

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ РВННЯНЬ

Вікторія Могильова

*Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”
просп. Перемоги, 37, Київ, 03056, Україна
e-mail: mogylova.viktoria@gmail.com*

Роксолана Лахва

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка
вул. Володимирська, 64/13, Київ, 01601, Україна
e-mail: roksolanalakhva@knu.ua, відповідальна за листування*

Василь Кравець

*Таврійський державний агротехнологічний університет імені Дмитра Моторного
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, 69600, Україна
e-mail: v_i_kravets@ukr.net*

For the linear control system of integro-differential equations, we obtain sufficient conditions of optimality in terms of the right-hand sides of the system and functions of the quality criteria. The speciality of the problem lies in the fact that it is considered until the solution reaches the boundary of the domain that depends on control.

Для лінійної за керуванням системи інтегро-диференціальних рівнянь отримано достатні умови оптимальності у термінах правих частин системи та функцій, що входять у критерій якості. Особливістю задачі є те, що її розглядають до моменту виходу розв'язку на межу області, який залежить від керування.

1. Вступ. У цій статті розглянуто задачу оптимального керування системою інтегро-диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(t, x) + f_2(t, x)u(t) + \int_0^t f_3(t, s, x)u(s) ds, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

з критерієм якості

$$J(u) = \int_0^\tau L(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \inf, \quad (1.2)$$

на відріzk $[0, T]$, де $x_0 \in D$ — фіксований вектор, $x \in D$ — фазовий вектор, D — деяка область у $\mathbb{R}^d$, ∂D — межа D , $\bar{D} = D \cup \partial D$, $\tau = \tau(u)$ — момент першого виходу розв'язку, $x(t) = x(t, u)$ на ∂D , $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ — вектор керування, U — опукла, замкнена множина в $\mathbb{R}^m$ і $0 \in U$. Точну постановку задачі буде надано у п. 2.

Основним результатом роботи є отримання достатніх умов оптимальності у термінах правих частин системи та функції L із критерія якості. При цьому момент закінчення процесу (момент виходу розв'язку на межу області) також залежить від керування, що суттєво ускладнює дослідження.

Для систем звичайних диференціальних рівнянь подібні задачі вивчалися в [1], для стохастичних систем — у [2], для систем функціонально-диференціальних рівнянь — у [3], для імпульсних систем — у [4].

Стосовно самих систем інтегро-диференціальних рівнянь зазначимо, що вони є математичними моделями багатьох процесів природознавства, наприклад у флюїдній динаміці, кінетичній хімії (див. [5, 6] та наведену там бібліографію). Такі рівняння з'являються при вивченні мультіволатильних популяцій [7] та ін.

Питання існування розв'язків задач Коші та крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь вивчалися у роботах [8, 9] та ін. Суттєвою умовою у цих роботах була неперервність правих частин за всіма змінними. Однак, для задач оптимального керування наявність у правій частині керування $u(t)$, яке, як правило, є лише вимірною функцією, робить вимогу неперервності правої частини неприродною. Тому в нашому випадку потрібно отримати результат, аналогічний теоремі Каратеодорі для систем звичайних диференціальних рівнянь. У цій статті ми отримуємо такий результат.

Ідея доведення існування оптимального керування у задачі (1.1), (1.2) більш-менш стандартна і складається з трьох етапів:

- 1) виділення слабко збіжної мінімізуючої послідовності допустимих керувань;
- 2) доведення компактності множини відповідних траєкторій;
- 3) обґрунтування граничного переходу в рівнянні та функціоналі якості.

Однак, на відміну від задач із фіксованим моментом закінчення процесу T тут виникає принципова складність: задача розглядається до моменту виходу τ розв'язку на межу розглядуваної області. При цьому цей момент виходу залежить від керування $\tau = \tau(u)$. Тому фактично розв'язком задачі є трійка (u^*, x^*, τ^*) — оптимальне керування, оптимальна траєкторія та оптимальний момент виходу. Зазначимо, що частинним випадком цієї задачі є задача найшвидшого виходу розв'язку на межу області $\tau \rightarrow \inf$ (якщо $L \equiv 1$).

Оскільки момент виходу $\tau = \tau(u)$ залежить від керування, то для доведення існування оптимального керування доводиться ще робити й граничний перехід у моменті виходу $\tau = \tau(u^{(n)})$, що є нетривіальною задачею.

Робота складається зі вступу та трьох частин. У п. 2 ми вводимо необхідні поняття й означення і даємо строгу постановку задачі. Пункт 3 присвячено теоремам існування та продовжуваності розв'язку до його моменту виходу на межу області для систем інтегро-диференціальних рівнянь із вимірною за часовою змінною правою частиною. Формулювання й доведення основного результату статті наведено в останньому пункті.

2. Постановка задачі. Надалі через $|\cdot|$ позначатимемо норму вектора у скінченновимірному евклідовому просторі, а через $\|\cdot\|$ — норму матриці, узгоджену із нормою вектора.

Нехай виконуються такі умови:

А) вектор-функція $f_1(t, x) : [0, T] \times \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^d$, матриця $f_2(t, x) : [0, T] \times \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ і матриця $f_3(t, s, x) : [0, T] \times [0, T] \times \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ неперервні за сукупністю змінних.

Б) окрім того, у випадку необмеженої області D виконуються ще й такі умови для функцій $f_1(t, x)$, $f_2(t, x)$, $f_3(t, s, x)$: $C > 0$ таке, що для довільних $t, s \in [0, T]$, $x \in \overline{D}$:

$$|f_1(t, x)| \leq C(1 + |x|), \quad (2.1)$$

$$\|f_2(t, x)\| \leq C(1 + |x|), \quad (2.2)$$

$$\|f_3(t, s, x)\| \leq C(1 + |x|). \quad (2.3)$$

Функції $L(t, x, u)$, $L_x(t, x, u)$ і $L_u(t, x, u)$ є неперервними за сукупністю змінних для будь-яких $t \in [0, T]$, $x \in \overline{D}$, $u \in U$ і задовольняють умови:

1) існують такі $k > 0$, $p > 1$, що виконується нерівність

$$L(t, x, u) \geq k|u|^p \quad (2.4)$$

для $t \in [0, T]$, $x \in \overline{D}$, $u \in U$;

2) існують такі $K > 0$ і $\alpha > 0$, що

$$|L_x(t, x, u)| + |L_u(t, x, u)| \leq K(1 + |u|^{p-1} + |x|^\alpha) \quad (2.5)$$

для $t \in [0, T]$, $x \in \overline{D}$, $u \in U$;

3) $L(t, x, u)$ опукла по u для будь-яких фіксованих $t \in [0, T]$, $x \in \overline{D}$.

Керування $u(t)$ вважають допустимим, якщо:

$$a1) \ u(t) \in L_p([0, T]), \ \|u(\cdot)\|_p = \left(\int_0^T |u(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}};$$

$$a2) \ u(t) \in U \text{ при } t \in [0, T].$$

Множину допустимих керувань позначатимемо через V .

3. Деякі допоміжні результати. Для подальшого нам потрібні деякі результати про існування розв'язку задачі Коші та його продовжуваність до моменту виходу з області для інтегро-диференціальних систем і з вимірною за незалежною змінною правою частиною. Отже, розглянемо задачі Коші

$$\dot{x} = X\left(t, x, \int_0^t \varphi(t, s, x(s)) ds\right), \quad x(0) = x_0, \quad (3.1)$$

де $x \in D$, D — область у $\mathbb{R}^d$, а ∂D — її межа, $\overline{D} = D \cup \partial D$, $x_0 \in D$. Розв'язок цієї задачі будемо розуміти в такому сенсі.

Означення 3.1. Абсолютно неперервну функцію $x(t)$ називають розв'язком задачі (3.1) на проміжку $[0, T]$, якщо вона задовольняє на $[0, T]$ таке інтегральне рівняння:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t X\left(s, x(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, x(\tau)) d\tau\right) ds. \quad (3.2)$$

Одержали таку теорему.

