

ІСНУВАННЯ КОМПРОМІСНИХ СТАНІВ У БОРОТЬБИ АЛЬТЕРНАТИВНИХ ОПОНЕНТІВ ПРИ НАЯВНОСТІ ЗОВНІШНЬОЇ ДОПОМОГИ

Тетяна Каратаєва, Володимир Кошманенко

Інститут математики НАН України

вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна

e-mail: karat@imath.kiev.ua,

koshman63@gmail.com, відповідальний за листування

Models of dynamical systems of conflict (DSC) are studied for a pair of alternative opponents fighting for the presence in different regions of a resource space. The new result establishes the existence of compromise states (with simultaneous and constant presence of both opponents at least in one region) under an external support of each opponent. It is known that in the purely conflict interaction where any foreign aid is absent these states are impossible because only one rival wins in each region. We show that in these states opponent statuses (values of the probability of presence) are determined by parameters of the external aid rather than starting distributions. We give some computer examples that, in particular, illustrate the duration of the struggle before reaching a compromise. Our results can be used, for instance, in the theory of belief formation.

Досліджуються моделі динамічних систем конфлікту (ДСК) для пари альтернативних опонентів, що борються за присутність у різних регіонах простору життєвих ресурсів. Новий результат встановлює існування компромісних станів (із одночасною й постійною присутністю обох опонентів хоча б у одному регіоні) при наявності зовнішньої допомоги для кожного з опонентів. Відомо, що у суто конфліктній взаємодії, коли відсутня будь-яка зовнішня підтримка, такі стани неможливі, оскільки в кожному регіоні перемагає лише один суперник. Показано, що в таких станах статуси гравців (значення ймовірностей присутності) визначають параметри зовнішньої допомоги, а не стартові розподіли. Наведено ряд комп'ютерних прикладів, які, зокрема, ілюструють тривалість боротьби до моменту досягнення компромісу. Результати придатні для використання, наприклад, у теорії формування переконань.

1. Вступ. У цій роботі ми досліджуємо математичні моделі динамічних систем конфлікту (ДСК), які описують поведінку пари альтернативних опонентів (позначимо їх A та B) у боротьбі за присутність чи володіння різними регіонами абстрактного ресурсного простору Ω . По суті, ми досліджуємо два основні питання:

1. У яких регіонах перемогу чи поразку здобуває або зазнає той чи інший опонент і яким чином результат боротьби залежить від стартових розподілів, величини зовнішньої допомоги та стратегії використання такої допомоги?

2. У яких випадках боротьба у фіксованому регіоні завершується не перемогою або поразкою, а компромісом?

Під компромісом тут розуміємо одночасну взагалі різну, але незмінну присутність обох опонентів у фіксованому регіоні. Існування компромісу — це явище своєрідної динамічної рівноваги у боротьбі альтернативних опонентів.

Альтернативність означає, що конфліктна взаємодія відбувається за законом взаємного відштовхування (витіснення) у ймовірнісному сенсі. Варто пояснити це детальніше.

Нехай $P^A = P^A(\Delta)$, $P^B = P^B(\Delta)$ позначає ймовірність присутності A , B у якомусь спірному регіоні $\Delta \subset \Omega$ у початковий момент дискретного часу. Тоді одноразовий акт конфліктної боротьби між альтернативними опонентами змінює ці стартові ймовірності на нові згідно з формулами

$$P_{\text{new}}^A(\Delta) = P^A(1 - P^B), \quad P_{\text{new}}^B(\Delta) = P^B(1 - P^A),$$

у яких праворуч є добутки двох величин: ймовірності бути для одного з опонентів у регіоні Δ та ймовірності не бути для другого в цьому ж регіоні. Якщо повторювати цей закон для нескінченної послідовності актів боротьби, то виникає динамічна система. Дослідження властивостей такої динамічної системи [1, 2] доводять існування граничних рівноважних станів, які можна інтерпретувати як встановлення перемог чи поразок кожного з опонентів у різних локальних регіонах.

У неперервному часі закон альтернативної боротьби породжує еволюцію, яку можна записати евристично у вигляді системи нелінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{dt} P^A \cong P^A(1 - P^B), \quad \frac{d}{dt} P^B \cong P^B(1 - P^A).$$

Щоб надати цьому закону точного змісту, розкладаємо ресурсний простір конфлікту Ω на скінчену множину фіксованих регіонів

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^m \Omega_i, \quad 2 \leq m < \infty. \quad (1.1)$$

Зауважимо, що такий розклад є природним, оскільки фактично всі конфліктні процеси розгортаються на певному просторі, який завжди поділений на окремі частини (регіони). Вони явно відокремлені один від одного і в кожному з них виникають свої локальні співвідношення присутності конфліктуючих сторін (опонентів).

Нехай $P_i^A \equiv P^A(\Omega_i, t)$ і $P_i^B \equiv P^B(\Omega_i, t)$ позначають незалежні ймовірності присутності чи захоплення опонентами A та B регіонів Ω_i у момент часу t . Тоді, якщо припустити рівномірність цих розподілів по кожному з регіонів Ω_i , то наведений вище закон можна записати у вигляді системи $2m$ диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{dt} P_i^A = \lambda P_i^A(1 - P_i^B), \quad \frac{d}{dt} P_i^B = \lambda P_i^B(1 - P_i^A), \quad i \in \overline{1, m},$$

де λ є коефіцієнтом нормування на одиницю.

У цій статті використовуємо дискретний час, тому замість наведених вище диференціальних рівнянь переходимо до різницевих:

$$p_i^{t+1} = \lambda p_i^t(1 - r_i^t), \quad r_i^{t+1} = \lambda r_i^t(1 - p_i^t), \quad t = 0, 1, \dots, \quad (1.2)$$

де введено позначення $p_i^t := P^A(\Omega_i, t)$, $r_i^t = P^B(\Omega_i, t)$. Оскільки ми використовуємо статистичний підхід, то вектори $p^t = (p_1^t, \dots, p_m^t)$, $r^t = (r_1^t, \dots, r_m^t)$ при кожному $t \in \mathbb{N}$ є стохастичними:

$$\sum_{i=1}^m p_i^t = 1 = \sum_{i=1}^m r_i^t, \quad p^t, r^t \in \mathbb{R}_{+,1}^m.$$

Бачимо, що коефіцієнт нормування λ у (1.2) залежить від часу і має вигляд

$$\lambda = 1/z^t, \quad z^t = 1 - \theta^t, \quad \theta^t := (p^t, r^t) = \sum_i p_i^t r_i^t.$$

Моделі динамічних систем конфлікту

$$\{p^t, r^t\} \rightarrow \{p^{t+1}, r^{t+1}\}, \quad t = 0, 1, \dots,$$

згенеровані системою різницевих рівнянь типу (1.2), вже досліджувалися в ряді публікацій (див. [1–10] і наведені там посилання). Основний результат цих досліджень стверджує збіжність траєкторій таких систем до рівноважних станів. Сформулюємо цей результат.

Теорема 1.1 (теорема про конфлікт). *Кожна траєкторія $\{p^t, r^t\}$ динамічної системи, породженої системою рівнянь (1.2), що стартує з довільної точки $\{p^0, r^0\}$, заданої парою стохастичних векторів $p^0, r^0 \in \mathbb{R}_{+,1}^m$ з умовою $(p^0, r^0) \neq 1$, збігається до граничного рівноважного стану (fixed point)*

$$\{p^t, r^t\} \rightarrow \{p^\infty, r^\infty\}, \quad t \rightarrow \infty,$$

який складається з ортогональних векторів, $p^\infty \perp r^\infty$. При цьому, якщо у початковий момент часу для якихось координат виконувалася нерівність $p_i^0 > r_i^0$, то $p_i^\infty > 0$, $r_i^\infty = 0$, якщо $p_k^0 < r_k^0$, то $p_k^\infty = 0$, $r_k^\infty > 0$, а якщо $p_j^0 = r_j^0$, то $p_j^\infty = r_j^\infty = 0$. Значення ненульових граничних координат $p_i^\infty > 0$, $r_k^\infty > 0$ є пропорційними початковим різницям $d_i = p_i^0 - r_i^0$, $d_k = r_k^0 - p_k^0$, а саме: $p_i^\infty = d_i/D$, $r_k^\infty = d_k/D$, де коефіцієнт пропорції D є незалежним від індексів ненульових координат.

Таким чином, опоненти, які ведуть боротьбу за володіння регіонами простору (1.1), здатні лише перерозподілити початкові значення ймовірностей своєї присутності у різних регіонах згідно з законом альтернативного конфлікту вигляду (1.2). Перерозподілити таким чином, щоб розійтися по різних регіонах. По суті, наведена вище теорема про конфлікт стверджує, що всі траєкторії динамічної системи (1.2) збігаються до рівноважних станів (нерухомих точок), заданих ортогональними векторами.

Принципово, що згідно з законом (1.2), у рівноважних станах ймовірність одночасного перебування альтернативних опонентів в одному й тому ж регіоні з необхідністю є нульовою. Отже, в цій постановці компромісних регіонів, тобто таких Ω_i , де одночасно $p_i^\infty > 0$, $r_i^\infty > 0$, не існує.

Значно складніша ситуація, яка досліджується в цій статті, виникає, якщо опоненти одержують зовнішню допомогу чи підсилення. Математично це записується введенням адитивних зсувів координат у векторах ймовірнісної присутності опонентів у різних регіонах (див. далі формули (2.2), (3.2)). У цій роботі доводимо, що тоді компроміси стають можливими. Звичайно, конкретна поведінка у кожному з регіонів (перемога, поразка чи компроміс із можливим домінуванням одного з опонентів) істотно залежить від величини

зовнішньої допомоги та способу (стратегії) її використання. В загальному випадку динамічна картина досить складна й нетривіальна. Тут ми наводимо найпростіші спостереження і демонструємо на комп'ютерних моделях лише деякі варіанти поведінки.

Далі *задачею про компроміс* ми називаємо пошук умов, при яких альтернативні опоненти здатні одночасно співіснувати в одному чи декількох регіонах із постійними строго додатними ймовірностями.

По суті, основним результатом цієї статті (див. твердження 2.1, 3.1, 3.2) є встановлення існування позитивних розв'язків задачі про компроміс при наявності зовнішньої допомоги. При цьому важливо, що обоє з альтернативних опонентів мають отримувати якусь допомогу. Лише тоді вони не обов'язково розходяться по різних регіонах, а можуть компромісно уживатися в одному й тому ж регіоні, взагалі з різними і постійними ймовірностями. Щоб математично реалізувати такий сценарій, у формули конфліктної динаміки достатньо ввести члени у вигляді доданків зовнішньої допомоги і регулювати їхні величини.

