

ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З КУСКОВО-СТАЛИМИ ОПЕРАТОРНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Михайло Городній, Олексій Печериця

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
вул. Володимирська, 64, Київ, 01033, Україна
e-mail: horodnii@gmail.com, відповідальний за листування,
pecheritsa.aleksey@gmail.com

We obtain necessary and sufficient conditions for the existence of a unique solution bounded on the entire axis of a second-order differential equation with piecewise constant operator coefficients.

Отримано необхідні й достатні умови для існування єдиного обмеженого на всій осі розв'язку диференціального рівняння другого порядку з кусково-сталими операторними коефіцієнтами.

1. Вступ. Нехай X — комплексний банахів простір із нормою $\|\cdot\|$ і нульовим елементом $\bar{0}$, $\mathcal{L}(X)$ — простір лінійних неперервних операторів, що діють із X у X ; I , O — відповідно одиничний і нульовий оператори в X ; $C_b(\mathbb{R}, X)$ — банахів простір усіх неперервних і обмежених на $\mathbb{R}$ функцій $f: \mathbb{R} \rightarrow X$ з нормою $\|f\|_C := \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\|$; $C_b^{(1)}(\mathbb{R}, X)$ — банахів простір усіх неперервно диференційованих на $\mathbb{R}$ функцій $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ з похідною $x' \in C_b(\mathbb{R}, X)$ і нормою $\|x\|_{C^{(1)}} := \|x\|_C + \|x'\|_C$.

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\begin{cases} x''(t) = A_1 x'(t) + A_2 x(t) + y(t), & t \geq 0, \\ x''(t) = B_1 x'(t) + B_2 x(t) + y(t), & t < 0, \end{cases} \quad (1)$$

в якому $y \in C_b(\mathbb{R}, X)$, A_k, B_k , $k = 1, 2$, — фіксовані оператори з $\mathcal{L}(X)$. Обмеженим розв'язком рівняння (1) будемо називати таку функцію $x \in C_b^{(1)}(\mathbb{R}, X)$, що для кожного $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ існує $x''(t)$ і виконується рівність (1).

Мета цієї статті — отримати умови для операторних коефіцієнтів A_k, B_k , $k = 1, 2$, які забезпечують виконання такої умови.

Умова обмеженості. Для довільної функції $y \in C_b(\mathbb{R}, X)$ диференціальне рівняння (1) має єдиний обмежений розв'язок x .

Для диференціального рівняння першого порядку зі змінним операторним коефіцієнтом умову обмеженості та її зв'язок із умовою експоненціальної дихотомії на $\mathbb{R}$ відповідного однорідного диференціального рівняння досліджено, зокрема, в [1, 2] у довільному банаховому просторі для випадку обмежених і в [3, 4] — для випадку необмежених операторних коефіцієнтів. Про використання більш слабкої умови експоненціальної дихотомії

на півосях і фредгольмовості відповідного оператора для розв'язування задач про обмежені на $\mathbb{R}$ розв'язки таких диференціальних рівнянь див. [4, 5] і наведену там літературу.

Умову обмеженості для аналогічного до (1) диференціального рівняння першого порядку досліджували в [6]. Про існування і властивості обмежених на $\mathbb{R}$ розв'язків диференціального рівняння другого порядку зі сталими операторними коефіцієнтами див. [7].

2. Позначення і допоміжні твердження. Покладемо $X^2 = \left\{ \bar{x} = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix} \mid x^{(1)}, x^{(2)} \in X \right\}$. Тоді X^2 — комплексний банахів простір із покомпонатним додаванням і множенням на скаляр та нормою $\|\bar{x}\|_* = \|x^{(1)}\| + \|x^{(2)}\|$, $\bar{x} \in X^2$. Якщо $E, F, G, H \in \mathcal{L}(X)$, то, як і для випадку числових матриць, $T = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$ задає оператор із $\mathcal{L}(X^2)$ за правилом $T\bar{x} = \begin{pmatrix} Ex^{(1)} + Fx^{(2)} \\ Gx^{(1)} + Hx^{(2)} \end{pmatrix}$, $\bar{x} \in X^2$.

Нехай $T_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ I & O \end{pmatrix}$, $T_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ I & O \end{pmatrix}$, $\sigma(T_A)$, $\sigma(T_B)$ — спектри операторів T_A і T_B відповідно; $i\mathbb{R} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda = 0\}$.