Теорема 3.1. Нехай $X(t, x, y)$ визначено в області $t \in [0, T]$, $x \in D$, $y \in \mathbb{R}^m$ і виконуються такі умови:

- 1) $X(t, x, y)$ для майже всіх t (за мірою Лебега) неперервна по x і y ;
- 2) $X(t, x, y)$ вимірна по t при всіх x і y ;
- 3) існують інтегровні функції $m(t)$ і $\mu(t, s)$ такі, що

$$|X(t, x, y)| \leq m(t), \quad x \in D, \quad y \in \mathbb{R}^m, \quad (3.3)$$

$$|\varphi(t, s, x)| \leq \mu(t, s), \quad x \in D, \quad (3.4)$$

$$\int_0^T m(t) dt < \infty, \quad \int_0^T \int_0^T \mu(t, s) ds dt < \infty. \quad (3.5)$$

Тоді існує таке $h > 0$, що задача Коші має розв'язок (3.1) на відрізку $[0, h]$.

Доведення. Виберемо $b > 0$ таким чином, що відрізок $|x - x_0| \leq b$ цілком лежить у D , а $h > 0$ таке, що

$$\int_0^h m(t) dt \leq b. \quad (3.6)$$

Для кожного натурального n покладемо $\delta = h/n$ і позначимо $t_i = i\delta$. Послідовно на відрізках $[t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$, побудуємо послідовність функцій $x_n(t)$, визначену на $[0, h]$ таким чином. Покладемо $x_n(t) \equiv x_0$ при $t \leq 0$ і

$$x_n(t) = x_0 + \int_0^t X(s, x_n(s - \delta), \int_0^s \varphi(s, \tau, x_n(\tau - h)) d\tau) ds. \quad (3.7)$$

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ функції $x_n(t)$ визначені та неперервні на $[0, h]$. Дійсно, при $t \in [0, \delta]$ маємо $x_n(t - \delta) = x_0$ і для кожного $s \in [0, \delta]$: $\int_0^s \varphi(s, \tau, x_0) d\tau$ існує та є сумовною функцією, оскільки

$$\int_0^s |\varphi(s, \tau, x_0)| d\tau \leq \int_0^s \mu(s, \tau) d\tau < \infty$$

виконується згідно з умовами (3.4), (3.5) і теоремою Фубіні. Тоді згідно з [10, с. 121] підінтегральна функція (3.7) сумовна, при цьому

$$|x_n(t) - x_0| \leq \int_0^t \left| X\left(s, x_0, \int_0^s \varphi(s, \tau, x_0) d\tau\right) \right| ds \leq \int_0^h m(t) dt \leq b. \quad (3.8)$$

Тоді на $[0, h]$ функція $x_n(t)$ є неперервною і лежить у області D . Аналогічно, при $t \in [h, 2h]$ отримаємо

$$\int_0^s |\varphi(s, \tau, x_n(\tau - h))| d\tau \leq \int_0^s \mu(s, \tau) d\tau < \infty$$

і

$$|x_n(t) - x_0| \leq \int_0^t \left| X(s, x_n(s - \delta), \int_0^s \varphi(s, \tau, x_n(\tau - \delta)) d\tau) \right| ds \leq \int_0^h m(t) dt \leq b.$$

Отже, продовжуючи цей процес, одержуємо, що $x_n(t)$ є неперервною на $[0, h]$ і для неї виконується оцінка

$$|x_n(t) - x_0| \leq b, \quad t \in [0, h]. \quad (3.9)$$

Окрім того, згідно з абсолютною неперервністю інтеграла Лебега для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що коли $|\alpha - \beta| < \delta$, тоді

$$|x_n(\beta) - x_n(\alpha)| \leq \int_{\alpha}^{\beta} m(t) dt < \varepsilon. \quad (3.10)$$

Таким чином, згідно з (3.9) та (3.10) функції $x_n(t)$ є рівностепенено неперервними та рівномірно обмеженими на $[0, h]$. Отже, існує рівномірно збіжна на $[0, h]$ їхня підпослідовність $x_{n_k}(t)$ до неперервної функції $x(t)$. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що сама послідовність $x_n(t)$ рівномірно збігається до $x(t)$ при $n \rightarrow \infty$. Оскільки

$$|x_n(s - \delta) - x(s)| \leq |x_n(s - \delta) - x_n(s)| + |x_n(s) - x(s)|,$$

то згідно з рівностепененою неперервністю та умовою $x_n(s - \delta) \rightarrow x(s)$ при $n \rightarrow \infty$. Отже, з урахуванням неперервності функції $X(t, x, y)$ по x, y і неперервності $\varphi(t, s, x)$ по x , із (3.3)–(3.5), використовуючи теорему Лебега про мажоровану збіжність, у (3.7) можливий граничний перехід під знаком інтегралів. А тому гранична функція $x(t)$ задовольняє рівняння (3.2) і є, очевидно, абсолютно неперервною на $[0, h]$.

Наступна теорема гарантує продовжуваність побудованого розв'язку на межу циліндра $(0, T) \times D \subset \mathbb{R}^{d+1}$ у випадку обмеженості області D .

Теорема 3.2. *За умов теореми 3.1 кожний розв'язок рівняння (3.1), що проходить всередині циліндра $(0, T) \times D$, можна продовжити до його виходу на межу циліндра.*

Доведення. Розглянемо розв'язок $x(t)$, що проходить через точку $(t_0, x_0) \in (0, T) \times D$, яку позначимо через A_0 . Межу циліндра $(0, T) \times D$ позначимо через Γ . Виберемо $\varepsilon_1 > 0$ таке, що $2\varepsilon_1 \leq \rho(A, \Gamma)$ — відстань від точки A до межі Γ . Із абсолютної неперервності інтеграла Лебега маємо існування такого $\delta_1 > 0$, що коли $|\beta - \alpha| < \delta_1$, тоді $\int_{\alpha}^{\beta} m(t) dt < \varepsilon_1$.

Далі, з доведення теореми 3.1 випливає, що розв'язок задачі Коші $x(t_0) = x_0$ можна продовжити вправо на відрізок $[t_0, t_0 + \delta_1]$. Якщо виявиться, що відстань від точки $(t_0 + \delta_1, x(t_0 + \delta_1))$ до Γ не менша $2\varepsilon_1$, то розв'язок можна продовжити вправо ще на δ_1 і т. д., поки він не дійде до точки $A_1(t_1, x_1)$ такої, що $\rho(A_1, \Gamma) < 2\varepsilon_1$. Взявши $\varepsilon_i \rightarrow 0$, $i = 1, 2, \dots$, можемо продовжити розв'язок до точок $A_i(t_i, x_i)$ так, що $t_1 < t_2 < \dots$, і $\rho(A_i, \Gamma) \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$. У протилежному випадку розв'язок продовжиться до верхньої основи циліндра $t = T$. Якщо послідовність $\{t_n\}$ нескінченна, то $t_n \rightarrow t^*$. З обмеженості D випливає, що послідовність $\{x(t_n)\}$ має збіжну підпослідовність. Не обмежуючи загальності, також вважатимемо, що сама $x(t_n) \rightarrow x^*$, $n \rightarrow \infty$. З оцінки

$$|x(\beta) - x(\alpha)| \leq \int_{\alpha}^{\beta} m(t) dt,$$

яка виконується за умови, що при $t \in [\alpha, \beta]$ $x(t)$ лежить у D , впливає рівномірна неперервність функції $x(t)$ на $[t_0, t^*)$, а отже, існування границі

$$\lim_{t \rightarrow t^* - 0} x(t) = x^*.$$

Очевидно, $(t^*, x^*) \in \Gamma$. Поклавши $x(t^*) = x^*$, отримаємо розв'язок, що досягає межі Γ циліндра $(0, T) \times D$ у точці (t^*, x^*) .

Зауваження 3.1. Якщо додатково за умов теореми 3.1 функції $X(t, x, y)$ і $\varphi(t, s, x)$ задовольняють за змінними $x \in D$, $y \in \mathbb{R}$ умову лінійного зростання

$$|X(t, x, y)| \leq m(t)(1 + |x| + |y|), \quad |\varphi(t, s, x)| \leq \mu(t, s)(1 + |x|), \quad (3.11)$$

то умову обмеженості області D в теоремі 3.2 можна зняти.