Зазначимо, що в статтях [5, 6] ми вже досліджували моделі конфліктної взаємодії між елементами абстрактного суспільства при наявності зовнішнього впливу. Без такого впливу динаміку конфлікту характеризує відома теза "Winner take all". Виявлено, що зовнішнє підсилення кардинально змінює цю динамічну картину. Так, у [5] показано, що в моделях абстрактного суспільства, де перерозподіл соціальної енергії індивідів визначають два фактори (конкурентна боротьба та зовнішній вплив), поведінка траєкторій істотно різна. Зокрема показано, що індивіди, навіть з найбільшою початковою енергією, приречені на поразку, якщо деякий слабший індивід отримує досить сильну зовнішню підтримку. Важливим моментом є вибір формули конфліктної взаємодії та способу введення зовнішнього впливу. Питання про компромісні стани там ще не вивчалися.

У роботі [6] досліджували математичну модель суспільства як складну динамічну систему з конфліктною взаємодією при наявності постійного впливу зовнішнього середовища одночасно для всіх індивідів. Знайдено умови існування рівноважних станів переважно для моделі з трьома елементами (гравцями). Досліджено стійкість таких станів та її залежність від параметра зовнішнього впливу, частково описано басейни притягання. Варто зауважити, що в [6] простір конфлікту є одновимірним (статус індивіда), а також одержано систему рівнянь, яка дає критерій для знаходження всіх рівноважних станів. Показано, що існує поріг величини впливу зовнішнього середовища, при перевищенні якого існує лише єдиний стійкий рівноважний стан, а також знайдено необхідну умову існування такого стану — поділ суспільства на два класи індивідів із різними статусами.

Підкреслимо, що у цій статті, на відмінну від [5, 6], ми вивчаємо ДСК та будуємо конкретні моделі опису боротьби між парою альтернативних опонентів на багатовимірному (регіоналізованому) просторі, для того щоб виявити роль зовнішньої допомоги у задачі про компроміс. Важливо, що в загальному випадку допомога є різною по регіонах і може змінюватися за часом.

2. Задача про компроміс із несиметричними підсиленнями у фіксованому регіоні. У цьому пункті показано, що задача про компроміс має явні розв'язки, якщо опоненти A та B одержують несиметричні (див. формули (2.1), (2.2)) зовнішні підсилення і лише в одному фіксованому регіоні. Покладемо, що кількість регіонів конфлікту дорівнює 4, тобто $m = 4$, а зовнішній вплив здійснюється у третьому регіоні. З подальшого викладу стає зрозумілим, що аналогічний результат є справедливим для будь-якого $m \geq 4$.

Отже, припустимо, що в регіоні Ω_3 у початковий момент виконується нерівність $0 < p_3 < r_3 < 1$. Тоді, при відсутності зовнішнього впливу, згідно з теоремою 1 про

конфлікт для альтернативних опонентів (див. також [1, 2]) при $t \rightarrow \infty$ має бути $p_3^\infty = 0$, $r_3^\infty > 0$. Це зокрема означає, що в результаті конфліктної взаємодії опонент A повністю втрачає цей регіон. Але якщо включити можливість вибору інших стратегій поведінки у боротьбі, наприклад, залучення зовнішньої допомоги, то описаний граничний результат може кардинально змінитися. Математично це забезпечує введення у формулу конфліктної взаємодії (1.2) параметрів зовнішнього підсилення для кожного з опонентів.

Опишемо цей ефект детальніше. Оскільки, за припущенням, у початковий момент $p_3 < r_3$, то евристично зрозуміло, що опонент A здатен “вижити” у регіоні Ω_3 , тобто забезпечити граничну умову $p_3^\infty > 0$, лише якщо він буде отримувати достатнє зовнішнє підсилення, яке пропорційне силі переваги опонента B у цьому регіоні. У свою чергу, опонент B , реагуючи на таку стратегію A , для того щоб зберегти або хоча б не втратити цього регіону, також змінює свою стратегію, але несиметрично. Наприклад, мобілізує для себе підсилення з інших регіонів або в крайньому разі залучає якесь зовнішнє підсилення. Результат боротьби визначають співвідношення між величинами таких підсилень. Новий факт полягає у можливості виникнення компромісу. Далі встановлено, що при виконанні певної нерівності для параметрів підсилення в регіоні Ω_3 для опонентів A та B існують стани динамічної компромісної рівноваги. Отже, обидва граничні значення їхньої присутності в Ω_3 можуть стати строго додатними і постійними одночасно, $p_3^\infty, r_3^\infty > 0$. Зрозуміло, що конкретні значення цих граничних ймовірностей істотно залежать від співвідношень між величинами зовнішніх підсилень.

Формули, які відповідають описаному сценарію, мають такий вигляд:

$$p_i^{t+1} = \frac{p_i^t(1 - r_i^t)}{z_p^t}, \quad r_i^{t+1} = \frac{r_i^t(1 - p_i^t)}{z_r^t} \quad \forall i \neq 3, \quad (2.1)$$

$$p_3^{t+1} = \frac{(p_3^t + h_{p3}r_3^t)(1 - r_3^t)}{z_p^t}, \quad r_3^{t+1} = \frac{(r_3^t + h_{r3})(1 - p_3^t)}{z_r^t}, \quad (2.2)$$

де $0 < h_{p3}, h_{r3}$ позначають параметри підсилення у регіоні Ω_3 для опонентів A та B відповідно. Зазначимо несиметричність доданків підсилення у формулах (2.2). Нормувальні знаменники z_p^t, z_r^t у (2.1), (2.2)), як легко переконалися, мають складніший, ніж раніше, вигляд, а саме:

$$z_p^t = 1 - \theta^t + h_{p3}r_3^t(1 - r_3^t), \quad z_r^t = 1 - \theta^t + h_{r3}(1 - p_3^t), \quad (2.3)$$

де, як і вище, $\theta^t = \sum_i p_i^t r_i^t$.

Якщо припустити, що у системи існує компромісний стан, позначимо його $\{x, y\}$, $x, y \in \mathbb{R}_{+,1}^4$, то його координати мають задовольняти такі рівняння компромісу:

$$x_i = x_i(1 - y_i)/z_x, \quad i \neq 3, \quad y_i = y_i(1 - x_i)/z_y, \quad i \neq 3, \quad (2.4)$$

$$x_3 = (x_3 + h_{x3}y_3)(1 - y_3)/z_x, \quad y_3 = (y_3 + h_{y3})(1 - x_3)/z_y, \quad (2.5)$$

де зараз нормувальні знаменники (2.3) не залежать від часу і мають вигляд

$$z_x = 1 - \theta + h_{x3}y_3(1 - y_3), \quad z_y = 1 - \theta + h_{y3}(1 - x_3), \quad \theta = (x, y). \quad (2.6)$$

При цьому координати, відповідні регіону Ω_3 , обов'язково мають бути строго додатними, $0 < x_3, y_3 < 1$.

Твердження 2.1. Якщо для параметрів підсилення динамічної системи конфлікту, заданої рівняннями (2.1), (2.2), виконується нерівність

$$h_{r3} \geq \frac{4h_{r3}}{(1+h_{r3})^2}, \quad (2.7)$$

то у неї існує принаймні два компромісні стани.

Доведення. Припустимо, що стан $\{x, y\}$ є рівноважним і для нього виконуються рівняння компромісу (2.4), (2.5). Перепозначимо координати x_3, y_3 та параметри допомоги h_{x3}, h_{y3} через u, v і h_u, h_v відповідно. Тепер нормувальні знаменники (2.6) мають вигляд

$$z_x = 1 - \theta + h_u v(1 - v), \quad z_y = 1 - \theta + h_v(1 - u). \quad (2.8)$$

Покажемо, що в цьому разі існує не менше двох компромісних станів із координатами $x_3 = u_{\pm}, y_3 = v_{\pm}$, які є розв'язками квадратних рівнянь із коефіцієнтами, заданими параметрами допомоги h_u, h_v (див. далі (2.9), (2.10)).

З цією метою розглянемо пару векторів $x', y' \in \mathbb{R}_+^{m-1}$, які утворені з x, y вилученням координат x_3, y_3 . Незавжди зрозуміти, що при $m = 4$ рівняння (2.4) можуть виконуватися, лише якщо $x' \perp y'$ і $z_x = 1 = z_y$. Це означає, що у кожного з векторів x', y' є як нульові, так і не нульові координати. Так само тоді з рівнянь (2.5), (2.8) випливає, що $\theta = h_u v(1 - v) = h_v(1 - u)$. Тому рівняння (2.5) набувають вигляду

$$u = (u + h_u v)(1 - v), \quad v = (v + h_v)(1 - u).$$

З них легко одержуємо пару нових рівнянь

$$u = h_u(1 - v), \quad uv = h_v(1 - u).$$

Після підстановки $u = h_v/(v + h_v)$ у перше з цих рівнянь маємо квадратне рівняння для v :

$$v^2 - (1 - h_v)v + h_v/h_u(1 - h_u) = 0. \quad (2.9)$$

Його розв'язки мають вигляд

$$\begin{aligned} v_{\pm} &= \frac{1 - h_v}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1 - h_v}{2}\right)^2 - h_v/h_u(1 - h_u)} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - h_v \pm \sqrt{(1 - h_v)^2 - 4 \frac{h_v(1 - h_v)}{h_u}} \right). \end{aligned}$$

А якщо підставити в перше рівняння $v = h_v(1 - u)/u$, то виникає рівняння для u :

$$u^2 - h_u(1 + h_v)u + h_u h_v = 0, \quad (2.10)$$

яке має розв'язки вигляду

$$u_{\pm} = \frac{h_u(1 + h_v)}{2} \pm \sqrt{\frac{(h_u)^2(1 + h_v)^2}{4} - h_u h_v} = \frac{h_u}{2} \left(1 + h_v \pm \sqrt{(1 + h_v)^2 - 4 \frac{h_v}{h_u}} \right).$$

Позначимо

$$D := \sqrt{(1 + h_v)^2 - 4 \frac{h_v}{h_u}} = \sqrt{(1 - h_v)^2 - 4 \frac{h_v(1 - h_u)}{h_u}}.$$

Тоді зв'язок між різними розв'язками можна записати у вигляді

$$u_{\pm} = \frac{h_u}{2} [1 + h_v \pm D], \quad v_{\pm} = \frac{1}{2} [1 - h_v \mp D], \quad (2.11)$$

оскільки взагалі $u = h_u(1 - v)$. Отже,

$$u_{\pm} = h_u(1 - v_{\mp}).$$

Зрозуміло, що ці розв'язки існують, якщо лише величина D є невід'ємною, $D \geq 0$. Таким чином, для існування компромісних станів для параметрів допомоги потрібно припускати додаткову умову

$$h_u \geq \frac{4h_v}{(1 + h_v)^2},$$

яка тотожна нерівності (2.7) і забезпечує невід'ємність D . Цю умову не можна замінити симетричною перестановкою позначень h_u , h_v , тому що у рівняннях (2.2) використовують несиметричні стратегії урахування зовнішньої допомоги.

