

УМОВИ ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИСКРЕТНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ПЕРЕДКОМПАКТНОЮ МНОЖИНОЮ ЗНАЧЕНЬ

Василь Слюсарчук

*Національний університет водного господарства та природокористування
вул. Соборна, 11, Рівне, 33000, Україна
e-mail: V.E.Slyusarchuk@gmail.com*

We establish conditions for the existence of solutions of discrete equations with a precompact set of values by using c -continuous operators and admissible pairs of compact sets.

Встановлено умови існування розв'язків із передкомпактною множиною значень дискретних рівнянь із використанням c -неперервних операторів і допустимих пар компактних множин.

1. Основні позначення й об'єкт досліджень. Нехай $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ і $\mathbb{R}$ — множини всіх натуральних, цілих і дійсних чисел відповідно, $\mathbb{R}^m$ — дійсний m -вимірний простір, $\mathbb{Z}^m$ — абелева група, елементами якої є вектори $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_m) \in \mathbb{R}^m$ з $n_1, n_2, \dots, n_m \in \mathbb{Z}$, стосовно операції додавання:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 &= (n_{1,1}, n_{1,2}, \dots, n_{1,m}) + (n_{2,1}, n_{2,2}, \dots, n_{2,m}) \\ &+ (n_{1,1} + n_{2,1}, n_{1,2} + n_{2,2}, \dots, n_{1,m} + n_{2,m}), \end{aligned}$$

M — довільний повний метричний простір із метрикою ρ_M і a — довільний елемент цього простору.

Позначимо через $\mathfrak{M}$ повний метричний простір функцій $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{n})$, $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m$, зі значеннями в M , для кожної з яких

$$\sup_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} \rho_M(\mathbf{x}(\mathbf{n}), a) < \infty, \quad (1)$$

з метрикою

$$\rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sup_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} \rho_M(\mathbf{x}_1(\mathbf{n}), \mathbf{x}_2(\mathbf{n})). \quad (2)$$

У рівності (2) $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1(\mathbf{n})$ і $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2(\mathbf{n})$, $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m$.

Завдяки (1) елементи простору $\mathfrak{M}$ є обмеженими на $\mathbb{Z}^m$ функціями. Метричний простір $\mathfrak{M}$ є повним завдяки повноті простору M .

Розглянемо оператор $F: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$, що є:

- 1) обмеженим (відображає кожен обмежений елемент простору $\mathfrak{M}$ в обмежений елемент цього простору [1, с. 14]);
- 2) c -неперервним (див. означення 3 в п. 2).

Розглянемо рівняння

$$\mathbf{F}\mathbf{x} = \mathbf{h}, \quad (3)$$

в якому $\mathbf{h} \in \mathfrak{M}$. Це рівняння дискретне і є узагальненням різницевого рівняння.

Мета статті — встановити умови, при виконанні яких для кожної функції $\mathbf{h} \in \mathfrak{M}$ з передкомпактною множиною значень у M рівняння (3) має хоча б один розв'язок $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$.

2. Локально збіжні послідовності і s -неперервні відображення. У подальшому при дослідженні рівняння (3) важливе значення будуть мати локально збіжні послідовності елементів простору $\mathfrak{M}$.

Означення 1. За аналогією з [2] говоритимемо, що послідовність елементів $\mathbf{y}_k = \mathbf{y}_k(\mathbf{n})$, $k \geq 1$, простору $\mathfrak{M}$ локально збігається до елемента $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{n}) \in \mathfrak{M}$ і позначатимемо

$$\mathbf{y}_k \xrightarrow{\text{loc}, \mathfrak{M}} \mathbf{y} \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty,$$

якщо ця послідовність є обмеженою в $\mathfrak{M}$, тобто $\sup_{k \geq 2} \rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_1) < \infty$, і для кожного $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \rho_M(\mathbf{y}_k(\mathbf{n}), \mathbf{y}(\mathbf{n})) = 0.$$

Поняття локально збіжної послідовності введено в розгляд у [3, 4].

Означення 2. Обмежену послідовність елементів $\mathbf{y}_k \in \mathfrak{M}$, $k \geq 1$, називатимемо локально збіжною, якщо існує елемент $\mathbf{z} \in \mathfrak{M}$, для якого

$$\mathbf{y}_k \xrightarrow{\text{loc}, \mathfrak{M}} \mathbf{z} \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty.$$

Зазначимо, що завдяки єдиності границь збіжних послідовностей у просторі M елемент $\mathbf{z} \in \mathfrak{M}$ в означенні 2 єдиний.