Доведення. Дійсно, обмеженість D ми використали при доведенні існування скінченної границі

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n) = x^*. \quad (3.12)$$

Але з умови (3.11) для будь-якого $t \in [t_0, t^*)$ отримаємо

$$|x(t)| \leq |x_0| + C + \int_{t_0}^t m(s)|x(s)| ds + \int_0^t \left(\int_0^s \mu(s, \tau)|x(\tau)| d\tau \right) ds.$$

Тоді з узагальненої нерівності Гронуолла матимемо

$$|x(t)| \leq (|x_0| + C) \exp \left\{ C_2 \left(\int_{t_0}^t m(t) dt + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \mu(s, \tau) d\tau ds \right) \right\}$$

на $[t_0, t^*)$. Звідси впливає обмеженість $x(t)$, а отже, й існування скінченної границі (3.12), що й доводить твердження.

4. Основні результати.

Теорема 4.1. Нехай для системи (1.1) з критерієм якості (1.2) виконуються умови А) у випадку обмеженості області D , умови Б) у випадку необмеженої області, а також умови 1)–3). Тоді задача (1.1), (1.2) має розв'язок у класі допустимих керувань V , тобто існує оптимальне керування $u^*(t)$, яке мінімізує критерій якості (1.2).

Доведення. Покажемо, що для кожного допустимого керування існує розв'язок задачі Коші, що продовжується до виходу на межу циліндра $(0, T) \times D$. Для цього перевіримо для кожного допустимого керування $u(t)$ виконання умов теореми 3.1.

Для обмеженої області D з неперервності функцій f_1 , f_2 , f_3 за сукупністю змінних $t \in [0, T]$, $s \in [0, T]$, $x \in D$ впливає існування константи $C_1 > 0$ такої, що

$$|f_1(t, x)| + |f_2(t, x)| + |f_3(t, s, x)| \leq C_1 \quad (4.1)$$

для всіх $t, s \in [0, T]$, $x \in D$. Тоді у нашому випадку $\varphi(t, s, x) = f_3(t, s, x)u(t)$, і ми маємо $|\varphi(t, s, x)| \leq C_1|u(t)|$. А отже,

$$\left| f_1(t, x) + f_2(t, x)u(t) + \int_0^t f_3(t, s, x)u(s) ds \right| \leq C_1 + C_1|u(t)| + C_1 \int_0^t |u(s)| ds.$$

Оскільки функція $\int_0^t |u(s)| ds$ абсолютно неперервна на $[0, T]$, то умови (3.3)–(3.5) виконуються.

У випадку необмеженої області D розглянемо її перетин із кулею радіуса R із центром у нулі. Позначимо його D_R , тоді циліндр $(0, T) \times D_R$ є обмеженою множиною. За умов лінійного зростання для функцій f_1, f_2, f_3 виконується (4.1) у циліндрі $(0, T) \times D_R$. Тоді розв'язок продовжується до межі циліндра. Якщо пара $(t, x(t))$ попадає на межу циліндра $(0, T) \times D$, то твердження встановлено. Якщо ж ні, то $x(t)$ попадає на сферу S_R , а тому пара $(t, x(t))$ лежить усередині циліндра $(0, T) \times D$; отже, згідно з теоремою 3.1 розв'язок продовжимо вправо.

Розглядаючи послідовність куль $B_R(0)$, що вичерпують множину D (за рахунок зростання радіуса), ми продовжуємо розв'язок до його виходу на межу циліндра $(0, T) \times D$.

Взявши в ролі допустимого керування $u(t)$ стале керування, тобто $u(t) = u_0$, отримаємо для нього відповідну допустиму траєкторію $x(t)$, що продовжується до межі області D на відрізьку $[0, \tau]$, де $\tau \leq T$. Оскільки $x(t)$ — неперервна функція на $[0, \tau]$, то вона обмежена. Тоді згідно з неперервністю функції $L(t, x, u)$ за сукупністю змінних маємо

$$\int_0^\tau L(t, x(t), u_0) dt < \infty. \quad (4.2)$$

Тому множина допустимих керувань непорожня.

Тому що критерій якості — невід'ємна величина, існує невід'ємна нижня межа m значень $J(u)$, а отже, й послідовність допустимих керувань $\{u_n(t), n \geq 1\}$ таких, що $J(u_n) \rightarrow m$ при $n \rightarrow \infty$ монотонно. Тобто

$$J(u_n) = \int_0^{\tau_n} L(t, x_n(t), u_n(t)) dt \rightarrow m, \quad n \rightarrow \infty,$$

де $x_n(t)$ — розв'язки системи (1.1), що відповідають керуванням $u_n(t)$, а τ_n — момент виходу розв'язку $x_n(t)$ на границю D .

Зауважимо, що для достатньо великих n

$$J(u_n) \leq m + 1.$$

Не втрачаючи загальності, будемо вважати, що $u_n(s) = 0$ для $\tau_n < s \leq T$ при $\tau_n < T$. Тому з використанням умови (3.6) отримаємо

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau_n} |u_n(t)|^p dt &= \int_0^T |u_n(t)|^p dt \leq \frac{m+1}{k}, \\ \|u_n(\cdot)\|_p &\leq \left(\frac{m+1}{k} \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Останнє означає, що сім'я $u_n(\cdot)$ слабо компактна у просторі $L_p([0, T])$. Тому можна вибрати підпослідовність (яку також позначатимемо через $u_n(t)$), що слабо збігається до границі $u^*(t) \in L_p([0, T])$, і таку, що виконується умова (4.3). Тоді за лемою Мазура знайдеться

опукла комбінація $b_k(t) = \sum_{i=1}^{n(k)} \alpha_i(k) u_i(t)$ елементів $u_i(t) \in U \left(\alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n(k)} \alpha_i = 1 \right)$, що в L_p маємо $b_k \rightarrow u^*$, $k \rightarrow \infty$.

Отже, існує майже всюди збіжна на $[0, T]$ за мірою Лебега підпослідовність b_{k_l} така, що $b_{k_l}(t) \rightarrow u^*(t)$, $l \rightarrow \infty$, для майже всіх t . Оскільки U — опукла та замкнена множина, то $\sum_{i=1}^{n(k)} \alpha_i u_i(t) \in U$ майже для всіх t .

Для розв'язків $x_n(t)$ маємо інтегральне зображення

$$x_n(t) = x_0 + \int_0^t \left[f_1(t, x_n(t)) + f_2(t, x_n(t)) u_n(t) + \int_0^s f_3(s, \sigma, x_n(s)) u_n(\sigma) d\sigma \right] dt.$$

Покажемо рівномірну обмеженість розв'язків x_n при $t \in [0, \tau_n]$. Для обмеженої області це твердження очевидне.

Доведемо рівномірну обмеженість у випадку необмеженої області. Для цього скористаємось умовами лінійного зростання (2.1) – (2.3). При $q = \frac{p}{p-1}$ маємо

$$\begin{aligned} |x_n(t)|^q &= \left| x_0 + \int_0^t f_1(s, x_n(s)) ds + \int_0^t f_2(s, x_n(s)) u_n(s) ds + \int_0^t \int_0^s f_3(s, \sigma, x_n(s)) u_n(\sigma) d\sigma ds \right|^q \\ &\leq 4^{q-1} \left(|x_0|^q + \left| \int_0^t f_1(s, x_n(s)) ds \right|^q + \left| \int_0^t f_2(s, x_n(s)) u_n(s) ds \right|^q \right. \\ &\quad \left. + \left| \int_0^t \int_0^s f_3(s, \sigma, x_n(s)) u_n(\sigma) d\sigma ds \right|^q \right) \\ &\leq 4^{q-1} \left(|x_0|^q + C^q \left(T + \int_0^t |x_n(s)| ds \right)^q + C^q \left(\int_0^t u_n(s) ds + \int_0^t |x_n(s)| |u_n(s)| ds \right)^q \right) \\ &\quad + C^q \left(T + \int_0^t |x_n(s)| ds \right)^q \left(\int_0^t |u_n(s)| ds \right)^q \\ &\leq 4^{q-1} \left(|x_0|^q + C^q \left(T + \int_0^t |x_n(s)| ds \right)^q \left(1 + \left(\int_0^t |u_n(s)| ds \right)^q \right) \right. \\ &\quad \left. + C^q \left(\int_0^t u_n(s) ds + \int_0^t |x_n(s)| |u_n(s)| ds \right)^q \right). \end{aligned}$$

