1 \mu_2 \mu_3 + \mu_1 \mu_2 \mu_4 + \mu_1 \mu_3 \mu_4 + \mu_2 \mu_3 \mu_4, \\ k_3 &= \mu_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_3 + \mu_1 \mu_4 + \mu_2 \mu_3 + \mu_2 \mu_4 + \mu_3 \mu_4, & k_4 &= \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4. \end{aligned}$$

Визначаючи значення коренів характеристичного полінома, а отже, й коефіцієнтів підсилення k_i зворотного зв'язку, можна задавати якість перехідних процесів у замкненій системі керування. Якщо задані корені характеристичного полінома є негативними дійсними числами або комплексними числами із негативною дійсною частиною, то система буде асимптотично стійкою [28, 29].

Оскільки координатне перетворення $y = Tx$ є неособливим, воно не змінює спектральних характеристик шуканої системи (10), а тому характеристичні поліноми замкненої шуканої системи (10) і канонічної системи (15) співпадають. Звідси можна визначити коефіцієнти підсилення зворотного зв'язку m_i у шуканій системі (10) на основі знання коефіцієнтів підсилення зворотного зв'язку k_i у канонічній системі (15) у вигляді

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{k_3}{\beta_1} - \frac{\beta_2 k_1}{\beta_1(\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1)}, & m_2 &= \frac{k_4}{\beta_1} - \frac{\beta_2 k_2}{\beta_1(\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1)}, \\ m_3 &= \frac{k_1}{\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1}, & m_4 &= \frac{k_2}{\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1}, \end{aligned} \quad (17)$$

і отримати замкнену систему керування (10), яка відповідає заданим вимогам, у вигляді

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 - \beta_1 m_1 & -\beta_1 m_2 & -\beta_1 m_3 & -\beta_1 m_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda_2 - \beta_2 m_1 & -\beta_2 m_2 & -\beta_2 m_3 & -\beta_2 m_4 \end{bmatrix} x.$$

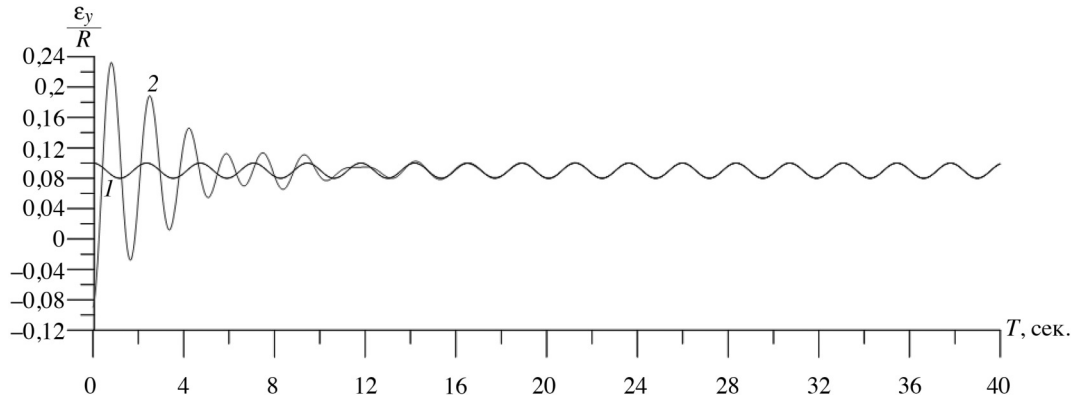
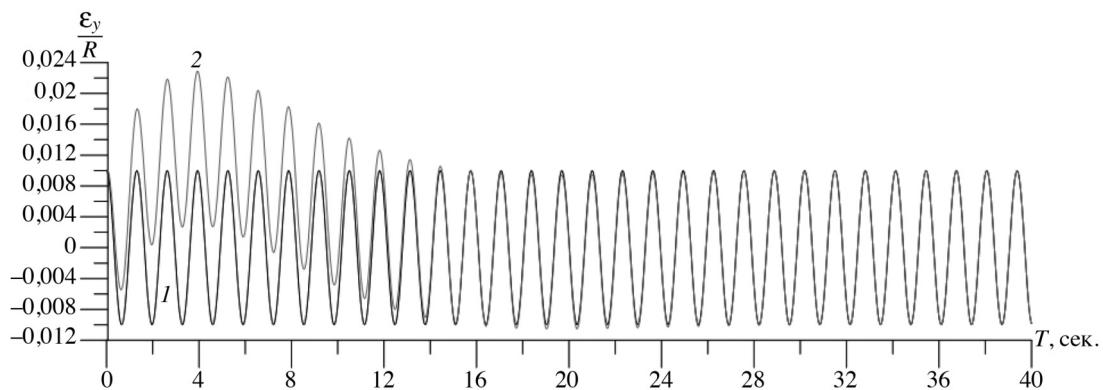
5. Результати обчислювальних експериментів. Розглянемо результати обчислювальних експериментів для циліндричного резервуара радіуса $R = 1$ м, частково заповненого рідиною (водою) маси M_F до глибини $H = R$. Маса резервуара дорівнює $M_T = 0,1M_F$. Відповідно до формули (6) власна частота системи при таких параметрах $\omega_e = 5,3189331056$ Гц. Початкове збурення вільної поверхні рідини відсутнє $a_i(0) = \dot{a}_i(0) = 0$. До стінки резервуара прикладено горизонтальну силу (керування), яка повинна забезпечити переміщення резервуара за гармонічним законом $y = A_y \cos pt$. Враховуючи наявність постійно діючого збурення — коливальну вільної поверхні рідини, до програмного керування відповідно до (8) додаємо керування зі зворотним зв'язком. Тоді повне керування має вигляд