Отже, доведено, що пара станів $\{x_{\pm}, y_{\mp}\}$ є компромісною, якщо вектори x_{\pm} , y_{\mp} мають координати

$$x_{\pm} = (0, 0, u_{\pm}, 1 - u_{\pm}), \quad y_{\mp} = (0, 1 - v_{\mp}, v_{\mp}, 0),$$

де u_{\pm} , v_{\mp} задано рівностями (2.11).

Зауважимо, що стан $\{x, y\}$, для якого $x_3 = u = 0$, $y_3 = v = 1$ або $u = 1$, $v = 0$, а для решти координат виконано співвідношення, за яких $\theta = 0$, $z_x = 1$, $z_y = 1 + h_v$ є очевидно нерухомим, але не компромісним. Нерухомість перевіряємо безпосередньо підстановкою координат x , y у рівняння (2.4), (2.5). Але цей стан не є компромісним, тому що в регіоні Ω_3 одна з координат, u або v , є нульовою.

Для ілюстрації динаміки встановлення компромісу у регіоні Ω_3 наведемо пару комп'ютерних прикладів (див. рис. 1) із різними значеннями параметрів допомоги та різними початковими координатами векторів у цьому регіоні.

Варто доповнити аналіз поведінки траєкторій компромісних координат.

Зокрема з графіка (а) видно, що незважаючи на стартову перевагу присутності опонента B в третьому регіоні, $p_3 < r_3$, що забезпечує йому тривалий пріоритет протягом майже 250 кроків конфліктної боротьби, завдяки зовнішній підтримці для опонента A настає момент, коли ймовірність присутності B у цьому регіоні різко спадає (пунктирна крива) і після 300-го кроку він втрачає своє домінування над опонентом A (суцільна крива). Цей ефект є наслідком зовнішньої допомоги опоненту A з достатньо великою різницею $h_u - h_v$.

На графіку (б) еволюції координат p_3^t , r_3^t мають протилежні тенденції порівняно з варіантом (а). Причиною є зменшення зовнішньої допомоги опоненту A у тому ж третьому регіоні. А саме, величина допомоги опоненту A , яка була у попередньому варіанті, змінюється з $h_{p3} = 0,2$ на $h_{p3} = h_u = 0,1$. Це призводить до втрати значного пріоритету опонента A над B у початковий момент, $p_3^0 = u = 0,9 > r_3^0 = v = 0,01$. У результаті граничний компромісний стан устанавлюється з великим домінуванням B над A :

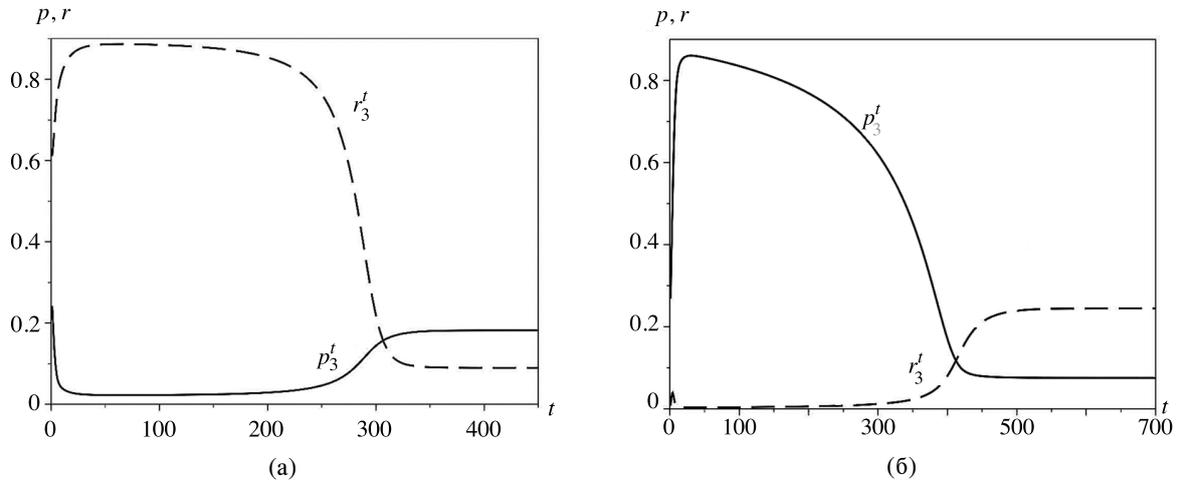


Рис. 1. Існування компромісних значень присутності опонентів у третьому регіоні. Еволюцію координат p_3^t , r_3^t зображено суцільною та пунктирною лініями відповідно. (а) Якщо значення початкових координат і параметрів допомоги дорівнюють відповідно $p_3 = 0,4 < r_3 = 0,55$, $h_{p_3} = 0,2 > h_{r_3} = 0,02$, то компромісні значення координат є близькими до $p_3^\infty \simeq 0,18 > r_3^\infty \simeq 0,1$. (б) При $p_3 = 0,9 > r_3 = 0,01$ і $h_{p_3} = 0,1$, $h_{r_3} = 0,02$ еволюції координат мають протилежні тенденції порівняно з попереднім варіантом. Попри домінування A над B у початковий момент, граничний компромісний стан $r_3^\infty \simeq 0,22 > p_3^\infty \simeq 0,07$ виявляє значний пріоритет B над A . В обох випадках виникає ефект зміни домінуючого опонента після 300 кроку конфліктної боротьби.

$v_- = r_3^\infty \simeq 0,22 > u_+ = p_3^\infty \simeq 0,07$. Критичний момент зміни домінування у цьому випадку відбувається аж після 400-го кроку боротьби. Вирішальне значення має постійна допомога $h_{r_3} = 0,02$ опоненту B . Цікавим моментом цього прикладу є той факт, що опонент B стає домінуючим у компромісному регіоні незважаючи на те, що зовнішня підтримка для нього менша за підтримку для A , $h_{r_3} < h_{p_3}$. Цей ефект можна пояснити динамікою боротьби у інших регіонах, де зовнішнє підсилення відсутнє, а домінування здобуває опонент A .

3. Існування компромісних станів при симетричних зовнішніх підсиленнях. У цьому пункті доводимо існування компромісних станів при симетрично взаємозалежних стратегіях отримання зовнішньої підтримки (див. далі рівняння (3.2)). Зауважимо, що в загальному випадку, коли кількість регіонів довільна, задача про існування компромісних станів для ДСК із довільними зовнішніми підсиленнями у різних регіонах є досить складною задачею. Нагадаємо, що при $m = 1$ близька задача вивчалася в [5], а в [6] — з трьома опонентами. Випадки $m = 2$, $m = 3$ заслуговують окремих досліджень. Тут ми вивчаємо лише спрощені варіанти загальної ситуації при $m \geq 4$. У кінці пункту повертаємося до несиметричного варіанту задачі, щоб пояснити виникнення додаткової умови на зовнішній вплив.

Отже, розглянемо динамічну систему конфлікту

$$\{p^0, r^0\} \rightarrow \{p^t, r^t\}, \quad t = 0, 1, \dots, \quad (3.1)$$

між умовною парою альтернативних опонентів A та B . Покладаємо, що еволюція системи описується в термінах стохастичних векторів $p^t, r^t \in \mathbb{R}_{+,1}^m$, $m \geq 4$, у дискретному часі згідно з системою різницевих рівнянь для координат

$$p_i^{t+1} = \frac{(p_i^t + h_{pi}r_i^t)(1 - r_i^t)}{z_p^t}, \quad r_i^{t+1} = \frac{(r_i^t + h_{ri}p_i^t)(1 - p_i^t)}{z_r^t}, \quad i \in \overline{1, m}, \quad (3.2)$$

де параметри $h_{pi}, h_{ri} \geq 0$ мають інтерпретацію параметрів зовнішньої допомоги (підсилення) опонентам A та B відповідно у регіоні Ω_i . Нормувальні знаменники при цьому мають вигляд

$$z_p^t = \sum_{i=1}^m (p_i^t + h_{pi}r_i^t)(1 - r_i^t) = 1 - \theta^t + \sum_{i=1}^m h_{pi}r_i^t(1 - r_i^t),$$

$$z_r^t = 1 - \theta^t + \sum_{i=1}^m h_{ri}p_i^t(1 - p_i^t), \quad \theta^t = \sum_{i=1}^m p_i^t r_i^t = (p^t, r^t)$$

і забезпечують стохастичність векторів у кожен момент часу.

Зазначимо, що доданки зовнішньої допомоги $h_{pi}r_i^t, h_{ri}p_i^t$ у формулах (3.2) мають симетричну форму стосовно опонентів, тобто значення кожного з них є пропорційним “силі” протилежної сторони у регіоні Ω_i . Зрозуміло, що ці доданки не можуть перевищувати значень координат r_i^t, p_i^t . Тому покладаємо, що

$$0 \leq h_{pi}, \quad h_{ri} \leq 1 \quad \forall i.$$

Стан $\{x, y\}$, $x, y \in \mathbb{R}_{+,1}^m$, динамічної системи (3.1) називаємо *компромісним* для опонентів A та B , якщо цей стан є рівноважним, тобто є нерухомою точкою відображення (3.2), та існує хоча б один регіон Ω_k , в якому обидва опоненти A та B мають ненульову й постійну ймовірність одночасної присутності: $0 < x_k, y_k < 1$.

Твердження 3.1. У динамічних систем конфлікту (3.1), породжених рівняннями (3.2), існують компромісні стани.

Доведення. Оскільки всі параметри підсилення не від’ємні, $h_{pi}, h_{ri} \geq 0 \quad \forall i$, то з (3.2) легко випливає, що для координат x_i, y_i компромісного стану $\{x, y\}$ мають виконуватися такі рівняння:

$$x_i = \frac{1 - H_i(1 - y_i)}{z_x(1 + y_i)}, \quad y_i = \frac{1 - h_i(1 - x_i)}{z_y(1 + x_i)}, \quad (3.3)$$

де

$$z_x = 1 - \theta + \sum_{i=1}^m H_i y_i (1 - y_i), \quad z_y = 1 - \theta + \sum_{i=1}^m h_i x_i (1 - x_i), \quad \theta = \sum_{i=1}^m x_i y_i = (x, y)$$

і де ми спростили позначення параметрів підсилення, $H_i = h_{pi}, h_i = h_{ri}$.

Далі продовжуємо доведення з певними додатковими обмеженнями.