Для оцінки другого і третього інтегралів у останній нерівності використаємо нерівність Гельдера, а також врахуємо, що $\tau_n \leq T$. У результаті матимемо

$$\begin{aligned}
|x_n(t)|^q &\leq 8^{q-1} C^q \left(\frac{|x_0|^q 2^{1-q}}{C^q} + \left(T^q + \left(\int_0^t |x_n(s)| ds \right)^q \right) \left(1 + \left(\int_0^T |u_n(s)| ds \right)^q \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_0^t |u_n(s)| ds \right)^q + \left(\int_0^t |x_n(s)| |u_n(s)| ds \right)^q \right) \\
&\leq 8^{q-1} C^q \left(\frac{|x_0|^q 2^{1-q}}{C^q} + T^q \left(1 + \left(\int_0^T |u_n(s)| ds \right)^q \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_0^t |x_n(s)| ds \right)^q \left(1 + \int_0^T |u_n(s)| ds \right)^q \right) \\
&\quad + \left(\int_0^t |u_n(s)| ds \right)^q + \left(\int_0^t |x_n(s)| |u_n(s)| ds \right)^q \\
&\leq 8^{q-1} C^q \left(\frac{|x_0|^q 2^{1-q}}{C^q} + T^q (1 + T \|u_n\|_p^q) \right) \\
&\quad + T^{\frac{q}{p}} (1 + T \|u_n\|_p^q) \int_0^t |x_n(s)|^q ds + T \|u_n\|_p^q + \|u_n\|_p^q \int_0^t |x_n(s)|^q ds.
\end{aligned}$$

Позначимо

$$\begin{aligned}
M_1 &= 8^{q-1} C^q \left(\frac{|x_0|^q 2^{1-q}}{C^q} \right) + T^q + (T^q + 1) T \|u_n\|_p^q, \\
M_2 &= 8^{q-1} C^q \left(T^{\frac{q}{p}} (1 + T \|u_n\|_p^q) + \|u_n\|_p^q \right).
\end{aligned}$$

Тоді за аналогом леми Гроноулла – Беллмана одержуємо

$$|x_n(t)|^q = M_1 e^{M_2 T} = A^q < \infty \quad (4.4)$$

при $t \in [0, \tau_n]$. Оскільки розв'язки x_n при $t \in [0, \tau_n]$ рівномірно обмежені, то $|x_n(\tau_n)| \leq A$. Тому функції x_n можна продовжити на весь відрізок $[0, T]$ таким чином:

$$y_n(t) = \begin{cases} x_n(t) & \text{при } t \in [0, \tau_n), \\ x_n(\tau_n) & \text{при } t \in [\tau_n, T]. \end{cases} \quad (4.5)$$

Доведемо рівностепеневу неперервність функцій $y_n(t)$ при $t \in [0, T]$. Для будь-яких $s_1, s_2 \in [0, \tau_n]$ таких, що $s_1 < s_2$, маємо

$$|y_n(s_1) - y_n(s_2)| = |x_n(s_1) - x_n(s_2)| \\ = \left| \int_{s_1}^{s_2} \left(f_1(t, x_n(t)) + f_2(t, x_n(t))u_n(t) + \int_0^t f_3(t, s, x_n(t))u_n(s) ds \right) dt \right|.$$

Розглянемо два випадки, коли область D обмежена й необмежена.

Якщо область D обмежена, то, очевидно, існує константа $C_2 > 0$ така, що $|f_1(t, x_n(t))| + |f_2(t, x_n(t))| + |f_3(t, s, x_n(t))| \leq C_2$. Тоді, використовуючи нерівність Гельдера для інтеграла

$$\int_{s_1}^{s_2} (f_1(t, x_n(t)) + f_2(t, x_n(t))u_n(t) + \int_0^t f_3(t, s, x_n(t))u_n(s) ds) dt, \quad (4.6)$$

отримаємо оцінку

$$C_2(s_2 - s_1) + C_2(s_2 - s_1)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^T |u_n(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} + C_2(s_2 - s_1)T \left(\int_0^T |u_n(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

де $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, яка й означає рівностепеневу неперервність.

Якщо ж область необмежена, то, використовуючи умови (2.1)–(2.3), оцінимо (4.6) таким чином:

$$\int_{s_1}^{s_2} \left(C_3(1 + |x_n(t)|) + C_3(1 + |x_n(t)|)|u_n(t)| + \int_0^t C_3(1 + |x_n(t)|)|u_n(s)| ds \right) dt \\ \leq C_3(1 + A) \left((s_2 - s_1) + (s_2 - s_1)^{\frac{1}{q}} \|u_n\|_p + (s_2 - s_1) \|u_n\|_p \right).$$

Вочевидь, що з наведених вище оцінок маємо $y_n(s_1) - y_n(s_2) \rightarrow 0$ при $|s_2 - s_1| \rightarrow 0$. При $s_1 < \tau_n < s_2 < T$ одержуємо

$$|y_n(s_1) - y_n(\tau_n)| = |x_n(s_1) - x_n(\tau_n)| \\ = \int_{s_1}^{\tau_n} \left| f_1(t, x_n(t)) + f_2(t, x_n(t))u_n(t) + \int_0^t f_3(t, s, x_n(t))u_n(s) ds \right| dt.$$

Якщо область обмежена, то, аналогічно з попереднім,

$$\int_{s_1}^{\tau_n} \left(f_1(t, x_n(t)) + f_2(t, x_n(t))u_n(t) + \int_0^t f_3(t, s, x_n(t))u_n(s) ds \right) dt \quad (4.7)$$

оцінюють величиною

$$C_4(\tau_n - s_1) + C_4(\tau_n - s_1)^{\frac{1}{q}} \|u_n\|_p + C_4(\tau_n - s_1)T \|u_n\|_p \\ \leq C_4(s_2 - s_1) + C_4(s_2 - s_1)^{\frac{1}{q}} \|u_n\|_p + C_4(s_2 - s_1) \|u_n\|_p.$$

Оцінимо (4.7) у випадку необмеженої області. Аналогічно з попереднім маємо

$$\begin{aligned} & \int_{s_1}^{\tau_n} C_5(1 + |x_n(t)|) + \int_{s_1}^{\tau_n} C_5 \left(1 + |x_n(t)| |u_n(t)| dt + \int_{s_1}^{\tau_n} \int_0^t C_5(1 + |x_n(t)|) |u_n(s)| ds \right) \\ & \leq C_5(1 + A) \left((\tau_n - s_1) + (\tau_n - s_1)^{\frac{1}{q}} \|u_n\|_p + (\tau_n - s_1) \|u_n\|_p \right) \\ & \leq C_5(1 + A) \left((s_2 - s_1) + (s_2 - s_1)^{\frac{1}{q}} \|u_n\|_p + (s_2 - s_1) \|u_n\|_p \right). \end{aligned}$$

Тоді

$$|y_n(s_1) - y_n(\tau_n)| = |x_n(s_1) - x_n(\tau_n)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |s_2 - s_1| \rightarrow 0.$$

Якщо $\tau_n < s_1 < s_2 < T$, то

$$|y_n(s_1) - y_n(s_2)| = |x_n(\tau_n) - x_n(\tau_n)|.$$

Таким чином, встановлено рівностепеневу неперервність функцій $y_n(t)$ при $t \in [0, T]$.

Отже, можна виділити підпослідовність послідовності $\{y_n(t), n \geq 1\}$ (яку також позначимо через $\{y_n(t), n \geq 1\}$) таку, що $y_n(t) \rightarrow y^*(t)$, $n \rightarrow \infty$, рівномірно на відрізку $[0, T]$.