$$F_y = -A_y p^2 (M_T + M_F) \cos pt - \sum_{i=1}^4 m_i x_i.$$

Система рівнянь (2), (3) лінійна стосовно других похідних, що дає можливість при практичній реалізації на кожному кроці чисельного інтегрування спочатку перетворити систему до нормальної форми Коші, а потім чисельно інтегрувати у часі за допомогою стандартного методу Рунге – Кутти. На етапі перетворення до нормальної форми Коші порядок похідних у рівняннях знижується за рахунку введення узагальнених швидкостей $\dot{a}_i$ як рівноправних незалежних змінних (разом із a_i). При дослідженні динаміки системи “резервуар – рідина” використано $N = 12$ форм коливальних, при цьому $n_1 = 12$ форм коливальних вільної поверхні рідини утримано у розгляді з лінійним наближенням, $n_2 = n_3 = 6$ форм — з квадратичним і кубічним наближенням [29]. Крок чисельного інтегрування задачі Коші для системи рівнянь (2), (3) обирався на основі періоду вищої форми коливальних a_{12} .

Розглянемо випадок керування резервуаром, коли програмне керування викликає збурення вільної поверхні рідини у лінійному діапазоні амплітуд ($|\xi(R)| < 0,2R$). Задаємо параметри програмного руху $A_y = 0,01R$, $p = 0,5\omega_e$, обираємо значення коренів характеристичного полінома $\mu_1 = -1$, $\mu_2 = -0,8$, $\mu_3 = \mu_4 = -0,5$ і обчислюємо відповідно до (17) коефіцієнти підсилення зворотного зв'язку $m_1 = -4064,4975529805$, $m_2 = -3905,35442465$, $m_3 = 24,430978875$, $m_4 = 152,6936179689$. На рис. 2 показано результати чисельного моделювання: крива 1 — траєкторія програмного руху системи, крива 2 — траєкторія руху системи при наявності зворотного зв'язку. Як видно з графіка, підключення до системи зворотного зв'язку забезпечує прийнятне наближення до шуканого програмного руху.

Тепер оберемо значення параметрів програмного руху $A_y = 0,01R$, $p = 0,9\omega_e$, і тоді програмне керування викликає збурення вільної поверхні рідини у нелінійному діапазоні амплітуд ($0,2R \leq |\xi(R)| \leq 0,35R$). Задаємо значення коренів характеристичного полінома $\mu_1 = -3,5$, $\mu_2 = -2,5$, $\mu_3 = -1,9$, $\mu_4 = -0,9$ і обчислюємо відповідно до (17) коефіцієнти підсилення зворотного зв'язку $m_1 = -37788,5607700761$, $m_2 = -9703,4047931029$, $m_3 = 1827,7426070872$, $m_4 = 4246,1041284780$. На рис. 3 показано результати чисельного

Рис. 2. Переміщення резервуара за законом $\varepsilon_y = 0,01R \cos(0,5\omega_e)$.Рис. 3. Переміщення резервуара за законом $\varepsilon_y = 0,01R \cos(0,9\omega_e)$.