Важливим є наступне твердження про існування локально збіжних послідовностей елементів простору $\mathfrak{M}$.

Лема 1. Нехай $(\mathbf{y}_k)_{k \geq 1}$ — довільна обмежена послідовність елементів простору $\mathfrak{M}$, для якої множини $\{\mathbf{y}_k(\mathbf{n}) : k \geq 1\}$, $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m$, передкомпактні.

Існує локально збіжна підпослідовність $(\mathbf{y}_{k_l})_{l \geq 1}$ послідовності $(\mathbf{y}_k)_{k \geq 1}$, що локально збігається до $\mathbf{z} = \mathbf{z}(g) \in \mathfrak{M}$ при $l \rightarrow \infty$, де $\mathbf{z}(\mathbf{n}) = \lim_{l \rightarrow \infty} \mathbf{y}_{k_l}(\mathbf{n})$, $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m$, для якої

$$\sup_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} \rho_M(\mathbf{z}(\mathbf{n}), a) \leq \sup_{l \geq 1, \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} \rho_M(\mathbf{y}_{k_l}(\mathbf{n}), a). \quad (4)$$

Доведення. Оскільки група $\mathbb{Z}^m$ злічenna, то її елементи можна пронумерувати і подати цю групу у вигляді $\mathbb{Z}^m = \{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, \dots\}$.

Розглянемо такі підпослідовності послідовності $(\mathbf{y}_k)_{k \geq 1}$.

$$\mathbf{y}_{k_{1,1}}, \mathbf{y}_{k_{1,2}}, \dots, \mathbf{y}_{k_{1,p}}, \dots,$$

$$\mathbf{y}_{k_{2,1}}, \mathbf{y}_{k_{2,2}}, \dots, \mathbf{y}_{k_{2,p}}, \dots,$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{y}_{k_{l,1}}, \mathbf{y}_{k_{l,2}}, \dots, \mathbf{y}_{k_{l,p}}, \dots,$$

$$\vdots$$

Ці послідовності вважаємо такими, що:

- 1) кожна наступна послідовність є підпослідовністю попередньої послідовності;
- 2) наступні послідовності є збіжними:

$$\begin{aligned} & y_{k_1,1}(\mathbf{n}_1), y_{k_1,2}(\mathbf{n}_1), \dots, y_{k_1,p}(\mathbf{n}_1), \dots, \\ & y_{k_2,1}(\mathbf{n}_2), y_{k_2,2}(\mathbf{n}_2), \dots, y_{k_2,p}(\mathbf{n}_2), \dots, \\ & \vdots \\ & y_{k_l,1}(\mathbf{n}_l), y_{k_l,2}(\mathbf{n}_l), \dots, y_{k_l,p}(\mathbf{n}_l), \dots, \\ & \vdots \end{aligned}$$

Множина послідовностей із такими властивостями є не порожньою, оскільки множини $\{y_k(\mathbf{n}) : k \geq 1\}$, $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m$, передкомпактні.

Завдяки властивостям розглянутих послідовностей діагональна послідовність

$$y_{k_1,1}(\mathbf{n}), y_{k_2,2}(\mathbf{n}), \dots, y_{k_l,l}(\mathbf{n}), \dots$$

є збіжною для кожного $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m$ і тому існують границі

$$\mathbf{z}(\mathbf{n}) = \lim_{l \rightarrow \infty} y_{k_l,l}(\mathbf{n}), \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m. \quad (5)$$

На підставі (5) та обмеженості послідовності $(y_k)_{k \geq 1}$ (за умовами леми 1) виконується співвідношення (4) і функція, що визначається рівностями

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{n}), \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m,$$

є елементом простору $\mathfrak{M}$.

Лемі 1 доведено.

Окремі випадки леми 1 містяться в [5, 6] та інших роботах автора, що використовують теорію c -неперервних операторів.

Означення 3. Оператор $\mathbf{H} : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ називається c -неперервним, якщо для кожних послідовностей $y_k \in \mathfrak{M}$, $k \geq 1$, і $y \in \mathfrak{M}$, для яких $y_{k_l} \xrightarrow{\text{loc}, \mathfrak{M}} y$ при $l \rightarrow \infty$, послідовність $\mathbf{H}y_k \in \mathfrak{M}$, $k \geq 1$, локально збігається до $\mathbf{H}y$ при $k \rightarrow \infty$.

c -Неперервні оператори “мовою ε, δ ” увів до розгляду Е. Мухамадієв у [7]. Визначення цих операторів, що використовує локально збіжні послідовності, запропоновано в [3, 8].