Позначимо через τ^* момент першого виходу $y^*(t)$ на границю ∂D , тобто

$$\begin{aligned} \tau^* &= \begin{cases} \inf\{t \in [0, T], y^*(t) \in \partial D\}, \\ T, \quad \text{якщо} \quad y^*(t) \in D \quad \forall t \in [0, T], \end{cases} \\ \tau_n &= \begin{cases} \inf\{t \in [0, T] : y_n(t) \in \partial D\}, \\ T, \quad \text{якщо} \quad y_n(t) \in D \quad \forall t \in [0, T]. \end{cases} \end{aligned}$$

Покажемо, що $\tau^* \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \tau_n$. Припустимо, що це не так. Тоді $\tau^* > \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \tau_n = \tau$. За теоремою про характеристизацію нижньої границі для довільного $\delta > 0$ множина $\{n \in \mathbb{N} \mid \tau_n < \tau + \delta\}$ є нескінченною. Виберемо δ таким чином, щоб $\tau + \delta < \tau^*$. Тоді існує така підпослідовність $\{\tau_{n_k}, n_k \geq 1\}$ послідовності $\{\tau_n, n \geq 1\}$, що існує $N \in \mathbb{N}$ таке, що для будь-якого $n_k \geq N$ $\tau_{n_k} < \tau + \delta$.

Виберемо момент t_0 такий, що $t_0 \in (\tau + \delta, \tau^*)$, тоді $y_{n_k}(t_0) = x_{n_k}(\tau_{n_k}) \in \partial D$. Із рівномірної збіжності $y_n(t)$ до $y^*(t)$ на $[0, T]$ маємо, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $N \in \mathbb{N}$ таке, що $n_k \geq N$ і виконується нерівність $|y^*(t) - y_{n_k}(t)| < \varepsilon$.

Проте, якщо вибрати ε так, щоб $0 < \varepsilon < \inf_{v \in \partial D} |y^*(t_0) - v|$, тоді для фіксованого $t_0 \in (\tau + \delta, \tau^*)$

$$|y^*(t_0) - y_{n_k}(t)| = |y^*(t_0) - x_{n_k}(\tau_{n_k})| > \varepsilon.$$

Ми отримали суперечність. Отже,

$$\tau^* \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \tau_n.$$

Покладемо $x^*(t) = y^*(t)$ при $t \in [0, \tau^*]$. Покажемо, що $x^*(t)$ є розв'язком системи (1.1) при $t \in [0, \tau^*]$, що відповідає керуванню $u^*(t)$.

Розглянемо два випадки:

1) Нехай $\tau^* \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \tau_n$. Тоді за теоремою про характеризацію нижньої границі множина $\{n \in \mathbb{N} \mid \tau_n < \tau^*\}$ скінченна. Тому можна вибрати підпослідовність $\{t_k, k > 0\}$ послідовності $\{t_n, n > 0\}$ таку, що для довільного $k > 0$ виконується $\tau_k > \tau^*$. Тоді для будь-якого $t \in [0, \tau^*]$ маємо $y_k(t) = x_k(t)$ і $y^*(t) = x^*(t)$. Оскільки для кожного $t \in [0, T]$ $y_k(t) \rightarrow y^*(t)$ при $k \rightarrow \infty$ рівномірно, то $x_k(t) \rightarrow x^*(t)$ при $k \rightarrow \infty$ рівномірно по $t \in [0, \tau]$. Тому що $x_k(t)$ — розв'язок системи (1.1), маємо

$$\begin{aligned}
 x_k(t) &= x_0 + \int_0^t \left(f_1(s, x_k(s)) + f_2(s, x_k(s))u_k(s) + \int_0^s f_3(s, \sigma, x_k(s))u_k(\sigma)d\sigma \right) ds \\
 &= x_0 + \int_0^t \left(f_1(s, x_k(s)) + f_2(s, x_k(s))u_k(s) + \int_0^s f_3(s, \sigma, x_k(s))u_k(\sigma)d\sigma \right) ds \\
 &\quad + \int_0^t f_2(s, x_k(s))u^*(s)ds - \int_0^t f_2(s, x^*(s))u_k(s)ds \\
 &\quad + \int_0^t f_2(s, x^*(s))u_k(s)ds + \int_0^t f_2(s, x^*(s))u_k(s)ds \\
 &\quad - \int_0^t f_2(s, x^*(s))u_k(s)ds + \int_0^t \int_0^s f_3(s, \sigma, x_k(s))u^*(\sigma)d\sigma ds \\
 &\quad - \int_0^t \int_0^s f_3(s, \sigma, x_k(s))u^*(\sigma)d\sigma ds + \int_0^t \int_0^s f_3(s, \sigma, x^*(s))u_k(\sigma) d\sigma ds \\
 &\quad - \int_0^t \int_0^s f_3(s, \sigma, x^*(s))u_k(\sigma)d\sigma ds + \int_0^t \int_0^s f_3(s, \sigma, x^*(s))u^*(\sigma) d\sigma ds \\
 &\quad - \int_0^t \int_0^s f_3(s, \sigma, x^*(s))u^*(\sigma) d\sigma ds \\
 &= x_0 + \int_0^t \left(f_1(s, x_k(s)) + f_2(s, x_k(s))u^*(s) + \int_0^s f_3(s, \sigma, x_k(s))u^*(\sigma) d\sigma \right) ds \\
 &\quad + \int_0^t (f_2(s, x_k(s)) - f_2(s, x^*(s)))(u_k(s) - u^*(s))ds \\
 &\quad + \int_0^t \int_0^s (f_3(s, \sigma, x_k(s)) - f_3(s, \sigma, x^*(s)))(u_k(\sigma) - u^*(\sigma))d\sigma ds
 \end{aligned}$$

$$+ \int_0^t f_2(s, x^*(s))(u_k(s) - u^*(s))ds + \int_0^t \int_0^s (f_3(s, \sigma, x^*(s))(u_k(\sigma) - u^*(\sigma))d\sigma)ds.$$

Для другого інтеграла в останній рівності із застосуванням нерівності Гельдера матимемо оцінку

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t (f_2(s, x_k(s)) - f_2(s, x^*(s)))(u_k(s) - u^*(s))ds \right| \\ & \leq \left(\int_0^t |f_2(s, x_k(s)) - f_2(s, x^*(s))|^q ds \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^t |u_k(s) - u^*(s)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \\ & = \|u_k(t) - u^*(t)\|_p \left(\int_0^t |f_2(s, x_k(s)) - f_2(s, x^*(s))|^q ds \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Аналогічні міркування проведемо і для третього інтеграла:

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \int_0^s (f_3(s, \sigma, x_k(s)) - f_3(s, \sigma, x^*(s)))(u_k(\sigma) - u^*(\sigma))d\sigma ds \right| \\ & \leq \left(\int_0^t \int_0^s |f_3(s, \sigma, x_k(s)) - f_3(s, \sigma, x^*(s))|^q d\sigma ds \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^t \int_0^s |u_k(\sigma) - u^*(\sigma)|^p d\sigma ds \right)^{\frac{1}{p}} \\ & = \|u_k(t) - u^*(t)\|_p \left(\int_0^t \int_0^s |f_3(s, \sigma, x_k(s)) - f_3(s, \sigma, x^*(s))|^q d\sigma ds \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

У випадку обмеженої області використаємо (4.1) і одержимо $|f_3(t, s, x_k(t))| \leq C_6$, де стала $C_6 > 0$.

Якщо ж область необмежена, то використовуємо умови (2.2), (2.3); отримуємо

$$|f_2(t, x_k(t))| \leq C_6(1 + |x_k(t)|) \leq C_6(1 + A),$$

$$|f_3(t, s, x_k(t))| \leq C_6(1 + |x_k(t)|) \leq C_6(1 + A).$$

Отже, функції $f_2(t, x_k(t))$ і $f_3(t, s, x_k(t))$ інтегровні на $[0, \tau_k]$, а тому на $[0, \tau^*]$. З рівномірної збіжності $x_k(t)$ до $x^*(t)$ на $[0, \tau^*]$ випливає аналогічна оцінка й для $x^*(t)$. Тоді згідно з теоремою Лебега другий і третій інтеграли прямують до нуля при $k \rightarrow \infty$.

Четвертий інтеграл $\int_0^t f_2(s, x^*(s))(u_k(s) - u^*(s))ds$ прямує до нуля згідно зі слабкою збіжністю $u_k(t)$ до $u^*(t)$ при $k \rightarrow \infty$.