Розглянемо систему рівнянь (3.2) у випадку, коли лише для одного довільного фіксованого регіону Ω_k , $1 \leq k \leq m$, обидва параметри допомоги є строго додатними, а решта — нульові,

$$h_{pk} > 0, \quad h_{rk} > 0, \quad h_{pi} = 0 = h_{ri} \quad \forall i \neq k. \quad (3.4)$$

Тоді з (3.2) випливає, що стан $\{x, y\}$, $x, y \in \mathbb{R}^m$, є компромісним тоді й тільки тоді, коли координати векторів x, y замість (3.3) задовольняють рівняння

$$x_i = x_i(1 - y_i)/z_x, \quad i \neq k, \quad y_i = y_i(1 - x_i)/z_y, \quad i \neq k, \quad (3.5)$$

$$u = (u + Hv)(1 - v)/z_x, \quad v = (v + hu)(1 - u)/z_y, \quad (3.6)$$

де координати x_k, y_k , і параметри допомоги $h_{p,k}, h_{r,k}$ з метою спрощення запису перепозначили на u, v і H, h відповідно. В цих позначеннях нормувальні знаменники мають вигляд

$$z_x = 1 - \theta + Hv(1 - v), \quad z_y = 1 - \theta + hu(1 - u), \quad \theta = (x, y). \quad (3.7)$$

Покажемо, що для динамічної системи (3.1), (3.2) з умовами (3.4) стан $\{x, y\}$ є компромісним, якщо вектори x і y мають координати

$$x_k = u = \frac{H(1 - h)}{1 - Hh}, \quad y_k = v = \frac{h(1 - H)}{1 - Hh}, \quad Hh \neq 1, \quad (3.8)$$

$$x_i > 0, \quad i \neq k, l, \quad x_l = 0, \quad y_l = 1 - v > 0, \quad y_i = 0, \quad i \neq k, l, \quad (3.9)$$

з деяким $l \neq k$. При цьому завдяки стохастичності маємо

$$\sum_{i \neq k, l} x_i = 1 - u.$$

Щоб переконатися, що такі вектори існують, використаємо рівності $z_x = z_y = 1$, які випливають із (3.9) і рівнянь (3.5). Дійсно, оскільки $x_i > 0$, а $y_i = 0$, то з рівності $x_i = x_i(1 - y_i)/z_x$ випливає, що $z_x = 1$. Аналогічно, з $x_l = 0$ і $y_l > 0$ згідно з рівністю $y_l = y_l(1 - x_l)/z_y$ одержуємо $z_y = 1$.

Тепер із рівнянь (3.6), (3.7) для координат $x_k = u, y_k = v$ завдяки $z_x = z_y = 1$ одержуємо такі рівності:

$$u = (u + Hv)(1 - v), \quad v = (v + hu)(1 - u).$$

Вони легко спрощуються:

$$u = H(1 - v), \quad v = h(1 - u)$$

і мають явні розв'язки у вигляді (3.8). Це доводить, що стан $\{x, y\}$ динамічної системи (3.1), заданий векторами

$$x = (x_i > 0, x_l = 0, x_k = u), \quad y = (y_i = 0, y_l = 1 - v, y_k = v),$$

є компромісним при довільних $0 < H, h < 1, Hh \neq 1$.

Аналогічним чином доводимо існування компромісних станів для системи (3.1) і у більш загальному випадку, коли лише для довільної пари регіонів, скажімо Ω_i, Ω_l , параметри підсилення є нульовими:

$$h_{pl} = h_{rl} = h_{pi} = h_{ri} = 0, \quad H_k = h_{pk} > 0, \quad h_k = h_{rk} > 0 \quad \forall k \neq i, l.$$

У цьому разі координати векторів x, y компромісного стану $\{x, y\}$ описуємо так:

$$x = (x_i > 0, x_l = 0, x_k = u_k), \quad y = (y_i = 0, y_l > 0, y_k = v_k),$$

де

$$x_i = 1 - \sum_k u_k, \quad y_l = 1 - \sum_k v_k,$$

а всі координати x_k, y_k задані явно у термінах параметрів підсилення:

$$x_k = u_k = \frac{H_k(1 - h_k)}{1 - H_k h_k}, \quad y_k = v_k = \frac{h_k(1 - H_k)}{1 - H_k h_k}. \quad (3.10)$$

Зрозуміло, що у цьому разі від параметрів підтримки необхідно вимагати додаткові умови, які записуємо у вигляді

$$\sum_{k \neq i, l} \frac{H_k(1 - h_k)}{1 - H_k h_k} < 1, \quad \sum_{k \neq i, l} \frac{h_k(1 - H_k)}{1 - H_k h_k} < 1.$$

Ці умови гарантують додатність координат x_i, y_l . А це завдяки $x_l = 0, y_i = 0$ приводить до рівностей $z_x = z_y = 1$. Так само тоді для координат $x_k = u_k, y_k = v_k$, одержуємо систему рівнянь

$$u_k = (u_k + H_k v_k)(1 - v_k), \quad v_k = (v_k + h_k u_k)(1 - u_k), \quad k \neq i, l,$$

яка має явні розв'язки вигляду (3.10).

Зазначимо, що згідно з (3.8), (3.10) компромісні значення координат у регіонах Ω_k визначаємо тільки параметрами допомоги і вони не залежать від значень координат початкових векторів. Цей факт ілюструємо на рис. 2.

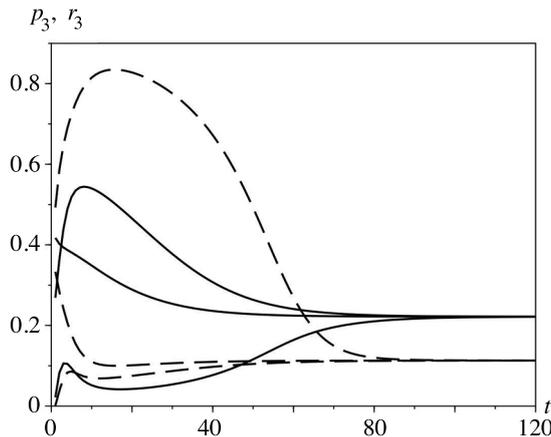


Рис. 2. При фіксованих параметрах допомоги $h_{p,k} = H, h_{r,k} = h$ усі траєкторії координат p_k^t, r_k^t збігаються до тих самих граничних (компромісних) значень u, v , визначених формулами (3.8). Вони є незалежними від початкових розподілів векторів p^t, r^t .

У загальному випадку, коли всі параметри підсилення строго додатні, $h_{p,i} > 0, h_{r,i} > 0$, система нелінійних алгебраїчних рівнянь (3.3) є досить складною. Встановити існування її розв'язків при довільних значеннях параметрів підсилення без умов типу (3.9) є відкритою проблемою. Хоча комп'ютерні симуляції показують, що такі розв'язки існують у багатьох випадках. Їх можна апроксимувати з довільною точністю, якщо задано початкові координати векторів і значення параметрів підсилення. Рисунок 3 ілюструє цей факт. Рівновагу встановлено після досить тривалої боротьби. Лише на момент $t = 400$ конфліктної взаємодії траєкторії усіх координат стають візуально паралельними й ненульовими.

Якщо у формулах (3.2) доданки $h_{r,i} p_i^t$ замінити на $h_{r,i}$, то підсилення вже не матимуть симетричної форми. Зокрема, за умов (3.4) достатньо лише доданок $h_{r,k} p_k^t$ замінити на постійну величину $h_{r,k} = h$. Тоді з урахуванням спрощення позначень і умов

$$h_{pk} = H > 0, \quad h_{rk} = h > 0, \quad h_{pi} = 0 = h_{ri} \quad \forall i \neq k, \quad (3.11)$$

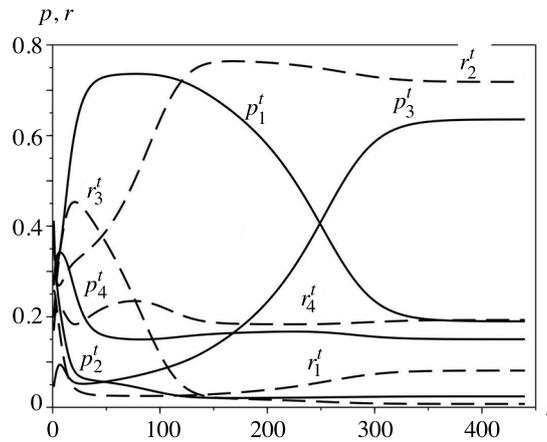


Рис. 3. Існування компромісних розподілів одночасно в усіх $m = 4$ регіонах при початкових розподілах із умовами $p_i < r_i, i = 1, 2, 4, p_3 > r_3$, і параметрами підсилення $h_{p1} = 0,19, h_{p2} = 0,085, h_{p3} = 0,086, h_{p4} = 0,18$ для координат вектора p і $h_{r1} = 0,09, h_{r2} = 0,15, h_{r3} = 0,02, h_{r4} = 0,198$ для вектора r відповідно. Графіки траєкторій демонструють існування компромісу в усіх регіонах, а також кардинальну зміну співвідношень домінування між опонентами в різних регіонах. А саме, в трьох регіонах початкові нерівності змінюються на протилежні: $p_3^\infty > r_3^\infty, p_i^\infty < r_i^\infty, i = 2, 4$, а в першому регіоні нерівність $p_1^\infty > r_1^\infty$ така ж, як початкова, але обидва граничні значення суттєво менші за початкові.

з довільним $1 \leq k \leq m$, для граничних координат $p_k^\infty \equiv x_k = u, r_k^\infty \equiv y_k = v$ міркуваннями, аналогічними доведенню твердження 2.1, отримуємо дві рівності:

$$Hv(1 - v) = h(1 - u), \quad (1 + Hv/u)(1 - v) = (1 + h/v)(1 - u).$$

Після спрощень виникає пара рівнянь

$$u = (u + Hv)(1 - v), \quad v = (v + h)(1 - v).$$

Звідси одержуємо

$$u = H(1 - v), \quad uv = h(1 - u).$$

Після підстановки $u = h/(v + h)$, а потім $v = h(1 - u)/u$, у перше рівняння виникає пара квадратних рівнянь для v і u , аналогічних до (2.9), (2.10):

$$v^2 - (1 - h)v + h/H(1 - H) = 0, \quad u^2 - H(1 + h)u + Hh = 0. \quad (3.12)$$

Зрозуміло, що розв'язки цих рівнянь будуть мати такий же вигляд, як у випадку $m = 4$:

$$u_{\pm} = H/2(1 + h \pm D), \quad v_{\pm} = 1/2(1 - h \pm D), \quad D = ((1 + h)^2 - 4h/H)^{1/2}. \quad (3.13)$$

Значення u_{\pm}, v_{\pm} дійсні й строго додатні, якщо величина $D \geq 0$, що еквівалентно нерівності для параметрів допомоги

$$H \geq \frac{4h}{(1 + h)^2}. \quad (3.14)$$

При цьому компромісні значення пов'язані рівністю

$$u_{\pm} = H(1 - v_{\mp}). \quad (3.15)$$

Справедливе таке твердження.

Твердження 3.2. Для динамічних систем конфлікту довільної розмірності, $m \geq 4$, з несиметричними підсиленнями і при виконанні нерівності (3.14) і умов (3.11) існує принаймні пара компромісних станів із ненульовими координатами у довільному фіксованому регіоні Ω_k , $1 \leq k \leq m$, які є розв'язками вигляду (3.13) квадратних рівнянь (3.12).