Як і в [7], будемо називати корені $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{L}(X)$ операторного рівняння

$$\Lambda^2 - A_1\Lambda - A_2 = O \quad (2)$$

розділеними, якщо існує неперервний обернений оператор $\Psi_A = (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}$ до оператора $(\Lambda_1 - \Lambda_2)$. У [7] доведено таку теорему.

Теорема 1. Припустимо, що рівняння (2) має розділені корені Λ_1, Λ_2 . Покладемо

$$U_A = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 \\ I & I \end{pmatrix}, \quad U_A^{-1} = \begin{pmatrix} \Psi_A & -\Psi_A\Lambda_2 \\ -\Psi_A & \Psi_A\Lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Тоді U_A^{-1} — неперервний обернений оператор до оператора U_A , а також

$$U_A^{-1}T_AU_A = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & O \\ O & \Lambda_2 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$e^{T_A t} = U_A \begin{pmatrix} e^{\Lambda_1 t} & O \\ O & e^{\Lambda_2 t} \end{pmatrix} U_A^{-1}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Зазначимо, що згідно з наведеним у [8] зауваженням 1.3 неперервна оборотність оператора U_A еквівалентна неперервній оборотності оператора $(\Lambda_1 - \Lambda_2)$.

Відомо (див., наприклад, [1], розд. 2, § 4), що коли $V \in \mathcal{L}(X)$, $\sigma(V) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$, $\sigma_-(V)$ і $\sigma_+(V)$ — частини спектра $\sigma(V)$ оператора V , що лежать відповідно у лівій і правій півплощині $\mathbb{C}$ (одна з них може бути порожньою), $P_{\pm}(V)$ — проектори Рісса, що відповідають $\sigma_{\pm}(V)$, то простір X зображується у вигляді прямої суми $X = X_-(V) \dot{+} X_+(V)$ інваріантних щодо оператора V підпросторів $X_{\pm}(V) = P_{\pm}(V)X$, а також справджується така теорема.

Теорема 2. Диференціальне рівняння $u'(t) = Vu(t) + v(t)$, $t \in \mathbb{R}$, має для кожної функції $v \in C_b(\mathbb{R}, X)$ єдиний розв'язок u в просторі $C_b^{(1)}(\mathbb{R}, X)$ тоді й тільки тоді, коли $\sigma(V) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$. Цей розв'язок будують за таким правилом. Покладемо

$$G_V(t) = \begin{cases} -e^{Vt}P_+(V), & t < 0, \\ e^{Vt}P_-(V), & t > 0. \end{cases} \quad (5)$$

Тоді u є згорткою

$$u(t) = (G_V * v)(t) = \int_{\mathbb{R}} G_V(t-s)v(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Розглянемо тепер диференціальне рівняння першого порядку

$$\begin{cases} \bar{x}'(t) = T_A \bar{x}(t) + \bar{y}(t), & t \geq 0, \\ \bar{x}'(t) = T_B \bar{x}(t) + \bar{y}(t), & t < 0. \end{cases} \quad (7)$$

Обмеженим розв'язком рівняння (7), відповідним до функції $\bar{y} \in C_b(\mathbb{R}, X^2)$, будемо називати таку функцію $\bar{x} \in C_b(\mathbb{R}, X^2)$, що для кожного $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ існує $\bar{x}'(t)$ і виконується рівність (7). Умову обмеженості для рівняння (7) формулюємо так само, як і для рівняння (1).

Внаслідок теореми 2 з [6] справджується таке твердження.

Теорема 3. Для того щоб диференціальне рівняння (7) задовольняло умову обмеженості, необхідно й достатньо, щоб виконувалися такі умови:

- i1) $\sigma(T_A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$, $\sigma(T_B) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$;
- i2) $X^2 = X_-^2(T_A) \dot{+} X_+^2(T_B)$.