Прямуювання останнього інтеграла до нуля випливає з теореми Лебега про мажоровану збіжність із використанням означення слабкої збіжності $u_k(t)$ до $u^*(t)$ при $k \rightarrow \infty$.

Аналогічними міркуваннями отримуємо, що згідно з теоремою Лебега перший інтеграл прямує до виразу

$$\int_0^t \left(f_1(s, x^*(s)) + f_2(s, x^*(s))u^*(s) + \int_0^s f_3(s, \sigma, x^*(s))u^*(\sigma) d\sigma \right) ds$$

при $k \rightarrow \infty$. Отже, граничним переходом при $k \rightarrow \infty$ одержуємо

$$x^*(t) = x_0 + \int_0^t \left(f_1(s, x^*(s)) + f_2(s, x^*(s))u^*(s) + \int_0^s f_3(s, \sigma, x^*(s))u^*(\sigma) d\sigma \right) ds \quad (4.8)$$

для будь-якого $t \in [0, \tau^*]$.

2) Нехай тепер $\tau^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \tau_n$. Виберемо довільний момент t_2 такий, що $t_2 < \tau^*$. Тоді за теоремою про характеристизацію нижньої границі множина $\{n \in \mathbb{N} \mid \tau_n < t_2\}$ скінченна, а на проміжку (t_2, τ^*) може лежати нескінченна кількість τ_n . У цьому випадку виберемо підпослідовність $\{\tau_k, k > 0\}$ послідовності $\{\tau_k, k > 0\}$ таку, що для будь-якого $k > 0$: $\tau_k \in (t_2, \tau^*)$. Тоді для кожного $t \in [0, t_2]$ маємо $y_k(t) = x_k(t)$ і $y^*(t) = x^*(t)$. Аналогічно з попереднім пунктом маємо, що (4.8) виконується для будь-якого $t \in [0, t_2]$. Доведемо виконання рівності (4.8) для довільного $t \in [0, \tau^*]$. Оскільки t_2 вибрано довільним чином, то для кожного $t \in [0, \tau^*)$ рівність (4.8) виконується.

Залишилося показати виконання рівності (4.8) у точці τ^* , а саме:

$$x^*(\tau^*) = x_0 + \int_0^{\tau^*} \left(f_1(s, x^*(s)) + f_2(s, x^*(s))u^*(s) + \int_0^s f_3(s, \sigma, x^*(s))u^*(\sigma) d\sigma \right) ds.$$

Виберемо послідовність $t_n \in [0, \tau^*]$ таку, що $t_n \rightarrow \tau^*$. Тоді $x^*(\tau_n) \rightarrow x^*(\tau^*)$, того що $x^*(t)$ є неперервною на $[0, \tau^*]$.

Далі маємо

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{\tau^*} \left(f_1(s, x^*(s)) + f_2(s, x^*(s))u^*(s) + \int_0^s f_3(s, \sigma, x^*(s))u^*(\sigma) d\sigma \right) ds \right. \\ & \quad \left. - \int_0^{t_n} \left(f_1(s, x^*(s)) + f_2(s, x^*(s))u^*(s) + \int_0^s f_3(s, \sigma, x^*(s))u^*(\sigma) d\sigma \right) ds \right| \\ & = \left| \int_{t_n}^{\tau^*} \left(f_1(s, x^*(s)) + f_2(s, x^*(s))u^*(s) + \int_0^s f_3(s, \sigma, x^*(s))u^*(\sigma) d\sigma \right) ds \right|. \end{aligned}$$

Оцінимо останній вираз у випадку обмеженої області. Очевидно, що існує стала $C_7 > 0$ така, що

$$|f_1(s, x^*(s))| + |f_2(s, x^*(s))| + |f_3(t, s, x^*(s))| \leq C_7.$$

Звідки впливає оцінка

$$C_7(\tau^* - t_n) + C_7(\tau^* - t_n)^{\frac{1}{q}} \|u^*\|_p + C_7(\tau^* - t_n)T \|u^*\|_p \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$.

У випадку необмеженої області, використовуючи умови (2.1) – (2.3) і (4.4), маємо оцінку

$$C(1+A)|\tau^* - t_n| + C(1+A)|\tau^* - t_n|^{\frac{1}{q}} \|u^*\|_p + C(1+A)|\tau^* - t_n| T \|u^*\|_p \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$.

Отже,

$$\begin{aligned} x^*(t_n) &= x_0 + \int_0^{t_n} \left(f_1(s, x^*(s)) + f_2(s, x^*(s))u^*(s) + \int_0^s f_3(s, \sigma, x^*(s))u^*(\sigma) d\sigma \right) ds \\ &\rightarrow x_0 + \int_0^{\tau^*} \left(f_1(s, x^*(s)) + f_2(s, x^*(s))u^*(s) + \int_0^s f_3(s, \sigma, x^*(s))u^*(\sigma) d\sigma \right) ds = x^*(\tau^*) \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$.

А тому $x^*(t)$ — розв’язок системи (1.1), що відповідає керуванню $u^*(t)$ при $t \in [0, \tau^*]$.

Залишилися довести, що керування $u^*(t)$ є оптимальним. Знову розглянемо 2 випадки:

1) $y^*(\tau^*) \in \partial D$.

а) Нехай $\tau^* < \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \tau_n$. Виберемо довільний момент t_2 такий, що $t_2 < \tau_n$. Тоді за теоремою про характеристику нижньої границі множини $\{n \in \mathbb{N} \mid \tau_n < \tau^*\}$ скінченна. Тому можна вибрати підпослідовність $\{\tau_k, k \geq 0\}$ послідовності $\{\tau_{n_k}, n_k \geq 0\}$ таку, що для будь-якого $k > 0$ виконується $\tau_k > \tau^*$. Тоді для кожного $t \in [0, \tau^*]$ маємо $y_k(t) = x_k(t)$ і $y^*(t) = x^*(t)$. Покажемо інтегровність функції $L(t, x^*(t), u_k(t))$ для будь-якого $k > 0$ на відрізьку $[0, \tau^*]$.

Використовуючи нерівність

$$|L(t, x^*(t), u_k(t)) - L(t, x^*(t), u_0)| \leq \sup_{\lambda \in (0,1)} |L_u(t, x^*(t), u_0) + \lambda(u_k(t) - u_0)| |u_k(t) - u_0|,$$

де $u_0 = \text{const}$, $u_0 \in U$, отримуємо

$$\begin{aligned} |L(t, x^*(t), u_k(t))| &\leq |L(t, x^*(t), u_0)| + |L(t, x^*(t), u_k(t)) - L(t, x^*(t), u_0)| \\ &\leq |L(t, x^*(t), u_0)| + \sup_{\lambda \in (0,1)} |L_u(t, x^*(t), u_0 + \lambda(u_k(t) - u_0))| |u_k(t) - u_0|. \end{aligned}$$

Застосовуючи умову (2.5), одержуємо

$$\begin{aligned} |L(t, x^*(t), u_k(t))| &\leq |L(t, x^*(t), u_0)| + K(1 + |x^*(t)|)^\alpha \\ &\quad + \sup_{\lambda \in (0,1)} |u_0 + \lambda(u_k(t) - u_0)|^{p-1} |u_k(t) - u_0| \\ &\leq |L(t, x^*(t), u_0)| + K|u_k(t) - u_0| + K|x^*(t)|^\alpha |u_k(t) - u_0| \\ &\quad + K \sup_{\lambda \in (0,1)} |u_0 + \lambda(u_k(t) - u_0)|^{p-1} |u_k(t) - u_0|. \end{aligned}$$

Перший доданок інтегрований на відрізьку $[0, \tau^*]$ відповідно до (4.2). Покажемо інтегровність другого та третього доданків. Застосовуючи нерівність (4.4), маємо

$$\int_0^{\tau^*} [K|u_k(t) - u_0| + K|x^*(t)|^\alpha |u_k(t) - u_0|] dt$$

$$\begin{aligned}
&= K \int_0^{\tau^*} (1 + |x^*(t)|^\alpha) |u_k(t) - u_0| \\
&\leq \left(\int_0^{\tau^*} (1 + |x^*(t)|^\alpha)^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^{\tau^*} |u_k(t) - u_0|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq K(1 + A^\alpha)^{\frac{1}{p}} \|u_k(t) - u_0\|_p < \infty.
\end{aligned}$$