моделювання: крива 1 — траєкторія програмного руху системи, крива 2 — траєкторія руху системи за наявності зворотного зв'язку. Таким чином, підключення до системи зворотного зв'язку забезпечує прийнятне наближення до шуканого програмного руху.

Як показали обчислювальні експерименти, підвищення частоти та амплітуди шуканого програмного руху резервуара призводить до необхідності збільшення за абсолютним значенням коренів характеристичного полінома, що, в свою чергу, призводить до збільшення за абсолютним значенням коефіцієнтів підсилення зворотного зв'язку. Однак, як відомо, коефіцієнти підсилення зворотного зв'язку не можуть бути як завгодно великими — це призводить до втрати стійкості системи. Тому у кожному конкретному випадку шуканого програмного руху необхідно оцінювати побудований регулятор зворотного зв'язку з точки зору якості та стійкості керованих процесів.

Висновки. У цій статті досліджено задачу побудови керування для забезпечення періодичного руху механічної системи “резервуар – рідина з вільною поверхнею” за заданим гармонічним законом при наявності неперервно діючих збурень — коливань вільної поверхні рідини. Програмне керування системою побудовано на основі моделі твердого тіла із “затверділою” рідиною. Керування зі зворотним зв'язком побудовано аналітично на основі модального принципу із попереднім зведенням системи керування до канонічної форми Фробеніуса. Завдяки зведенню моделі системи керування до канонічної форми Фробеніу-

са значно спрощується подальша процедура обчислення коефіцієнтів зворотного зв’язку. Результати чисельних експериментів підтверджують доцільність використання лінійної системи зі збуреннями як моделі для побудови керування зі зворотним зв’язком для складної нелінійної механічної системи.

Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів. Усі необхідні дані містяться в статті. Роботу виконано за часткової фінансової підтримки за проєктом “Математичне моделювання складних динамічних систем і процесів, викликаних державною безпекою”, реєстраційний № 0123U100853.

Література

1. И. А. Луковский, *Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость*, Наукова думка, Київ (1990).
2. Г. Н. Микишев, Б. И. Рабинович, *Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью*, Машиностроение, Москва (1968).
3. Г. Н. Микишев, *Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов*, Машиностроение, Москва (1978).
4. Г. С. Нариманов, Л. В. Докучаев, И. А. Луковский, *Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью*, Машиностроение, Москва (1977).
5. K. Yano, K. Terashima, *Robust liquid container transfer control for complete sloshing suppression*, IEEE Trans. Control Syst. Technol., **9**, № 3, 483–493 (2009).
6. R. Nakagawa, T. Yamashita, R. Tasaki, *Motion control of liquid containers with slosh constraints during high-speed three-dimensional transfer*, ICCRE 2023: IEEE — 2023 8th International Conference on Control and Robotics Engineering (ICCRE 2023), 194–197 (2023).
7. L. Biagiotti, D. Chiaravalli, L. Moriello, C. Melchiorri, *A plug-in feed-forward control for sloshing suppression in robotic teleoperation tasks*, 2018 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS), 5855–5860 (2018).
8. Guang Li, Li Hou, Yong Lu, *D-Type iterative learning control for open container motion system with sloshing constraints*, IEEE Access, **9**, 136666–136673 (2021).
9. J. Reinhold, M. Amersdorfer, T. Meurer, *A dynamic optimization approach for sloshing free transport of liquid filled containers using an industrial robot*, IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS), 2336–2341 (2019).
10. SNor Sakinah Abdul Shukor, Mohd Ashraf Ahmad, Mohd Zaidi Mohd Tumari, *Data-driven PID tuning based on safe experimentation dynamics for control of liquid slosh*, IEEE 8th Control and System Graduate Research Colloquium (ICSGRC), 62–66 (2017).
11. Nurul Najihah Zulkifli, Mohd Syakirin Ramli, *State feedback controller tuning for liquid slosh suppression system utilizing LQR-LMI approach*, IEEE International Conference on Automatic Control and Intelligent Systems (I2CACIS), 52–57 (2021).
12. H. McClamroch, D. Wang, *Linear feedback control of position and contact force for a nonlinear constrained mechanism*, J. Dyn. Syst., Measurement Control, **112**, №. 4, 640–645 (1990).
13. Z. Qu, J. Dorsey, *Robust tracking control of robots by a linear feedback law*, IEEE Trans. Automat. Control, **36**, № 9, 1081–1084 (1991).
14. I. M. Ananievski, *Continuous feedback control for scleronomous mechanical systems*, 2003 IEEE International Workshop on Workload Characterization (IEEE Cat. No.03EX775), 1226–1230 (2003).
15. I. M. Ananievski, *Continuous feedback control of perturbed mechanical systems*, J. Appl. Math. Mech., **67**, № 2, 143–156 (2003).
16. Abdullah Alshaya, *Command shaping control of a multi-mode flexible system*, 2022 8th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT), Vol. 1, 206–211 (2022).