Нехай P_- , P_+ — проєктори в X^2 , що відповідають зображенню $X^2 = X_-^2(T_A) \dot{+} X_+^2(T_B)$. Безпосередньо перевіряємо, що при виконанні умов i1), i2) теореми 3 відповідний до функції $\bar{y} \in C_b(\mathbb{R}, X^2)$ обмежений розв'язок $\bar{x}$ рівняння (7) можна визначити таким чином: якщо $t \geq 0$, то

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) = & \int_0^t e^{T_A(t-s)} P_-(T_A) \bar{y}(s) ds - \int_t^{+\infty} e^{T_A(t-s)} P_+(T_A) \bar{y}(s) ds \\ & + e^{T_A t} P_- \int_{-\infty}^0 e^{-T_B s} P_-(T_B) \bar{y}(s) ds + e^{T_A t} P_- \int_0^{+\infty} e^{-T_A s} P_+(T_A) \bar{y}(s) ds; \end{aligned} \quad (8)$$

якщо $t < 0$, то

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) = & \int_{-\infty}^t e^{T_B(t-s)} P_-(T_B) \bar{y}(s) ds - \int_t^0 e^{T_B(t-s)} P_+(T_B) \bar{y}(s) ds \\ & - e^{T_B t} P_+ \int_0^{+\infty} e^{-T_A s} P_+(T_A) \bar{y}(s) ds - e^{T_B t} P_+ \int_{-\infty}^0 e^{-T_B s} P_-(T_B) \bar{y}(s) ds. \end{aligned} \quad (9)$$

Справді, збіжність відповідних інтегралів, обмеженість функції $\bar{x}$ на $\mathbb{R}$, її диференційовність і виконання рівностей (7) для кожного $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ випливає із властивостей функції Гріна (5). Також внаслідок (8), (9) маємо

$$\bar{x}(0) = P_- \int_{-\infty}^0 e^{-T_B s} P_-(T_B) \bar{y}(s) ds - P_+ \int_0^{+\infty} e^{-T_A s} P_+(T_A) \bar{y}(s) ds = \bar{x}(0-).$$

У подальшому також потрібна така лема.

Лема 1. Нехай функція $\varphi: [a, b] \rightarrow X$ неперервна на $[a, b]$ і для кожного $s \in (a, b)$ існує $\varphi'(s)$. Тоді

$$\|\varphi(b) - \varphi(a)\| \leq (b - a) \sup_{s \in (a, b)} \|\varphi'(s)\|.$$

Доведення. Внаслідок теореми Гана–Банаха існує такий функціонал $h \in X^*$, що $\|h\| = 1$, $h(\varphi(b) - \varphi(a)) = \|\varphi(b) - \varphi(a)\|$. Покладемо $\alpha(t) = \operatorname{Re} h(\varphi(t))$, $t \in [a, b]$. Тоді існує таке $\xi \in (a, b)$, що

$$\begin{aligned} \|\varphi(b) - \varphi(a)\| &= h(\varphi(b) - \varphi(a)) = \alpha(b) - \alpha(a) \\ &= \alpha'(\xi)(b - a) \leq (b - a) |h(\varphi'(\xi))| \leq (b - a) \sup_{s \in (a, b)} \|\varphi'(s)\|. \end{aligned}$$

3. Основні результати. У подальшому використовуємо таке припущення.

Припущення 1. Існує такий оператор $W \in \mathcal{L}(X)$, що $\sigma(W) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$, а також $A_1 W + A_2 = B_1 W + B_2$.

Зауважимо, що припущення 1 виконується, зокрема, у випадку, коли рівняння

$$\Lambda^2 - B_1 \Lambda - B_2 = O \tag{10}$$

і (2) мають такий спільний корінь $\Lambda_0 \in \mathcal{L}(X)$, що $\sigma(\Lambda_0) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$.

Наступна теорема містить відповідь на природне питання про одночасне виконання умови обмеженості для диференціальних рівнянь (1) і (7).

Теорема 4. Якщо виконується припущення 1, то рівняння (1) задовольняє умову обмеженості у тому й тільки тому випадку, коли умову обмеженості задовольняє рівняння (7).

Доведення. Достатність. Нехай умова обмеженості виконується для рівняння (7). Зафіксуємо функцію $y \in C_b(\mathbb{R}, X)$. Внаслідок (7) для відповідного до функції $\bar{y}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ 0 \end{pmatrix}$,

$t \in \mathbb{R}$, єдиного обмеженого розв'язку $\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, виконуються рівності

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= A_1 x_1(t) + A_2 x_2(t) + y(t), \quad t > 0, \\ x_1'(t) &= B_1 x_1(t) + B_2 x_2(t) + y(t), \quad t < 0, \\ x_2'(t) &= x_1(t), \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Тому для кожного $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ існує $x_2''(t)$ і функція $x(t) = x_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$, задовольняє рівність (1).