Варто зауважити, що так само, як у випадку з підсиленнями, заданими симетричними формулами, граничні значення компромісних координат $x_k = u_{\pm}$, $y_k = v_{\pm}$ визначають лише параметри зовнішньої допомоги $0 < h$, $H < 1$ (див. (3.13)), пов'язані між собою згідно з формулами (3.15), і вони не залежать від початкових розподілів.

4. Питання стійкості. Розглянемо коротко питання стійкості компромісних станів лише для випадку $m = 4$ і з несиметричним варіантом підсилення. Для цього використовуємо стандартний метод оцінки модуля власних значень відповідної матриці Якобі в нерухомих точках. Зараз ця матриця складається з 4-х блоків:

$$J = \begin{pmatrix} F_{ij}^p & G_{ij}^r \\ G_{ij}^p & F_{ij}^r \end{pmatrix},$$

де кожен блок — це набір (4×4) матричних елементів (похідних від функцій F_i , G_i , $i \in \overline{1, 4}$, заданих далі). Верхні індекси p , r позначають вектори, за координатами яких беремо чотири частинні похідні, $j \in \overline{1, 4}$.

Функції F_i , G_i задані формулами конфліктної взаємодії

$$F_i(p_1, \dots, p_4, r_1, \dots, r_4) = (p_i + h_{pi}r_i)(1 - r_i)/z_p, \quad z_p = 1 - \sum_{i=1}^4 p_i r_i + \sum_{i=1}^4 h_{pi}r_i(1 - r_i),$$

$$G_i(p_1, \dots, p_4, r_1, \dots, r_4) = (r_i + h_{ri}p_i)(1 - p_i)/z_r, \quad z_r = 1 - \sum_{i=1}^4 p_i r_i + \sum_{i=1}^4 h_{ri}p_i(1 - p_i).$$

Отже,

$$F_{ij}^p = \frac{\partial F_i}{\partial p_j}, \quad F_{ij}^r = \frac{\partial F_i}{\partial r_j},$$

$$G_{ij}^p = \frac{\partial G_i}{\partial p_j}, \quad G_{ij}^r = \frac{\partial G_i}{\partial r_j},$$

де

$$\frac{\partial F_i}{\partial p_i} = ((1 - r_i)z_p + (p_i + h_{pi}r_i)(1 - r_i)r_i)/z_p^2,$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial r_i} = ((h_{pi}(1 - r_i) - (p_i + h_{pi}r_i))z_p + (p_i + h_{pi}r_i)(1 - r_i)(p_i - h_{pi}(1 - r_i) + h_{pi}r_i))/z_p^2,$$

$$\frac{\partial G_i}{\partial p_i} = -((r_i + h_{ri})z_r - (r_i + h_{ri})(1 - p_i)(r_i + h_{ri}))/z_r^2,$$

$$\frac{\partial G_i}{\partial r_i} = ((1 - p_i)z_r + (r_i + h_{ri})(1 - p_i)p_i)/z_r^2,$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial p_j} = (p_i + h_{pi}r_i)(1 - r_i)r_j/z_p^2,$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial r_j} = (p_i + h_{pi}r_i)(1 - r_i)(p_j - h_{pj} + 2h_{pj}r_j)/z_p^2,$$

$$\frac{\partial G_i}{\partial p_j} = (r_i + h_{ri})(1 - p_i)(r_j + h_{rj})/z_r^2,$$

$$\frac{\partial G_i}{\partial r_j} = (r_i + h_{ri}(1 - p_i)p_j)/z_r^2.$$

Тепер, підставляючи в ці формули координати нерухомих точок і конкретні значення параметрів підтримки h_{pi} , h_{ri} , знаходимо явно елементи матриці Якобі. Для безпосереднього обчислення власних значень μ_i матриці J використовували Scilab — пакет прикладних математичних програм (<https://en.wikipedia.org/wiki/Scilab>). У випадку з несиметричними формулами і ненульовими значеннями підтримки лише в одному регіоні: $h_{pi} = 0$, $h_{ri} = 0$ $\forall i \neq 3$, $h_{p3} = H$, $h_{r3} = h$, які задовольняють умову (2.7), вивчали нерухомі точки вигляду

$$p = x = (x_1, x_2, x_3, x_4), \quad x_3 = x_{3,\pm} = \frac{H(1+h)}{2} \pm \sqrt{\frac{(H(1+h))^2}{4} - Hh},$$

$$r = y = (y_1, y_2, y_3, y_4), \quad y_3 = y_{3,\mp} = \frac{1-h}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{(1-h)^2}{4} - h/H(1-H)\right)},$$

$$x_1 = c_1(1 - x_{3,\pm}), \quad x_2 = c_2(1 - x_{3,\pm}), \quad x_4 = 0,$$

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_4 = 1 - y_{3,\mp}$$

при довільних $c_1, c_2 \geq 0$, $c_1 + c_2 = 1$.

У результаті підрахунку модулів власних значень матриці J при різних значеннях параметрів H , h не отримали жодного випадку, в якому всі модулі власних значень були б менші одиниці. Цей факт підштовхує до гіпотези, що взагалі, у варіанті з несиметричними формулами зовнішньої підтримки в одному фіксованому регіоні, нерухомі точки не є стійкими. Хоча графічно (див. рис. 4) спостерігаємо деяку стійкість граничних векторів p^∞ , r^∞ .

При цьому спостерігаємо таку залежність. Якщо різниця $H - h > 0$ є достатньо великою, то безпосередній підрахунок абсолютних величин власних значень якобіана системи (2.1)–(2.3) підтверджує візуальну стійкість граничного стану, але при додатковій умові на координати третього регіону: $1/2 > u_+ > v_-$. Якщо ж $v_+ > 1/2 > u_-$, то стійкості не існує. Звичайно, такого типу стійкості не означає асимптотичної стійкості граничних станів системи. При зменшенні різниці $H - h > 0$ відбувається інверсія описаної залежності, певну стійкість демонструють стани з умовою $1/2 > v_- > u_+$, а при $u_- > 1/2 > v_+$ стійкості немає.

Лише в окремих випадках чисельні методи дають можливість припустити існування стійких нерухомих станів у випадку з несиметричними формулами і ненульовими значеннями всіх параметрів підтримки (див. рис. 5, який підтверджує припущення про асимптотичну стійкість). Наприклад, при $h_{p1} = 0,6$, $h_{p2} = 0,3$, $h_{p3} = 0,2$, $h_{p4} = 0,3$, $h_{r1} = 0,3$, $h_{r2} = 0,12$, $h_{r3} = 0,02$, $h_{r4} = 0,32$ отримуємо візуально стійкий нерухомий стан. Модулі всіх власних значень матриці J у цьому випадку мають вигляд

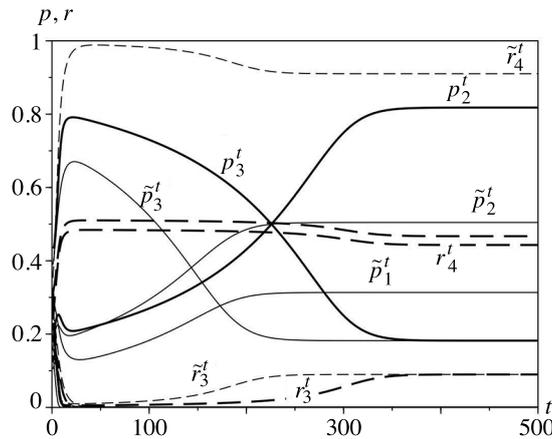


Рис. 4. Заміна початкових векторів $p = (0,2303, 0,1771, 0,434, 0,1586)$, $r = (0,3133, 0,1227, 0,3248, 0,2392)$ на довільні інші, наприклад, такі: $\tilde{p} = (0,3102, 0,1587, 0,3890, 0,1421)$, $\tilde{r} = (0,2663, 0,1043, 0,276, 0,3533)$ демонструє деяку стійкість компромісного граничного стану при таких значеннях параметрів підсилення у третьому регіоні: $h = 0,02$, $H = 0,2$.

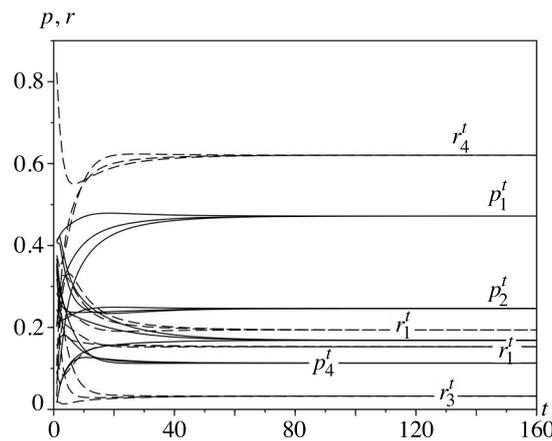


Рис. 5. Візуальна стійкість компромісного граничного стану при наявності підтримки в усіх регіонах.

$$\begin{aligned}
 |\mu_1| &= 0,1866729, & |\mu_2| &= 0,4555339, & |\mu_3| &= 0,6111156, & |\mu_4| &= 0,9952471, \\
 |\mu_5| &= 0,9404919, & |\mu_6| &= 0,8726908, & |\mu_7| &= 0,7678225, & |\mu_8| &= 0,7437917
 \end{aligned}$$

і не перевищують одиниці. Нерухомі точки мають координати, близькі до

$$\begin{aligned}
 p^{t=1000} &= (0,4719667, 0,246396, 0,1686617, 0,1129756), \\
 r^{t=1000} &= (0,1940278, 0,1530527, 0,032403, 0,6205165).
 \end{aligned}$$

5. Аналіз окремих моделей ДСК. 5.1. Випадок постійної допомоги. Розглядаємо конкретні комп'ютерні приклади ДСК із різними способами підсилення по регіонах. Спочатку побудуємо модель у випадку, коли ймовірнісні розподіли присутності опонентів A , B на просторі конфлікту $\Omega = \bigcup_{i=1}^m \Omega_i$, $4 \leq m < \infty$, описують стохастичні вектори

$p^t = (p_1^t, \dots, p_m^t)$, $r^t = (r_1^t, \dots, r_m^t) \in \mathbb{R}_{+,1}^m$, залежність яких від часу задано рівняннями з постійними зовнішніми підсиленнями

$$\begin{aligned} p_i^{t+1} &= (p_i^t + h_{p,i})(1 - r_i^t)/z_p^t, & r_i^{t+1} &= (r_i^t + h_{r,i})(1 - p_i^t)/z_r^t, & t &= 0, 1, \dots, \\ z_p^t &= 1 - \theta^t + \|h_p\|_1 - (h_p, p^t), & z_r^t &= 1 - \theta^t + \|h_r\|_1 - (h_r, p^t), \end{aligned} \quad (5.1)$$

де

$$\theta^t = \sum_{i=1}^m p_i^t r_i^t, \quad (h_p, p^t) = \sum_{i=1}^m h_{p,i} p_i^t, \quad (h_r, p^t) = \sum_{i=1}^m h_{r,i} r_i^t,$$

а $h_{p,i}, h_{r,i} \geq 0$ позначають не залежні від часу параметри підсилення, задані ненормованими векторами

$$h_p = \{h_{p,i}\}_{i=1}^m, \quad h_r = \{h_{r,i}\}_{i=1}^m,$$

$\|h_p\|_1, \|h_r\|_1$ — l_1 -норми цих векторів.