Зазначимо, що для операторів, що діють у просторі $\mathfrak{M}$, c -неперервність не впливає з неперервності і неперервність не впливає з c -неперервності [9, с. 17–19].

3. Множина $\mathfrak{P}$ періодичних елементів простору $\mathfrak{M}$. При розв’язанні задачі про існування обмежених розв’язків рівняння (3) будемо використовувати локальну апроксимацію елементів простору $\mathfrak{M}$ періодичними елементами підмножини $\mathfrak{P}$ цього простору.

До $\mathfrak{P}$ будемо відносити лише елементи $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{n}) = \mathbf{x}((n_1, n_2, \dots, n_m))$ простору $\mathfrak{M}$, що є $(T_1, T_2, \dots, T_m)$ -періодичними, тобто для кожного з них справджується співвідношення

$$\mathbf{x}((n_1 + t_1, n_2 + t_2, \dots, n_m + t_m)) = \mathbf{x}((n_1, n_2, \dots, n_m))$$

для всіх $t_1 \in \{0, T_1\}$, $t_2 \in \{0, T_2\}$, $\dots$, $t_m \in \{0, T_m\}$ і $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m$. Зазначимо, що тут натуральні числа $T_1, T_2, \dots, T_m$ не фіксовані.

4. Допустимі для $\mathbf{F}$ пари компактних множин щодо елементів множини $\mathfrak{P}$. Нехай $R(\mathbf{x})$ — множина значень функції $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$, тобто множина $R(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x}(\mathbf{n}) \in M : \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m\}$.

Означення 4. Пару (K_1, K_2) компактних множин $K_1, K_2 \subset M$ будемо називати допустимою для відображення $\mathbf{F} : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ (або для рівняння (3)) стосовно елементів множини $\mathfrak{P}$, якщо для кожного елемента $\mathbf{h} \in \mathfrak{P}$, для якого $R(\mathbf{h}) \subset K_2$, рівняння (3) має розв'язок $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$ (він може не бути єдиним), для якого $R(\mathbf{x}) \subset K_1$.

5. Приклад рівняння з непорожньою для нього множиною допустимих пар компактних множин. Розглянемо банаховий простір E з нормою $\|\cdot\|_E$ як метричний простір M і рівняння

$$\begin{aligned} & \mathbf{x}((n_1, n_2, \dots, n_m)) - \frac{q}{m} \left(\mathbf{x}((n_1 - 1, n_2, \dots, n_m)) \right. \\ & \quad \left. + \mathbf{x}((n_1, n_2 - 1, \dots, n_m)) + \dots + \mathbf{x}((n_1, n_2, \dots, n_m - 1)) \right) \\ & = \mathbf{h}((n_1, n_2, \dots, n_m)), \quad (n_1, n_2, \dots, n_m) \in \mathbb{Z}^m, \end{aligned} \quad (6)$$

в якому $q \in (0, 1)$ і $\mathbf{h} = \mathbf{h}((n_1, n_2, \dots, n_m))$ — обмежена на $\mathbb{Z}^m$ функція зі значеннями в E .

Очевидно, що це рівняння можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} & \mathbf{x}((n_1, n_2, \dots, n_m)) - q(\mathfrak{A}\mathbf{x})((n_1, n_2, \dots, n_m)) \\ & = \mathbf{h}((n_1, n_2, \dots, n_m)), \quad (n_1, n_2, \dots, n_m) \in \mathbb{Z}^m, \end{aligned} \quad (7)$$

де $\mathfrak{A} : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ — лінійний неперервний оператор:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{A}\mathbf{x})((n_1, n_2, \dots, n_m)) &= \frac{1}{m} \left(\mathbf{x}((n_1 - 1, n_2, \dots, n_m)) \right. \\ & \quad \left. + \mathbf{x}((n_1, n_2 - 1, \dots, n_m)) + \dots + \mathbf{x}((n_1, n_2, \dots, n_m - 1)) \right) \end{aligned}$$

з рівною 1 нормою $\|\mathfrak{A}\|_{L(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})}$. Тут простір $\mathfrak{M}$ розглядаємо як у випадку $M = E$.

Завдяки включенню $q \in (0, 1)$ єдиний розв'язок $\mathbf{x}((n_1, n_2, \dots, n_m))$ рівняння (7) можна подати у вигляді

$$\mathbf{x}((n_1, n_2, \dots, n_m)) = \sum_{k \geq 0} q^k \left(\mathfrak{A}^k \mathbf{h} \right) ((n_1, n_2, \dots, n_m)), \quad (n_1, n_2, \dots, n_m) \in \mathbb{Z}^m. \quad (8)$$

Нехай K — довільна непорожня абсолютно опукла [11, с. 15], компактна в E множина і

$$\mathbf{h}(\mathbf{n}) \in K$$

для всіх $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m$. Згідно з (8), рівністю $\|\mathfrak{A}\|_{L(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})} = 1$ і абсолютною опуклістю множини K

$$\mathbf{x}(\mathbf{n}) \in (1 - q)^{-1} K$$

для всіх $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m$, де $(1 - q)^{-1} K$, як і K , також абсолютно опукла компактна в E множина.