Перевіримо, що $x_2 \in C_b^{(1)}(\mathbb{R}, X)$. Застосувавши при фіксованому $t > 0$ лему 1 до функції $\varphi_*(s) = x_2(s) - x_2(0) - s x_1(0)$, $s \in [0, t]$, отримаємо

$$\|x_2(t) - x_2(0) - t x_1(0)\| \leq t \sup_{s \in (0, t)} \|x_2'(s) - x_1(0)\| \leq t \max_{s \in [0, t]} \|x_1(s) - x_1(0)\|. \tag{11}$$

Із означення обмеженого розв'язку рівняння (7) випливає, що $x_1, x_2 \in C_b(\mathbb{R}, X)$. Тому, поділивши (11) на t і перейшовши до границі при $t \rightarrow 0+$, дістанемо рівність $x_2'(0+) = x_1(0)$. Застосувавши аналогічні міркування до функції φ_* на відрізку $[-t, 0]$, отримаємо $x_2'(0-) = x_1(0)$, а отже, $x_2'(0) = x_1(0)$. Таким чином, $x_2'(t) = x_1(t)$ для кожного $t \in \mathbb{R}$.

Якщо, від супротивного, отриманий обмежений розв'язок $x(t) = x_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$, рівняння (1), що відповідає функції y , не єдиний, то відповідне до (1) однорідне диференціальне рівняння має деякий ненульовий обмежений розв'язок $u(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Але тоді функція $\bar{u}(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ u(t) \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, буде ненульовим обмеженим розв'язком відповідного до (7) однорідного диференціального рівняння. Суперечність.

Необхідність. Нехай тепер умова обмеженості виконується для рівняння (1). Позначимо через Y набір усіх таких функцій $f: \mathbb{R} \rightarrow X$, що $f \in C_b^{(1)}(\mathbb{R}, X)$, для кожного $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ існує $f''(t)$, яка продовжується до функції з $C_b(\mathbb{R}, X)$. Тоді Y — лінійний простір із поточковим додаванням і множенням на комплексне число. Визначимо лінійний оператор $L: Y \rightarrow C_b(\mathbb{R}, X)$ за правилом

$$(Lx)(t) = \begin{cases} x''(t) - A_1 x'(t) - A_2 x(t), & t \geq 0, \\ x''(t) - B_1 x'(t) - B_2 x(t), & t < 0. \end{cases} \quad (12)$$

При цьому рівняння (1) записуємо у вигляді $Lx = y$, внаслідок умови обмеженості для (1) L є бієкцією і відповідний до функції $y \in C_b(\mathbb{R}, X)$ єдиний обмежений розв'язок рівняння (1) зображується у вигляді $x = L^{-1}y$. Також визначимо відображення $D: C_b^{(1)}(\mathbb{R}, X) \rightarrow C_b(\mathbb{R}, X)$, $D_Y^2: Y \rightarrow C_b(\mathbb{R}, X)$ за правилами

$$Dx = x', \quad x \in C_b^{(1)}(\mathbb{R}, X), \quad D_Y^2 x = x'', \quad x \in Y.$$

Зазначимо, що кожен оператор $Q \in \mathcal{L}(X)$ визначає оператор, який теж позначатимемо через Q , у введених функціональних просторах, діючи на відповідні функції поточно.

Зафіксуємо функцію $\bar{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, що належить простору $C_b(\mathbb{R}, X^2)$. Доведемо, що диференціальне рівняння (7) має відповідний до $\bar{y}$ обмежений розв'язок.