Інтерпретація параметрів підсилення залежить від вибору прикладної моделі. Зокрема, числа $h_{p,i}, h_{r,i}$ можуть позначати постійні надходження чи регіональні прибутки, наприклад, від копалин, або керовані переміщення наявних ресурсів із інших регіонів, або величин зовнішньої (військової) допомоги якомусь із опонентів у певному регіоні, де він зазнає агресії від другого опонента.

У такій загальній постановці поведінка координат $p_i^t, r_i^t, i \in \overline{1, m}$, є досить специфічною і практично непередбачуваною, бо має багато невизначеностей. Проте, перебираючи різні варіанти задання початкових розподілів і параметрів підсилення, ми досить часто спостерігаємо виникнення компромісних розподілів одночасно в усіх регіонах. Зокрема це виникає у разі, коли підсилення в усіх регіонах однакове для обох опонентів. Тоді рівноважний стан компромісу існує та реалізується досить швидко. При цьому граничні значення координат різні і чутливо залежать від початкових розподілів, що демонструє рис. 6.

Отже, якщо підсилення діє в усіх регіонах і однакове для обох опонентів, то рівновага (компроміс) реалізується в кожному з регіонів, але по-різному, залежно від початкових розподілів. Але якщо значення однакового підсилення збільшувати, то залежність від початкових розподілів нівелюється, в усіх регіонах опоненти стають рівними. Такий результат неважко пояснити математично.

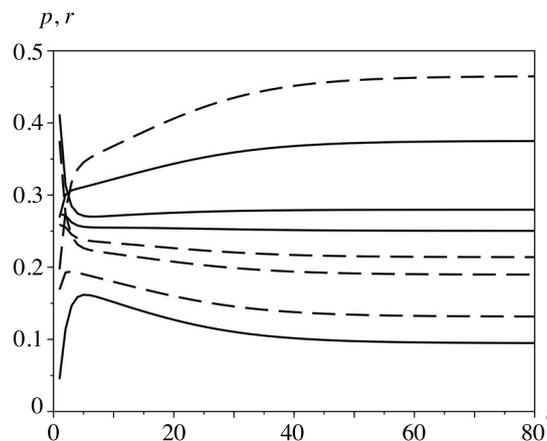


Рис. 6. Типова динаміка збіжності траєкторій до компромісних розподілів одночасно в усіх регіонах при однакових допомагах: $h_{p,i} = 0,1, h_{r,i} = 0,1 \forall i$.

Зафіксуємо певний стартовий розподіл опонентів по регіонах:

$$p = (p_1 = 0,274, p_2 = 0,412, p_3 = 0,045, p_4 = 0,269),$$

$$r = (r_1 = 0,259, r_2 = 0,375, r_3 = 0,197, r_4 = 0,169)$$

і будемо змінювати лише значення параметрів підсилення. У випадку відсутності підсилення у жодному з регіонів, тобто коли всі параметри $h_{pi} = h_{ri} = 0$ завдяки $p_i > r_i, i = 1, 2, 4$, згідно з теоремою 1.1 про конфлікт (див. також [1, 2]), при $t \rightarrow \infty$ опонент A залишається в усіх регіонах, де він одразу має перевагу, тобто в $\Omega_i, i = 1, 2, 4$, а B повністю концентрується лише в Ω_3 (див. рис. 7 (а)). Близький до цього результат виникає й у випадку, коли підсилення дуже мале, тоді воно практично не працює.

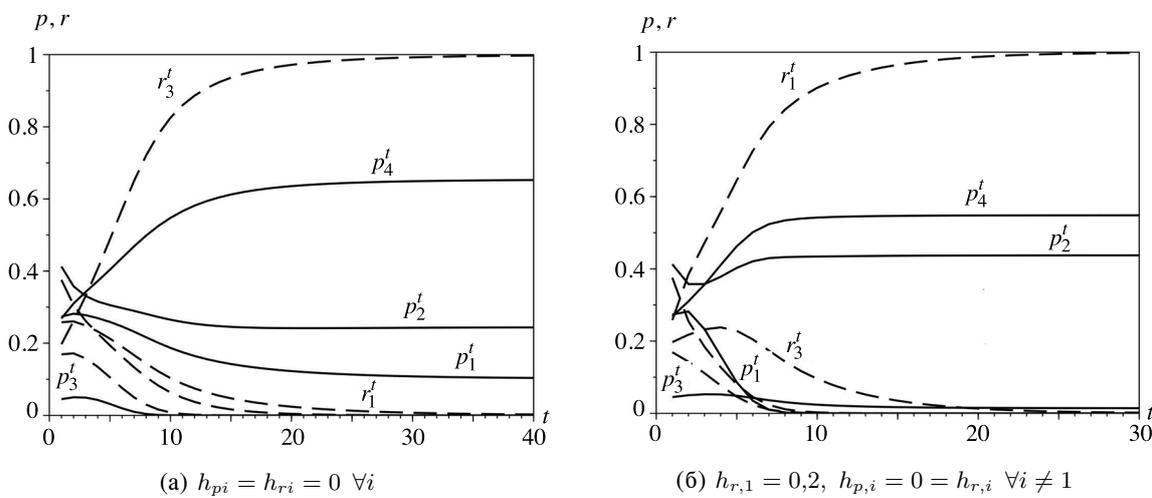


Рис. 7. Принципова зміна динамічної поведінки траєкторій при наявності підтримки лише в одному регіоні. (а) При відсутності будь-яких підсилень опонент A захоплює три регіони, $\Omega_i, i = 1, 2, 4$, а супротивник повністю концентрується в єдиному регіоні Ω_3 . (б) Надання постійної допомоги опоненту B лише в першому регіоні, $b_{r,1} = 0,2$, забезпечує йому там абсолютну перемогу, $r_1^\infty = 1$. Решту регіонів захоплює опонент A згідно з законом альтернативного конфлікту.

Нехай підсилення відбувається лише в одного опонента і лише в одному регіоні. Наприклад, $h_{r,1} = 0,2$, водночас як усі інші параметри підсилення є нульовими. Тоді асимптотична картина при $t \rightarrow \infty$ цілком змінюється (див. рис. 7 (б)).

Дійсно, тепер, незважаючи на те що $p_1 > r_1$, координата r_1^t прямує до одиниці, а всі інші координати r_i^t прямують до нуля. Цей факт ілюструє ключову роль наявності підсилення для опонента B саме в першому регіоні. Відповідно для опонента A тільки одна координата його розподілу p_1^t прямує до нуля. Решта стають стабільно додатними, включно з p_3^t , всупереч початковому пріоритету опонента B над A у цьому регіоні, $p_3 < r_3$. Останній факт можна інтерпретувати як втрату опонентом B цілком пріоритетного для нього регіону Ω_3 задля абсолютної (з імовірністю 1) присутності у регіоні Ω_1 .

Отже, постійне підсилення присутності опонента B в одному фіксованому регіоні відбувається за рахунок зменшення до нуля його присутності в інших регіонах. Тому збільшення r_1^t призводить до втрати його позицій у решті регіонів, де всі $r_i^t \rightarrow 0$, а перевагу в цих регіонах здобуває опонент A .

Швидкість такої динамічної картини залежить від величини підсилення.

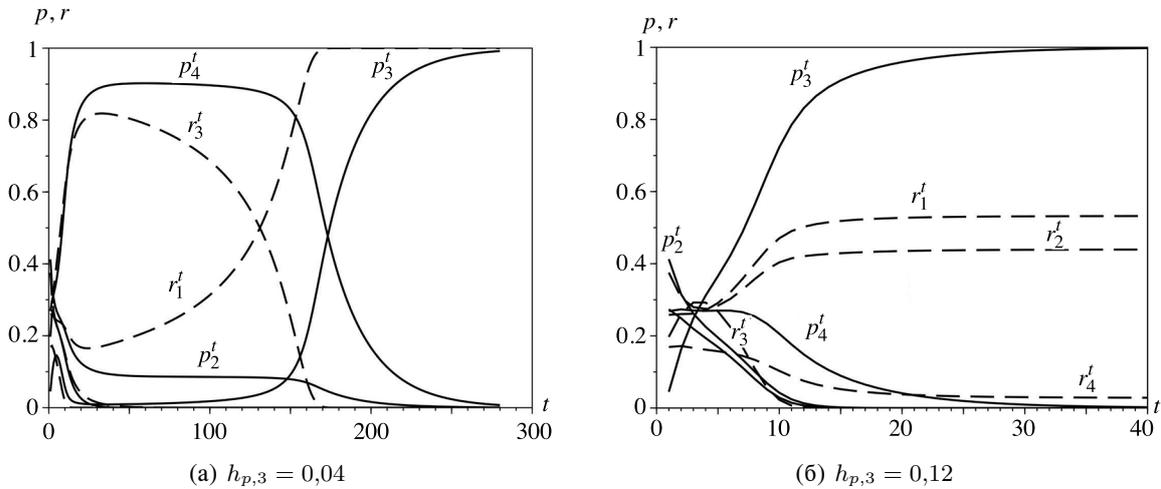


Рис. 8. Роль величини допомоги опоненту A в третьому регіоні, де він має найменшу ймовірність початкової присутності. (а) Незважаючи на невелике значення цієї допомоги, вона забезпечує опоненту A повне захоплення цього регіону після тривалої боротьби і з втратою початково пріоритетного четвертого регіону. (б) Збільшення величини допомоги приводить до швидшого зростання p_3^t при одночасній втраті опонентом A усіх інших регіонів, Ω_i , $i = 1, 2, 4$, які захоплює опонент B .

Для ілюстрації наведемо ще один приклад (див. рис. 8), у якому підсилення отримує опонент A в третьому регіоні Ω_3 , де його присутність є найменшою. Вона в рази менша за його присутність у інших регіонах.