Покажемо інтегровність останнього доданка. Нехай $A_k = \{t \in [0, \tau^*] : u_k(t) = u_0\}$. Тоді

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\tau^*} \sup_{\lambda \in (0,1)} |u_0 + \lambda(u_k(t) - u_0)|^{p-1} |u_k(t) - u_0| dt \\
&\leq \int_0^{\tau^*} (|u_0| + |u_k(t) - u_0|)^{p-1} |u_k(t) - u_0| dt \\
&\leq \int_{A_k} (|u_0| + |u_k(t) - u_0|)^{p-1} |u_k(t) - u_0| dt \\
&\quad + \int_{[0, \tau^*] \setminus A_k} (|u_0| + |u_k(t) - u_0|)^{p-1} |u_k(t) - u_0| dt.
\end{aligned}$$

Перший інтеграл дорівнює нулю. Помноживши та поділивши підінтегральну функцію у другому інтегралі на $|u_0| + |u_k(t) - u_0|$, одержимо

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\tau^*} \sup_{\lambda \in (0,1)} |u_0 + \lambda(u_k(t) - u_0)|^{p-1} |u_k(t) - u_0| dt \\
&\leq \int_{[0, \tau^*] \setminus A_k} \frac{(|u_0| + |u_k(t) - u_0|)^p}{|u_0| + |u_k(t) - u_0|} |u_k(t) - u_0| dt \\
&\leq 2^{p-1} \int_{[0, \tau^*] \setminus A_k} \frac{(|u_0|^p + |u_k(t) - u_0|^p)}{|u_k(t) - u_0|} |u_k(t) - u_0| dt \\
&\leq 2^{p-1} \int_0^{\tau^*} (|u_0|^p + |u_k(t) - u_0|^p) dt < \infty.
\end{aligned}$$

Отже, функція $L(t, x^*(t), u_k(t))$ інтегровна на відрізку $[0, \tau^*]$ для будь-якого $k > 0$.

Нехай $\chi_R(t)$ — характеристична функція множини $\{t: |u^*(t)| < R\}$. Оскільки $L(t, x, \cdot)$ опукла, то виконується нерівність

$$\begin{aligned} L(t, x^*(t), v(t))\chi_R(t) \\ \geq L(t, x^*(t), u^*(t))\chi_R(t) + (v(t) - u^*(t))L_v(t, x^*(t), u^*(t))\chi_R(t) \end{aligned}$$

для будь-якого $v(t) \in V$, $t \in [0, \tau^*]$.

Покладемо $v(t) = u_k(t)$, тоді

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau^*} L(t, x^*(t), u_k(t))dt\chi_R(t) &\geq \int_0^{\tau^*} L(t, x^*(t), u^*(t))\chi_R(t) dt \\ &+ \int_0^{\tau^*} (u_k(t) - u^*(t))L_u(t, x^*(t), u^*(t))\chi_R(t) dt. \end{aligned} \quad (4.9)$$

З умови (2.5) маємо

$$\begin{aligned} |L(t, x^*(t), u^*(t))|_{\chi_R(t)} \\ \leq K(1 + |u^*(t)|^{p-1} + |x^*(t)|^\alpha) \leq K(1 + R^{p-1} + A^\alpha). \end{aligned}$$

Отже, другий інтеграл у нерівності (4.9) прямує до 0 при $k \rightarrow \infty$. Останнє впливає зі слабкої збіжності $u_k(t)$ до $u^*(t)$. Тому

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\tau^*} L(t, x^*(t), u_k(t))\chi_R(t) dt \geq \int_0^{\tau^*} L(t, x^*(t), u^*(t))\chi_R(t) dt.$$

Оскільки $L(t, x, u) \geq 0$, $\chi_R(t) \leq 1$ і $\chi_R(t) \rightarrow 1$ при $R \rightarrow \infty$, то

$$\int_0^{\tau^*} L(t, x^*(t), u^*(t))dt \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\tau^*} L(t, x^*(t), u_k(t))dt. \quad (4.10)$$

Розглянемо також величину

$$\left| \int_0^{\tau^*} [L(t, x_k(t), u_k(t)) - L(t, x^*(t), u_k(t))]dt \right|.$$

Використавши рівність

$$L(t, x_k(t), u_k(t)) - L(t, x^*(t), u_k(t)) = \int_0^1 L_x(t, x_{\lambda_k}(t), u_k(t))(x_k(t) - x^*(t))d\lambda,$$

де $x_{\lambda_k}(t) = x^*(t) + \lambda(x_k(t) - x^*(t))$, а також застосовуючи нерівності (2.5), (4.4) і нерівність Гельдера, отримуємо

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{\tau^*} [L(t, x_k(t), u_k(t)) - L(t, x^*(t), u_k(t))] dt \right| \\ &= \left| \int_0^{\tau^*} \int_0^1 L_x(t, x_{\lambda_k}(t), u_k(t))(x_k(t) - x^*(t)) d\lambda dt \right| \\ &\leq \int_0^{\tau^*} |x_k(t) - x^*(t)| K(1 + |u_k(t)|^{p-1} + |x_k(t) + x^*(t)|^\alpha) dt \\ &\leq K \int_0^{\tau^*} |x_k(t) - x^*(t)|(1 + (2A)^\alpha) dt + K \int_0^{\tau^*} |x_k(t) - x^*(t)| |u_k(t)|^{p-1} dt \\ &\leq K \int_0^{\tau^*} |x_k(t) - x^*(t)|(1 + (2A)^\alpha) dt + K \|u_k\|_p^{\frac{p}{q}} \left(\int_0^{\tau^*} |x_k(t) - x^*(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Отже, далі маємо

$$\begin{aligned} & \int_0^{\tau^*} [L(t, x_k(t), u_k(t)) - L(t, x^*(t), u_k(t))] dt \\ &\leq K \int_0^{\tau^*} |x_k(t) - x^*(t)|(1 + (2A)^\alpha) dt \\ &\quad + K \|u_k\|_p^{\frac{p}{q}} \left(\int_0^{\tau^*} |x_k(t) - x^*(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Оскільки $\|u_k\|_p$ обмежена, то права частина (4.11) прямує до 0 при $k \rightarrow \infty$. Одержуємо

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau^*} [L(t, x_k(t), u_k(t))] dt &= \int_0^{\tau^*} [L(t, x_k(t), u_k(t)) - L(t, x^*(t), u_k(t))] dt \\ &\quad + \int_0^{\tau^*} [L(t, x^*(t), u_k(t)) - L(t, x^*(t), u^*(t))] dt \\ &\quad + \int_0^{\tau^*} L(t, x^*(t), u^*(t)) dt. \end{aligned}$$

Перейдемо до нижньої границі при $k \rightarrow \infty$ в останній рівності:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\tau^*} L(t, x_k(t), u_k(t)) dt &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\tau^*} [L(t, x_k(t), u_k(t)) - L(t, x^*(t), u_k(t))] dt \\ &\quad + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\tau^*} [L(t, x^*(t), u_k(t)) - L(t, x^*(t), u^*(t))] dt \\ &\quad + \int_0^{\tau^*} L(t, x^*(t), u^*(t)) dt. \end{aligned}$$

Перша границя у правій частині цієї рівності прямує до 0 при $k \rightarrow \infty$ згідно з (4.11). А згідно з нерівністю (4.10) друга границя невід’ємна. Тоді маємо

$$\begin{aligned} m &= \lim_{k \rightarrow \infty} \inf \int_0^{\tau_k} L(t, x_k(t), u_k(t)) dt \\ &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \inf \int_0^{\tau^*} L(t, x_k(t), u_k(t)) dt \\ &\geq \int_0^{\tau^*} L(t, x^*(t), u^*(t)) dt. \end{aligned}$$

Звідси

$$J(u^*) = m.$$

Отже, $u^*(t)$ — оптимальне керування.