Безпосередньо перевіряємо, що функції $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, відповідає обмежений розв'язок рівняння (7) з координатами

$$x_1 = DL^{-1}y_1, \quad x_2 = L^{-1}y_1. \quad (13)$$

Внаслідок теореми 2, припущення 1 і теореми Банаха про обернений оператор існує неперервний обернений оператор $\mathcal{R} = (D - W)^{-1}$ до лінійного неперервного оператора $(D - W): C_b^{(1)}(\mathbb{R}, X) \rightarrow C_b(\mathbb{R}, X)$. Доведемо, що (7) має обмежений розв'язок, відповідний до функції $\begin{pmatrix} 0 \\ y_2(t) \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, з координатами

$$x_1 = (W\mathcal{R} - DL^{-1}\Gamma\mathcal{R} - DL^{-1}W)y_2, \quad x_2 = (\mathcal{R} - L^{-1}\Gamma\mathcal{R} - L^{-1}W)y_2, \quad (14)$$

де, з урахуванням припущення 1,

$$\Gamma = W^2 - A_1 W - A_2 = W^2 - B_1 W - B_2.$$

Справді,

$$x_2' - x_1 = (D - W)\mathcal{R}y_2 = y_2;$$

при $t > 0$, з урахуванням комутуваності операторів D і W , матимемо

$$\begin{aligned} x'_1(t) - A_1 x_1(t) - A_2 x_2(t) &= (DW\mathcal{R} - A_1 W\mathcal{R} - A_2 \mathcal{R})y_2(t) \\ &\quad - (D_Y^2 - A_1 D - A_2)L^{-1}\Gamma\mathcal{R}y_2(t) \\ &\quad - (D_Y^2 - A_1 D - A_2)L^{-1}W y_2(t) \\ &= DW\mathcal{R}y_2(t) - (A_1 W + A_2 W + \Gamma)\mathcal{R}y_2(t) - W y_2(t) \\ &= W(D - W)\mathcal{R}y_2(t) - W y_2(t) = \bar{0}; \end{aligned} \quad (15)$$

при $t < 0$, міркуючи аналогічно до (15), одержимо $x'_1 - B_1 x_1(t) - B_2 x_2(t) = \bar{0}$. Таким чином, рівність (7) виконується для кожного $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Нарешті безпосередньо з (14) випливає, що $x_1, x_2 \in C_b(\mathbb{R}, X)$.

Внаслідок лінійності диференціального рівняння (7) його обмеженим розв'язком, відповідним до функції $\bar{y}$, є сума розв'язків, заданих формулами (13) і (14).

Якщо, від супротивного, цей обмежений розв'язок не єдиний, то відповідне до (7) однорідне диференціальне рівняння має ненульовий обмежений розв'язок $\bar{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. Але тоді $u'_2(t) = u_1(t)$ для кожного $t \in \mathbb{R}$ і безпосередньо перевіряємо, що функція $u_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$, є ненульовим обмеженим розв'язком відповідного до (1) однорідного диференціального рівняння. Суперечність.

З теореми 4 випливає, що коли виконується припущення 1, то умова обмеженості для диференціального рівняння (1) виконується тоді й тільки тоді, коли виконуються умови i1), i2) теореми 3. У наступній теоремі розглянемо випадок, коли перевірка умов i1), i2) зводиться до перевірки умов на розділені корені рівнянь (2) і (10).

Теорема 5. Припустимо, що рівняння (2) і (10) мають розділені корені Λ_1, Λ_2 і Φ_1, Φ_2 відповідно, а також виконується припущення 1. Для того щоб диференціальне рівняння (1) задовольняло умову обмеженості, необхідно й достатньо, щоб виконувалися такі умови:

$$j1) (\sigma(\Lambda_1) \cup \sigma(\Lambda_2)) \cap i\mathbb{R} = \emptyset, (\sigma(\Phi_1) \cup \sigma(\Phi_2)) \cap i\mathbb{R} = \emptyset;$$

$$j2) X^2 = M_-(\Lambda_1, \Lambda_2) \dot{+} M_+(\Phi_1, \Phi_2),$$

де

$$\begin{aligned} M_-(\Lambda_1, \Lambda_2) &= \left\{ U_A \begin{pmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \end{pmatrix} \left| v^{(k)} \in X_-(\Lambda_k), k = 1, 2 \right. \right\}, \\ M_+(\Phi_1, \Phi_2) &= \left\{ U_B \begin{pmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \end{pmatrix} \left| v^{(k)} \in X_+(\Phi_k), k = 1, 2 \right. \right\}. \end{aligned}$$

Доведення. Скориставшись рівністю (3), робимо висновок, що при виконанні умов теореми 5 умова j1) еквівалентна умові i1) теореми 3.