На рис. 8 (а) наведено поведінку траєкторії, коли $h_{p3} = 0,04$, $h_{pi} = 0 \forall i \neq 3$, $h_{ri} = 0 \forall i$, а на рис. 8 (б) — при значно більшому значенні параметра, $h_{p3} = 0,12$. Так, при невеликій зовнішній підтримці перерозподіл (зростання p_3^t) іде з помітною затримкою. Слід нагадати, що сума всіх величин присутностей опонентів у регіонах є сталою величиною. Тому збільшення такої величини в якомусь одному регіоні відбувається при автоматичному їхньому зменшенні в решті регіонів. Оскільки $r_3 > p_3$ і, до того ж, різниця $r_3 - p_3$ є досить великою, то дія ефекту підсилення для опонента A в третьому регіоні потребує часу для накопичення достатньої ваги. Так, спочатку координата p_3^t повільно збільшується за рахунок зменшення координати p_1 , для якої різниця $p_1 - r_1$ мінімальна. Зі свого боку зменшення p_1 веде до дуже швидкого програшу опонентом A першого регіону. Ця координата майже одразу прямує до нуля згідно з твердженнями з теореми про конфлікт. Зовсім інша картина у другому регіоні. Оскільки різниця $p_2 - r_2$ значно більша, ніж у першому, то опонент A деякий час тут залишається і навіть утримує пріоритет. Але дія підсилення h_{p3} приводить до того, що згодом увесь ресурс опонента A з Ω_2 також переходить у регіон Ω_3 . Нарешті, в регіоні Ω_4 , де різниця $p_4 - r_4$ є максимальною, координата p_4 завдяки закону альтернативного конфлікту спочатку стрімко зростає. Але згодом, через продовження дії підсилення в регіоні Ω_3 , ця координата починає неухильно спадати до нуля. Можна спостерігати й більш тонкий ефект, коли координата p_3^t після невеликого зростання на початку знову спадає і протягом періоду накопичення ваги в регіоні Ω_3 тримається майже на одному рівні, тому що різниця $r_3 - p_3$ є великою і її зростанню протидіє опонент B згідно з законом альтернативного конфлікту. Але згодом опонент B у цьому регіоні змушений зазнати поразки. Ймовірність його присутності r_3^t починає різко спадати. Увесь ресурс опонента B переходить у регіон Ω_1 , у якому різниця $p_1 - r_1$ була мінімальною.

При значно більшій величині параметра h_{p3} (рис. 8 (б)) еволюція відбувається дуже швидко. Регіон Ω_3 , у якому опонент A отримує допомогу, швидко повністю перетягує на себе всі свої ресурси з інших регіонів і повністю концентрується і залишається тільки в цьому регіоні. За рахунок швидкої втрати присутності A в регіонах Ω_i , $i = 1, 2, 3, 4$, його конкурент B має можливість захопити ці регіони із більшою, ніж початкова, ймовірністю присутності. Очевидно, що на граничний розподіл при $t \rightarrow \infty$ суттєво впливають початкові різниці $p_i - r_i$. Присутність B буде більшою у тому регіоні, в якому була меншою величина $p_i - r_i$, тобто в регіоні, в якому A втрачає присутність у першу чергу. У цьому прикладі це перший регіон.

Проаналізуємо детальніше роль початкових розподілів.

Для різних початкових даних вимальовується така картина. Якщо підсилення отримує один із опонентів, у одному регіоні, то він максимально укріплюється в тому регіоні, де є підтримка, і зосереджує у ньому всю вагу своєї окупаційної присутності. Усі інші регіони він втрачає (відповідні координати дорівнюють нулю). При цьому для другого опонента можливі три варіанти (при $m = 4$). Він може залишитися в одному, двох, чи у трьох регіонах. Усе залежить від співвідношення величини підтримки і початкових розподілів.

Подібна ситуація має місце, якщо обидва опоненти отримують постійну підтримку в одному фіксованому регіоні. Їхня остаточна присутність у кожному з регіонів буде залежати від співвідношення величини підтримки і початкових розподілів. Підкреслимо, що при постійному підсиленні лише одного з опонентів тільки в одному регіоні компромісні стани не виникають.

5.2. Випадок взаємозалежної симетричної допомоги. Якщо стратегію допомоги удосконалено, а саме: коли підсилення вибираємо пропорційним “силі” опонента у відповідному регіоні (див. далі формули (5.2)), то динаміка стає значно складнішою, ніж при постійних підсиленнях. Далі розглянуто приклади комп’ютерних моделей, у яких закон конфліктної взаємодії задано формулами

$$p_i^{t+1} = (p_i^t + h_{pi}r_i^t)(1 - r_i^t)/z_p^t, \quad r_i^{t+1} = (r_i^t + h_{ri}p_i^t)(1 - p_i^t)/z_r^t, \quad (5.2)$$

де

$$z_p^t = \sum_{i=1}^m (p_i^t + h_{pi}r_i^t)(1 - r_i^t) = 1 - \theta^t + \sum_{i=1}^m h_{pi}r_i^t(1 - r_i^t),$$

$$z_r^t = 1 - \theta^t + \sum_{i=1}^m h_{ri}p_i^t(1 - p_i^t), \quad \theta^t = \sum_{i=1}^m p_i^t r_i^t = (p^t, r^t).$$

Покладемо $h_{p3} = h_{r3} = 0,15$, $h_{pi} = h_{ri} = 0 \ \forall i \neq 3$ і розглянемо динаміку при двох різних початкових розподілах (див. рис. 9, (а), (б)). При цьому спостерігаємо у третьому регіоні новий порівняно з моделлю (5.1) ефект втрати залежності компромісних розподілів від початкових даних. Установлюється певний динамічний компроміс: обидва опоненти залишаються з додатними ймовірностями своєї присутності. При цьому граничні координати p_3^∞ , r_3^∞ визначають згідно з твердженням 3.1 лише параметри підсилення. У нашому прикладі ці координати збігаються, тому що параметри підсилення у них є рівними. Початкове домінування когось із опонентів втрачає своє значення, зовнішній вплив їх вирівнює. У тих регіонах, де немає підсилення, граничні значення координат залежать від співвідношення стартових даних.

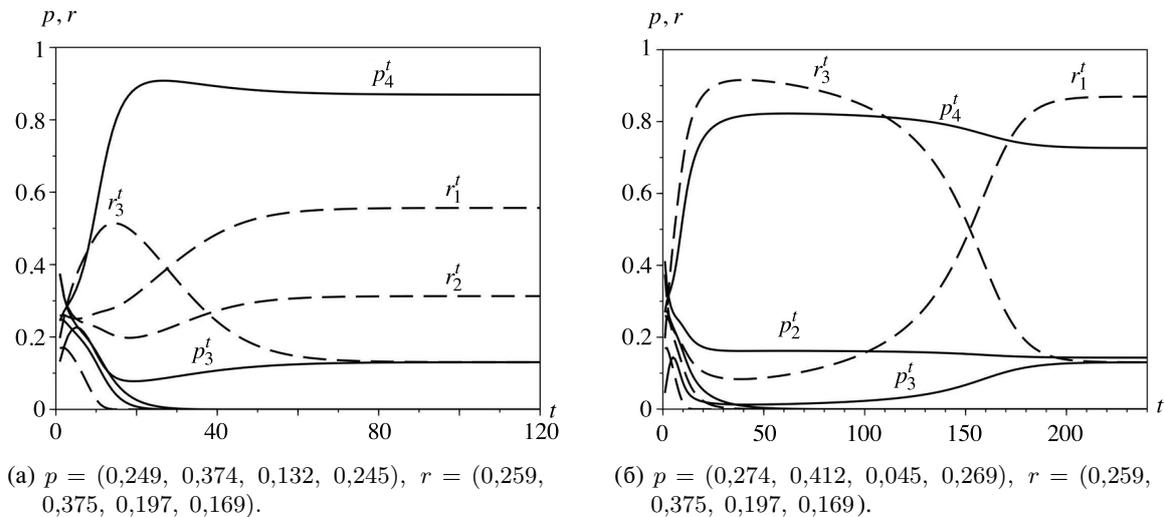


Рис. 9. Існування компромісу в третьому регіоні, де обидва опоненти отримують однакове підсилення: $h_{p,3} = h_{r,3} = 0,15$, $h_{p,i} = h_{r,i} = 0 \forall i \neq 3$. Відмінність рис. (а) та (б), особливо в регіонах Ω_i , $i = 1, 2, 3, 4$, обумовлено різними стартовими розподілами опонента A .

Якщо значення параметрів підсилення помірно змінювати, то динаміка залишається подібною, змінюється лише швидкість встановлення компромісних режимів.

У випадку великих і однакових значень $h_{p,i}$, $h_{r,i}$ зсуви $h_{p,i}r_i^t$, $h_{r,i}p_i^t$ істотно залежать не лише від величин цих параметрів, а й нелінійно від значень координат протилежної сторони r_i^t , p_i^t . Тоді ми спостерігаємо ще два зовсім нові цікаві ефекти (див. рис. 10).

Так, при $h_{p,3} = h_{r,3} = 1$, $h_{p,i} = h_{r,i} = 0 \forall i \neq 3$ компромісний стан у третьому регіоні зберігається, але граничні значення p_3^∞ , r_3^∞ вже не є рівними, не дивлячись на рівність параметрів підсилення. Присутність опонента B має значну перевагу над присутністю A (див. рис. 10 (а)). А при параметрах допомоги, яка перевищує 2, перемогу здатен здобути навіть опонент із початково меншою ймовірністю своєї присутності у регіоні (див. рис. 10 (б)). Схоже, що в цьому випадку можливість встановити компроміс взагалі втрачено. Великий зовнішній вплив призводить до непередбачуваних наслідків.

Отже, опоненти здатні “домовитися” на компроміс тільки при помірних значеннях параметрів зовнішнього впливу.

6. До теорії поширення та боротьби переконань. Наведені вище результати придатні до застосування в моделях, які описують процеси формування, поширення та боротьби між альтернативними політичними поглядами чи ідеологіями (див. [11, 12]) або між будь-якими іншими взаємно виключними тенденціями у світі, наприклад, ворогуючими біологічними популяціями на спільному життєвому просторі. Пошуку умов існування рівноважних станів методами теорії ігор присвячено багато робіт у контексті поняття рівноваги за Нешем [13, 14], особливо у постановці задач із застосуванням теорії стохастичних ігор [15–17].

Далі, як і раніше, спільний життєвий простір для опонентів позначаємо через Ω і припускаємо, що він поділений на окремі частини (регіони Ω_i , $i = 1, \dots, m$). Тут, як і вище, ми розглядаємо лише дві протилежні системи переконань, A та B .