б) Нехай тепер $\tau^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \tau_n$. Виберемо довільний момент t_2 такий, що $t_2 < \tau^*$. Тоді за теоремою про характеристику нижньої границі множина $\{n \in \mathbb{N} \mid \tau_n < \tau_2\}$ скінченна, а на проміжку (t_2, τ^*) може лежати нескінченна кількість τ_n . У цьому випадку виберемо підпослідовність $\{\tau_k, k > 0\}$ послідовності $\{\tau_n, n > 0\}$ таку, що для довільного $k > 0$ виконується $\tau_k \in (t_2, \tau^*)$. Тоді для кожного $t \in [0, t_2]$ маємо $y_k(t) = x_k(t)$ і $y^*(t) = x^*(t)$.

Нехай знову $\chi_R(t)$ — характеристична функція множини $\{t: |u^*(t)| < R\}$. Оскільки $L(t, x, \cdot)$ опукла, то виконується нерівність

$$\begin{aligned} L(t, x^*(t), v(t)) \chi_R(t) \\ \geq L(t, x^*(t), u^*(t)) \chi_R(t) + (v(t) - u^*(t)) L_v(t, x^*(t), u^*(t)) \chi_R(t) \end{aligned}$$

для кожного $v(t) \in V$, $t \in [0, \tau^*]$.

Покладемо $v(t) = u_k(t)$. Тоді

$$\begin{aligned} \int_0^{t_2} L(t, x^*(t), u_k(t)) \chi_R(t) dt &\geq \int_0^{t_2} L(t, x^*(t), u^*(t)) \chi_R(t) dt \\ &+ \int_0^{t_2} (u_k(t) - u^*(t)) L_u(t, x^*(t), u^*(t)) \chi_R(t) dt. \end{aligned} \quad (4.12)$$

З умови (2.5) маємо

$$\begin{aligned} |L_u(t, x^*(t), u^*(t))| \chi_R(t) \\ \leq K \left(1 + |u^*(t)|^{p-1} + |x^*(t)|^\alpha \right) \leq K (1 + R^{p-1} + A^\alpha). \end{aligned}$$

Отже, другий інтеграл у нерівності (4.12) прямує до нуля при $k \rightarrow \infty$. Останнє впливає зі слабкої збіжності $u_k(t)$ до $u^*(t)$. Тому

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^{t_2} L(t, x^*(t), u_k(t)) \chi_R(t) dt \geq \int_0^{t_2} L(t, x^*(t), u^*(t)) \chi_R(t) dt.$$

Оскільки $L(t, x, u) \geq 0$, $\chi_R(t) \leq 1$ і $\chi_R(t) \rightarrow 1$ при $R \rightarrow \infty$, то

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^{t_2} L(t, x^*(t), u_k(t)) dt \geq \int_0^{t_2} L(t, x^*(t), u^*(t)) dt. \quad (4.13)$$

Розглянемо також величину

$$\left| \int_0^{t_2} [L(t, x_k(t), u_k(t)) - L(t, x^*(t), u_k(t))] dt \right|.$$

Використовуючи рівність

$$L(t, x_k(t), u_k(t)) - L(t, x^*(t), u_k(t)) = \int_0^1 L_x(t, x_{\lambda_k}(t), u_k(t)) (x_k(t) - x^*(t)) d\lambda,$$

де $x_{\lambda_k}(t) = x^*(t) + \lambda(x_k(t) - x^*(t))$, а також застосовуючи співвідношення (2.5), (4.4) і нерівність Гельдера, отримуємо

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^{t_2} [L(t, x_k(t), u_k(t)) - L(t, x^*(t), u_k(t))] dt \right| \\ &= \left| \int_0^{t_2} \int_0^1 L_x(t, x_{\lambda_k}(t), u_k(t)) (x_k(t) - x^*(t)) d\lambda dt \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^{t_2} |x_k(t) - x^*(t)| K(1 + |u_k(t)|^{p-1} + |x_k(t) + x^*(t)|^\alpha) dt \\
&\leq K \int_0^{t_2} |x_k(t) - x^*(t)| (1 + (2A)^\alpha) dt + K \int_0^{t_2} |x_k(t) - x^*(t)| |u_k(t)|^{p-1} dt \\
&\leq K \int_0^{t_2} |x_k(t) - x^*(t)| (1 + (2A)^\alpha) dt + K \|u_k\|_p^{\frac{p}{q}} \left(\int_0^{t_2} |x_k(t) - x^*(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (4.14)
\end{aligned}$$

Оскільки $\|u_k\|_p$ обмежена, то права частина (4.14) прямує до 0 при $k \rightarrow \infty$. Далі маємо

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t_2} L(t, x_k(t), u_k(t)) dt + \int_0^{t_2} L(t, x^*(t), u_k(t)) dt \\
&\quad - \int_0^{t_2} L(t, x^*(t), u_k(t)) dt + \int_0^{t_2} L(t, x^*(t), u^*(t)) dt - \int_0^{t_2} L(t, x^*(t), u^*(t)) dt \\
&= \int_0^{t_2} [L(t, x_k(t), u_k(t)) - L(t, x^*(t), u_k(t))] dt \\
&\quad + \int_0^{t_2} [L(t, x^*(t), u_k(t)) - L(t, x^*(t), u^*(t))] dt + \int_0^{t_2} L(t, x^*(t), u^*(t)) dt.
\end{aligned}$$

Перший інтеграл у правій частині останньої нерівності прямує до 0 при $k \rightarrow \infty$ згідно з (4.14). А згідно з нерівністю (4.13) для будь-якого $t_2 \in [0, \tau^*)$ одержуємо

$$\int_0^{t_2} L(t, x^*(t), u^*(t)) dt \leq m.$$

Звідси за допомогою граничного переходу при $t_2 \rightarrow \tau^*$ маємо

$$J(u^*) = \int_0^{\tau^*} L(t, x^*(t), u^*(t)) dt \leq m.$$

А тому

$$J(u^*) = m.$$

Отже, $u^*(t)$ — оптимальне керування.

2) Нехай тепер $y^*(\tau^*) \in D$. Тоді $\tau^* = T$. Отже, для достатньо великих n_k : $\tau_{n_k} = T$.

Далі доведення аналогічне з першим випадком із заміною τ^* і τ_k на T .

Теорему доведено.

Від імені всіх авторів відповідальна за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів.

Література

1. O. M. Stanzhytskyi, E. A. Samoilenko, *Coefficient conditions for existence of an optimal control for differential systems*, J. Math. Sci. (N.Y.), **197**, № 1, 129–137 (2014).
2. O. M. Stanzhytskyi, E. A. Samoilenko, V. V. Mogilova, *On the existence of an optimal feedback control for stochastic systems*, Differ. Equ., **49**, № 11, 1456–1464 (2013).
3. O. Kichmarenko, O. Stanzhytskyi, *Sufficient conditions for the existence of optimal controls for some classes of functional-differential equations*, Nonlinear Dyn. Syst. Theory, **18**, № 2, 196–211 (2018).
4. T. V. Koval'chuk, V. V. Mohyl'ova, T. V. Shovkoplyas, *Averaging method in problems of optimal control over impulsive systems*, J. Math. Sci. (N.Y.), **247**, № 2, 314–327 (2020).
5. A. Alownel, K. Al-Khaled, M. Al-Towiq, *Reliable algorithms for solving integro-differential equations with applications*, Int. J. Comput. Math., **87**, № 7, 1538–1554 (2009).
6. P. K. Kythe, P. Puri, *Computational methods for linear integral equations*, University of New Orleans, New Orleans (1992).
7. J. M. Kean, Nidel D. Barlow, *A spatial model for the succesful biological control of sitona discoidens by Microctonus aethiopoides*, J. Appl. Ecol., **38**, 162–169 (2001).
8. А. М. Самойленко, О. А. Бойчук, С. А. Кривошея, *Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром*, Укр. мат. журн., **48**, № 11, 1576–1579 (1996); **English translation:** *Ukr. Math. J.*, **48**, № 11, 1785–1789 (1996).
9. О. М. Станжицький, С. Т. Минбаєва, Н. А. Марчук, *Усереднення в крайових задачах для систем диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь*, Укр. мат. журн., **72**, 277–301 (2020); **English translation:** *Ukr. Math. J.*, **72**, 277–301 (2020).
10. G. Sansone, *Equazioni differenziali non lineari CampoReale*, Parte Prima, Seconda Edizione, Boloona (1948).

Одержано 13.06.23