17. G. Essen, A. Rezapour, P. Van den Hof, J. Jansen, *Integrated dynamic optimization and control in reservoir engineering using locally identified linear models*, 49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC), Atlanta, GA, USA, 7643 – 7648 (2010).
18. Tho Duc Ho, Kazuhiko Terashima, *Robust control designs of Payload's skew rotation in a boom crane system*, IEEE Trans. Control Syst. Technol., **27**, № 4, 1608 – 1621 (2019).
19. E. A. Mityushov, N. E. Misyura, M. A. Druzhinin, A. O. Mineeva, *Kinematics of coordinated motion of multiparametric mechanical systems and multidrive machines*, AIP Conf. Proc., **2456**, № 1, 240 – 255 (2022).
20. M. Nowicki, W. Respondek, *A mechanical feedback classification of linear mechanical control systems*, Appl. Sci., **11**, 341 – 357 (2021).
21. I. Polat, E. Eskinat, I. E. Kose, *Dynamic output feedback control of quasi-LPV mechanical systems*, IET Control Theory Appl., **1**, № 4, 640 – 645 (2007).
22. Satoru Sakai, Masayuki Ando, Shunsuke Kobashi, *Visual feedback without geometric features against occlusion: a Walsh basis*, IEEE Trans. Control Syst. Technol., **27**, № 2, 864 – 871 (2019).
23. Xiuyun Zhang, Qun Zong, Liqian Dou, Bailing Tian, Wenjing Liu, *Finite-time attitude optimization maneuver control for coupled spacecraft under attitude measurement errors and actuator faults*, IEEE Trans. Syst., Man, Cybernetics: Systems, **53**, № 5, 3082 – 3091 (2023).
24. В. В. Новицкий, *Модальное управление механическими системами*, Вопросы устойчивости и управления навигационных систем, Институт математики АН УРСР, Київ, 70 – 75 (1988).
25. В. В. Новицкий, *Обобщение метода модальной декомпозиции на нестационарные системы*, Устойчивость и управление в механических системах, Институт математики АН УРСР, Київ, 36 – 42 (1988).
26. В. В. Новицкий, *Декомпозиция линейных систем и модальное управление*, Препринт, Институт математики АН УРСР, Київ, 27 с. (1990).
27. В. В. Новицкий, *Декомпозиція та керування в лінійних системах*, Інститут математики НАН України, Київ (2008).
28. В. В. Новицкий, *Керування гіроскопічними системами та інші задачі аналітичної механіки*, Інститут математики НАН України, Київ (2008).
29. О. С. Лимарченко, В. В. Ясинский, *Нелинейная динамика конструкций с жидкостью*, Київський політехнічний інститут, Київ (1997).
30. С. П. Стрелков, *Введение в теорию колебаний*, Наука, Москва (1964).
31. Ю. Н. Андреев, *Управление конечномерными линейными объектами*, Наука, Москва (1976).

Одержано 13.09.23,
після доопрацювання — 06.12.23