Звідси випливає, що пара $((1 - q)^{-1} K, K)$ абсолютно опуклих компактних у E множин допустима для рівняння (6) стосовно елементів множини $\mathfrak{P}$ для кожної абсолютно опуклої компактної множини K .

6. Умови існування розв'язків рівняння (3) з передкомпактною множиною значень. Справедлива така теорема.

Теорема 1. Нехай:

- 1) оператор $F: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ у рівнянні (3) є обмеженим і c -неперервним;
- 2) пара (K_1, K_2) компактних множин $K_1, K_2 \subset \mathcal{M}$ є допустимою для рівняння (3).

Тоді для кожного елемента $h \in \mathfrak{M}$, для якого $R(h) \subset K_2$, рівняння (3) має хоча б один розв'язок $x \in \mathfrak{M}$, для якого $R(x) \subset K_1$.

Доведення. Зафіксуємо довільний елемент $h \in \mathfrak{M}$ із множиною значень $R(h)$ у K_2 і розглянемо послідовність елементів $h_k \in \mathfrak{P}$, $k \geq 1$, для якої

$$h_k \xrightarrow{\text{loc}, \mathfrak{M}} h \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Завдяки включенню $R(h) \subset K_2$ елементи h_k , $k \geq 1$, можна вибрати так, щоб

$$R(h_k) \subset K_2, \quad k \geq 1. \quad (10)$$

На підставі (10), періодичності h_k і допустимості пари (K_1, K_2) для F різницеве рівняння

$$Fx_k = h_k \quad (11)$$

має у просторі $\mathfrak{M}$ розв'язок x_k і

$$R(x_k) \subset K_1 \quad \text{для кожного} \quad k \geq 1.$$

За лемою 2 існує локально збіжна підпослідовність $(x_{k_l})_{l \geq 1}$ послідовності $(x_k)_{k \geq 1}$ і елемент x_* , для яких

$$x_{k_l} \xrightarrow{\text{loc}, \mathfrak{M}} x_* \quad \text{при} \quad l \rightarrow \infty \quad (12)$$

і

$$R(x_*) \subset K_1.$$

Покажемо, що

$$(Fx_*)(n) = h(n) \quad \text{для всіх} \quad n \in \mathbb{Z}^m. \quad (13)$$

Застосовуючи аксіому трикутника до елементів простору M [10, с. 41], отримуємо, що для кожного $n \in \mathbb{Z}^m$ виконується нерівність

$$\begin{aligned} \rho_M((Fx_*)(n), h(n)) &\leq \rho_M((Fx_*)(n), (Fx_{k_l})(n)) \\ &\quad + \rho_M((Fx_{k_l})(n), h_{k_l}(n)) + \rho_M(h_{k_l}(n), h(n)). \end{aligned}$$

Оскільки завдяки (9), (11), (12) і c -неперервності оператора F для кожного $n \in \mathbb{Z}^m$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} (\rho_M((Fx_*)(n), (Fx_{k_l})(n)) + \rho_M((Fx_{k_l})(n), h_{k_l}(n)) + \rho_M(h_{k_l}(n), h(n))) = 0,$$

то

$$\rho_M((Fx_*)(n), h(n)) = 0 \quad \text{для всіх} \quad n \in \mathbb{Z}^m,$$

тобто правильним є співвідношення (13) і, отже, x_* є розв'язком рівняння (3).

Теорему 1 доведено.

Наслідок 1. Нехай для елемента $h \in \mathfrak{M}$ з передкомпактною множиною значень $R(h)$ існує компактна в M множина K , для якої пара $(K, R(h))$ є допустимою для рівняння (3) щодо елементів множини $\mathfrak{F}$.

Тоді рівняння (3) має хоча б один розв'язок $x \in \mathfrak{M}$, для якого $R(x) \subset K$.

Зазначимо, що в теоремі 1 суттєвою є вимога передкомпактності множини значень функції $h \in \mathfrak{M}$ правої частини рівняння (3). Ця вимога виконується, якщо, наприклад, h є майже періодичним елементом простору $\mathfrak{M}$ або елементом множини $\mathfrak{F}$. Випадок майже періодичних дискретних і, зокрема, різницевих рівнянь досліджувався у [12 – 17].