Припустимо, що у початковий момент часу $t = 0$ у кожному регіоні Ω_i поширення політичних переконань A чи B оцінюють статистично у відсотковому співвідношенні. Задля

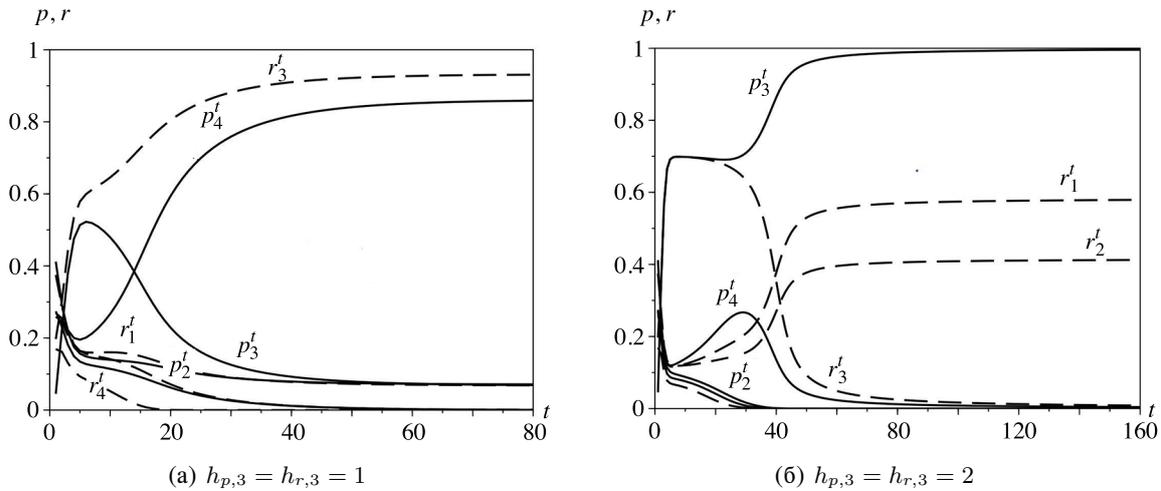


Рис. 10. $p = (0,274, 0,412, 0,045, 0,269)$, $r = (0,259, 0,375, 0,197, 0,169)$, $h_{p,i} = h_{r,i} = 0 \forall i \neq 3$. (а) Існування компромісу в третьому регіоні при однакових параметрах підсилення, рівних 1. Домінує опонент B , який мав початкову перевагу. (б) При збільшенні параметрів підсилення до 2 і вище, домінування в регіоні Ω_3 здобуває опонент A , який початково не мав тут пріоритету. Цей новий ефект можна пояснити нелінійністю у формулах конфліктної взаємодії (див. (5.2)).

математичної зручності переходимо до ймовірнісної інтерпретації таких даних і задаємо початковий розподіл переконань числами $0 \leq p_i, r_i \leq 1$, відповідно для A та B . Далі враховуємо лише два важливі, можливо головні, чинники, які впливають на зміну переконань. Це природний процес внутрішньої конфліктної боротьби в кожному з регіонів. За основу для опису закону формування і змін переконань беремо формули (1.2)). Тоді залежні від часу характеристики p_i^t, r_i^t еволюціонують згідно з теоремою 1.1. Насправді завжди присутній другий (зовнішній) чинник: ідеологічні впливи, які поширюються централізованими органами пропаганди з різною інтенсивністю у регіонах Ω_i кожною із протилежних сторін. Інтенсивність таких впливів задається величинами $0 \leq h_{p,i}, h_{r,i} \leq 1$. Як саме діє такий вплив і який його ефект, залежить від обраної стратегії боротьби ідеологій. Математично це описує один із варіантів формул відповідної динамічної системи конфлікту, наприклад, (5.1), (5.2)) чи, можливо, більш удосконалений закон.

Однією з основних задач теорії формування та поширення переконань є вибір кожною із протилежних сторін оптимальної стратегії засобів впливу. Типовою є така задача. За яким правилом і які значення треба взяти для параметрів $h_{p,i}$, щоб у максимальній кількості регіонів домінували показники p_i^t , відповідні до поширення ідеології сторони A ? Тобто щоб виконувалася нерівність $p_i^t > r_i^t$ для всіх $t > t_N$. Звичайно, аналогічну задачу має і протилежна сторона. Тому тут, як і в теорії стохастичних ігор, виникає проблема існування та опису рівноважних станів (певного сорту компромісів). Ці задачі є вельми нетривіальними навіть у спрощених варіантах, оскільки закони та процеси боротьби та поширення переконань є суттєво нелінійними з різних причин. Тому наївно думати, що вибір більших значень параметрів впливу у більшості регіонів, тобто виконання нерівностей $h_{p,i} > h_{r,i}$, приведе сторону A до успіху у розумінні переважного домінування над B .

Спираючись на результати статті [18], де досліджували задачу про оптимальну стратегію перерозподілу ресурсного простору, у цій роботі формуємо гіпотетичне твердження щодо формування переконань при додатковому припущенні. А саме: нехай регіони Ω_i

мають оцінку своєї величини. Тобто поставимо у відповідність кожному Ω_i додатне число $\lambda_i = \lambda(\Omega_i)$, яке характеризує кількість індивідів, здатних поділяти одне з переконань, A чи B , де λ позначає нормовану на одиницю міру на просторі Ω .

Нехай $\Omega^{t,A}$ (відповідно $\Omega^{t,B}$) позначає об'єднання тих регіонів Ω_i , в яких домінує переконання A у розумінні виконання нерівності $p_i^t > r_i^t$ у момент часу t (або, навпаки, $p_i^t < r_i^t$ для $\Omega^{t,B}$).

Твердження 6.1. *Якщо параметри $h_{p,i}$, $h_{r,i}$ впливу переконань A та B відповідно вибрані таким чином, що виконується нерівність*

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \ln \frac{h_{p,i}}{h_{r,i}} > 0,$$

то існує момент часу t_N такий, що для всіх $t > t_N$ переконання A домінує над B на більшій за мірою λ території:

$$\lambda(\Omega^{A,t}) > \lambda(\Omega^{B,t}).$$

Доведення цього твердження використовує припущення про самоподібну або структурно самоподібну, по суті фрактальну [19, 20], форму середовища (простору Ω). Це припущення є природним, тому що насправді фрактальна структурованість генетично закладена в еволюцію циклічної повторюваності багатьох фізичних явищ, які, зокрема, з розвитком живої речовини трансформуються у переконання, що традиційно, з певними флуктуаціями, повторюються у своїх проявах від покоління до покоління.

Насамкінець зазначимо, що одержані вище твердження 2.1 і 3.1 про існування компромісних станів придатні до застосування і в теорії формування та поширення переконань для знаходження достатніх умов встановлення консенсусу у сенсі робіт [21, 22].

Автори щиро вдячні за часткову фінансову підтримку за проектом “Математичне моделювання складних динамічних систем та процесів, актуальних для безпеки держави”, № 0123U100853.

Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів.

Література

1. В. Д. Кошманенко, *Теорема про конфлікт для пари стохастичних векторів*, Укр. мат. журн., **55**, № 4, 555–560 (2003); **English translation:** Ukr. Math. J., **55**, № 4, 671–678 (2003).
2. V. Koshmanenko, *Theorem of conflicts for a pair of probability measures*, Math. Methods Oper. Res., **59**, № 2, 303–313 (2004).
3. Т. В. Каратаєва, В. Д. Кошманенко, *Соціум, математична модель динамічної системи конфлікту*, Нелін. коливання, **22**, № 1, 66–85 (2019); **English translation:** J. Math. Sci. (N.Y.), **247**, 291–313 (2020); <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04803-3>.
4. T. V. Karataieva, V. D. Koshmanenko, M. J. Krawczyk, K. Kulakowski, *Mean field model of a game for power*, Phys. A, **525**, 535–547 (2019); <https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.03.110>.
5. Т. В. Каратаєва, В. Д. Кошманенко, *Модель конфліктного соціуму з ефектами зовнішнього впливу*, Нелін. коливання, **24**, № 3, 342–362 (2021).
6. Т. В. Каратаєва, В. Д. Кошманенко, *Рівноважні стани динамічної системи конфлікту для трьох гравців із параметром впливу зовнішнього середовища*, Нелін. коливання, **25**, № 2-3, 207–225 (2022).

7. В. Д. Кошманенко, О. Р. Сатур, *Проблема достовірної події в багатокomпонентних динамічних системах з притягальною взаємодією*, Нелін. коливання, **249**, № 2, 220–234 (2019); **English translation**: J. Math. Sci., **249**, № 4, 629–646 (2020); <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04962-3>.
8. В. Д. Кошманенко, *Формула конфліктної динаміки*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **17**, № 2, 113–149 (2020).
9. T. Karataieva, V. Koshmanenko, *Origination of the singular continuous spectrum in the dynamical systems of conflict*, Methods Funct. Anal. Topology, **15**, № 1, 15–30 (2009).
10. В. Д. Кошманенко, *Спектральна теорія динамічних систем конфлікту*, Наук. думка, Київ (2016).
11. R. Hegselmann, U. Krause, *Opinion dynamics and bounded confidence models, analysis and simulations*, J. Artif. Soc. Social Simul. (JASSS), **5**, № 3, 1–33 (2002); <http://jasss.soc.surrey.ac.uk/5/3/2.html>.
12. G. Deffuant, D. Neau, F. Amblard, G. Weisbuch, *Mixing beliefs among interacting agents*, Adv. Complex Syst., **3**, 87–98 (2000); DOI:10.1142/S0219525900000078.
13. E. J. Dockner, F. Wagener, *Markov perfect Nash equilibria in models with a single capital stock*, Econ. Theory; **56**(3), 585–625 (2014); DOI: 10.1007/s00199-014-0805-3.
14. W. He, Y. Sun, *Stationary Markov perfect equilibria in discounted stochastic games*, J. Econ. Theory, **169**, 35–61 (2017); DOI: 10.1016/j.jet.2017.01.007.
15. U. Horst, *Stationary equilibria in discounted stochastic games with weakly interacting players*, Games Econom. Behav., **51**(1), 83–108, (2005); Doi: 10.1016/j.geb.2004.03.003.
16. A. Jaskiewicz, A. S. Nowak, *Stationary almost Markov perfect equilibria in discounted stochastic games*, Math. Oper. Res., **41**(2), 430–441 (2016); DOI: 10.1287/moor.2015.0734.
17. P. Szajowski, *Constructions of Nash equilibria in stochastic games of resource extraction with additive transition structure*, Math. Methods Oper. Res., **63**(2), 239–260 (2006); DOI: 10.1007/s00186-005-0015-7.
18. І. В. Веригіна, В. Д. Кошманенко, *Задача про оптимальну стратегію в моделі конфліктного перерозподілу ресурсного простору*, Укр. мат. журн., **69**, № 7, 905–911 (2017); <https://doi.org/10.1007/s11253-017-1414-7>.
19. V. Koshmanenko, *The infinite direct products of probability measures and structural similarity*, Methods Funct. Anal. Topology, **17**, № 1, 20–28 (2011).
20. V. Koshmanenko, I. Verygina, *Dynamical systems of conflict in terms of structural measures*, Methods Funct. Anal. Topology, **22**, № 1, 81–93 (2016).
21. L. Li, A. Scaglione, A. Swami, Q. Zhao, *Consensus, polarization and clustering of opinions in social networks*, IEEE J. Sel. Areas Comm., **31**, № 6, 1072–1083 (2013); DOI: 10.1109/JSAC.2013.130609.
22. M. DeGroot, *Reaching a consensus*, J. Amer. Statist. Assoc., **69**, 291–293 (1974); <https://doi.org/10.1080/01621459.1974.10480137>.

Одержано 20.04.23,
після доопрацювання — 18.08.23