Внаслідок леми 5 із [6] і рівності (4)

$$\begin{aligned} X_-^2(T_A) &= \left\{ \bar{u} \in X^2 \left| \sup_{t \geq 0} \|e^{T_A t} \bar{u}\|_* < \infty \right. \right\} \\ &= \left\{ \bar{u} \in X^2 \left| \sup_{t \geq 0} \left\| \begin{pmatrix} e^{\Lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\Lambda_2 t} \end{pmatrix} U_A^{-1} \bar{u} \right\|_* < \infty \right. \right\} \end{aligned}$$

$$= \left\{ U_A \begin{pmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \end{pmatrix} \left| \sup_{t \geq 0} \|e^{\Lambda_k t} v^{(k)}\| < \infty, k = 1, 2 \right. \right\} = M_-(\Lambda_1, \Lambda_2).$$

Аналогічно перевіряємо, що $X_+^2(T_B) = M_+(\Phi_1, \Phi_2)$. Отже, умова j2) еквівалентна умові i2) теореми 3.

Приклад. Нехай $X = \mathbb{C}^2$, $\|u\| = |u^{(1)}| + |u^{(2)}|$, $u = \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$. За допомогою теореми 5 доведемо, що диференціальне рівняння (1), в якому

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & -3 \end{pmatrix},$$

задовольняє умову обмеженості.

Безпосередньо перевіряємо, що в цьому випадку операторні рівняння (2) і (10) мають відповідно розділені корені

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad \Phi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\Lambda_1 = \Phi_1$, $\sigma(\Lambda_1) = \{1\}$, $\sigma(\Lambda_2) = \{-2, 2\}$, $\sigma(\Phi_2) = \{-3, 3\}$, то виконується припущення 1 і умова j1) теореми 5. Також $X_-(\Lambda_1) = \{\bar{0}\}$, $X_-(\Lambda_2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{C} \right\}$, а отже,

$$M_-(\Lambda_1, \Lambda_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{C} \right\} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{C} \right\}.$$

Враховуючи, що

$$\Phi_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

робимо висновок, що $X_+(\Phi_1) = \mathbb{C}^2$, $X_+(\Phi_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \delta \end{pmatrix} \mid \delta \in \mathbb{C} \right\}$. Тому

$$\begin{aligned} M_+(\Phi_1, \Phi_2) &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ 0 \\ \delta \end{pmatrix} \mid \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \left\{ \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C} \right\}. \end{aligned}$$

Вектори $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ утворюють базис у $\mathbb{C}^4$, а отже,

$$\mathbb{C}^4 = M_-(\Lambda_1, \Lambda_2) \dot{+} M_+(\Phi_1, \Phi_2),$$

тобто умова j2) теореми 5 теж виконується.

Зауважимо, що для того щоб знайти відповідний до заданої функції $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, з простору $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$ єдиний обмежений розв'язок диференціального рівняння, що розглядаємо в прикладі, потрібно скористатися формулами (8), (9) і виписати відповідний до $\bar{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, єдиний обмежений розв'язок відповідного рівняння (7). З дове-

дення теореми 4 випливає, що його третя й четверта координати визначатимуть шуканий розв'язок.

Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів.

Література

1. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, Москва (1970).
2. Х. Массера, Х. Шеффер, *Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства*, Мир, Москва (1970).
3. Д. Хенри, *Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений*, Мир, Москва (1985).
4. А. Г. Баскаков, *Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений*, Успехи мат. наук, **68**, № 1(409), 77–128 (2013).
5. О. А. Бойчук, В. П. Журавльов, О. О. Покутний, *Обмежені розв'язки еволюційних рівнянь*, Укр. мат. журн., **40**, № 1, 7–28 (2018).
6. М. Ф. Городній, О. А. Печериця, *Обмежені розв'язки дифференціального рівняння з кусково-сталими операторними коефіцієнтами*, Нелін. коливання, **24**, № 2, 147–157 (2021).
7. А. Г. Баскаков, Т. К. Кацаран, Т. И. Смагина, *Линейные дифференциальные уравнения второго порядка в банаховом пространстве и расщепление операторов*, Изв. вузов. Математика, № 10, 38–49 (2017).
8. А. С. Маркус, И. В. Мереуца, *О полном наборе корней операторного уравнения, соответствующего полиномиальному пучку*, Изв. АН СССР. Сер. мат., **37**, № 5, 1108–1131 (1973).

Одержано 19.05.23