7. Додаткові зауваження. 1. Лему 1 про існування локально збіжної послідовності визначених і обмежених на групі $\mathbb{Z}^m$ елементів метричного простору $\mathfrak{M}$ наведено вперше.

2. Поняття допустимої пари компактних множин для дискретного рівняння (3) стосовно множини $\mathfrak{F}$ уведено до розгляду вперше. Це поняття не збігається з поняттям допустимості пари банахових функціональних просторів для диференціальних рівнянь, що розглядалося в [18].

3. Множина допустимих пар компактних множин для рівняння (3) є не порожньою, що підтверджено в п. 5.

Автор заявляє про відсутність конфлікту інтересів.

Література

1. М. А. Красносельский, В. Ш. Бурд, Ю. С. Колесов, *Нелинейные почти периодические колебания*, Наука, Москва (1970).
2. В. Е. Слюсарчук, *Необходимые и достаточные условия существования и единственности ограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений*, Нелін. коливання, **2**, № 4, 523 – 539 (1999).
3. В. Е. Слюсарчук, *Метод s -непрерывных операторов в теории импульсных систем*, Тезисы докладов Всесоюзной конференции по теории и приложениям функционально-дифференциальных уравнений, Душанбе, 102 – 103 (1987).
4. В. Е. Слюсарчук, *Слабо нелинейные возмущения нормально разрешимых функционально-дифференциальных и дискретных уравнений*, Укр. мат. журн., **39**, № 5, 660 – 662 (1987).
5. V. E. Slyusarchuk, *Necessary and sufficient conditions for existence and uniqueness of bounded and almost-periodic solutions of nonlinear differential equations*, Acta Appl. Math., **65**, № 1-3, 333 – 341 (2001); DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1010687922737>.
6. В. Ю. Слюсарчук, *Неявні недиференційовні функції в теорії операторів*, Вид-во Нац. ун-ту вод. гос-ва та природокористування, Рівне (2008).
7. Э. Мухамадиев, *Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций*, Мат. заметки, **11**, № 3, 269 – 274 (1972).
8. В. Е. Слюсарчук, *Слабо нелинейные возмущения импульсных систем*, Мат. физика и нелин. механика, Вып. 15, 32 – 35 (1991).
9. В. Ю. Слюсарчук, *Оборотність нелінійних різницевих операторів*, Вид-во Нац. ун-ту вод. гос-ва та природокористування, Рівне (2006).
10. А. М. Колмогоров, С. В. Фомін, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Вища шк., Київ (1974).
11. А. П. Робертсон, В. Дж. Робертсон, *Топологические векторные пространства*, Мир, Москва (1967).
12. В. Ю. Слюсарчук, *Умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з дискретним аргументом*, Нелін. коливання, **16**, № 3, 416 – 425 (2013); **English translation:** J. Math. Sci. (N.Y.), **201**, Issue 3, 391 – 399 (2014).
13. V. Yu. Slyusarchuk, *Almost periodic solutions of difference equations with discrete argument on metric space*, Miskolc Math. Notes, **15**, Issue 1, 211 – 215 (2014); DOI: 10.18514/MMN.2014.1092.

14. В. Ю. Слюсарчук, *Майже періодичні розв'язки нелінійних дискретних систем, що можуть не бути майже періодичними за Бохнером*, Нелін. коливання, **17**, № 3, 407–418 (2014); **English translation:** J. Math. Sci. (N.Y.), **212**, № 3, 335–348 (2016); DOI: 10.1007/s10958-015-2668-y.
15. В. Ю. Слюсарчук, *Майже періодичні та періодичні розв'язки різницевих рівнянь у метричному просторі*, Нелін. коливання, **18**, № 1, 112–119 (2015); **English translation:** J. Math. Sci. (N.Y.), **215**, № 3, 387–394 (2016); DOI: 10.1007/s10958-016-2845-7.
16. В. Е. Слюсарчук, *Почти периодические решения дискретных уравнений*, Изв. РАН. Сер. мат., **80**, № 2, 125–138 (2016); **English translation:** Izv. RAS, Ser. Math., **80**, № 2, 403–416 (2016); DOI: 10.1070/IM8279.
17. В. Ю. Слюсарчук, *Умови існування розв'язків різницевих рівнянь у метричному просторі обмежених послідовностей*, Нелін. коливання, **26**, № 1, 146–154 (2023).
18. Х. Л. Массера, Х. Х. Шеффер, *Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства*, Мир, Москва (1970).

Одержано 07.05.23