

**ПРО ДЕЯКІ ЧАСТКОВІ РОЗВ'ЯЗКИ ФАКТОРИЗУЮЧИХ ЛАНЦЮЖКІВ****Денис Бельський***Інститут математики НАН України**вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна**e-mail: oiop120@gmail.com*

The study of factorizing chains, which are encountered in the investigation of self-similar potentials and coherent states of quantum mechanics, in some cases, can be reduced to the study of nonlinear functional-differential equations of neutral type with a linear deviation of the argument. We obtain new particular solutions of these equations and study their asymptotic properties. In addition, new particular solutions of the mentioned factorizing chains are obtained and some properties of these chains are investigated.

Дослідження факторизуючих ланцюжків, що зустрічаються при вивченні автомодельних потенціалів і когерентних станів квантової механіки, можна у деяких випадках звести до дослідження нелінійних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу з лінійним відхиленням аргументу. Отримано нові часткові розв'язки цих рівнянь і вивчено їхні деякі асимптотичні властивості. Також одержано нові часткові розв'язки згаданих факторизуючих ланцюжків і досліджено деякі властивості цих ланцюжків.

**1. Вступ.** При вивченні автомодельних потенціалів і когерентних станів квантової механіки з'являються факторизуючі або одягаючі ланцюжки, дослідження яких в деяких випадках можна звести до дослідження нелінійних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу з лінійним відхиленням аргументу [1–3].

Метою цієї статті є пошук нових часткових розв'язків таких рівнянь і згаданих факторизуючих ланцюжків, а також вивчення їхніх асимптотичних властивостей. Також буде виведено перетворення Беклунда між факторизуючими ланцюжками з різними параметрами. Це перетворення легко перевірити прямими обчисленнями; вперше воно опубліковано в [4], при цьому в [5] зазначено, що для його одержання використовували принцип нелінійної суперпозиції. Проте виведення цього перетворення ніде не було опубліковано, тому наводимо його у цій роботі.

**2. Нелінійні диференціально-функціональні рівняння.** Розглянемо рівняння

$$\frac{d}{dz} (v(z) + qv(qz)) - (v(z) - qv(qz))^2 = \mu, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dz} (f(z) + qf(qz)) + f^2(z) - q^2 f^2(qz) = \mu(q^2 - 1), \quad (2)$$

де  $\{z, q, \mu\} \subset \mathbb{C}$ ; між якими існує тісний зв'язок [5]. А саме, якщо  $v(z)$  — розв'язок рівняння (1), то функція

$$f(z) = qv(qz) - v(z) \quad (3)$$

буде розв'язком рівняння (2). Навпаки, якщо  $f(z)$  — розв'язок рівняння (2) та  $|q| < 1$ , то функція

$$v(z) = - \sum_{n=0}^{+\infty} q^n f(q^n z) \quad (4)$$

буде розв'язком рівняння (1) за умови, що цей ряд сходиться та допускає почленне диференціювання. Зокрема, якщо  $|q| < 1$ , цей зв'язок дозволяє встановити взаємно однозначну відповідність між аналітичними розв'язками рівнянь (1) і (2) за допомогою рівності  $f(0) = (q-1)v(0)$ , при цьому радіуси збіжності відповідних розв'язків збігаються. Рівняння (1) описує автомодельну редукцію

$$v_j(z) = q^j v(q^j z), \quad \beta_j = \mu q^{2j}$$

нескінченного ланцюжка

$$v'_{j+1} + v'_j = (v_{j+1} - v_j)^2 + \beta_j, \quad u_j = 2v'_j. \quad (5)$$

Цей ланцюжок пов'язаний рівностями

$$f_j = v_{j+1} - v_j \quad (6)$$

з факторизуючим ланцюжком Інфельда [6]

$$f'_{j+1} + f'_j = f_{j+1}^2 - f_j^2 + \beta_{j+1} - \beta_j, \quad (7)$$

останній, у свою чергу, еквівалентний послідовності перетворень Дарбу

$$u_j = -f'_j + f_j^2 + \beta_j, \quad u_{j+1} = u_j + 2f'_j$$

для операторів Шредінгера  $L_j = -D^2 + u_j$ ,  $D \stackrel{\text{df}}{=} \frac{d}{dz}$  [1]. У випадку

$$v_{j+N} = v_j + C_1, \quad f_{j+N} = f_j, \quad \beta_{j+N} = \beta_j, \quad (8)$$

де  $N$  — натуральне число,  $C_1$  — деяка стала величина (надалі символи  $C_n$  позначають деякі константи); ланцюжок (5) і скінченний ланцюжок (7) описують нерухомі точки названих перетворень Дарбу та їхніх суперпозицій. Рівняння (2) описує автомодельну редукцію

$$f_j(z) = q^j f(q^j z), \quad \mu_j = \mu(q^2 - 1)q^{2j}, \quad \mu_j = \beta_{j+1} - \beta_j$$

факторизуючого ланцюжка (7).

У [7], у першій теоремі, вивчено асимптотичні властивості розв'язків рівняння (1) на основі методів, розроблених у [8] для рівняння (2). Однак зв'язок (3), (4) між рівняннями (1) і (2) дозволяє після невеликого переформулювання застосувати теорему 10 із [8] до рівняння (1). У наступній теоремі другий підхід суттєво покращує майже всі твердження теореми 1 із [7].

Будемо досліджувати неперервно диференційовний розв'язок початкової задачі (1),  $v(0) \in \mathbb{R}$ , визначений на деякому максимальному напівінтервалі  $[0, T_{\max})$ . Існування, єдиність і нескінченна диференційовність цього розв'язку впливають із леми 6 у [8].

**Теорема.** 1) Якщо  $\mu < 0$ ,  $0 < q < 1$  і

$$\left| v(0) - \left( -\frac{\sqrt{|\mu|}}{1-q} \right) \right| < 2 \frac{\sqrt{|\mu|}}{1-q} \max \left\{ \frac{(1-3q^2)(1+q^2)}{1+q^4}, \frac{(1-q^{\frac{1}{2}})(1-q^{\frac{3}{2}})}{(1+q)^2} \right\},$$

то  $T_{\max} = +\infty$  і  $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = -\frac{\sqrt{|\mu|}}{1-q}$ ;

2) якщо  $\mu \leq 0$ ,  $0 < q < \frac{1}{\sqrt{2}}$  і  $v(0) > \frac{\sqrt{|\mu|}}{1-q}$ , то  $T_{\max} < +\infty$ ,  $v'(t) > 0$  для всіх  $t \in [0, T_{\max})$  і  $\lim_{t \rightarrow T_{\max}-0} v(t) = +\infty$ ;

3) якщо  $\mu > 0$ ,  $0 < q < \frac{1}{\sqrt{2}}$  і  $v(0) \geq -q^{-1}l(q)\sqrt{\mu}$ , де

$$l(q) = \begin{cases} \max \left\{ \left( 2q + q^2 + \frac{1}{1-q^4} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{(1+q^2)^{\frac{1}{2}}}, \left( \frac{1+q}{2(1-q)} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}, & 0 < q < \sqrt{2}-1, \\ \left( \frac{1+q}{2(1-q)} \right)^{\frac{1}{2}}, & \sqrt{2}-1 \leq q < \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

то  $T_{\max} < +\infty$ ,  $v'(t) > 0$  для всіх  $t \in [0, T_{\max})$  і  $\lim_{t \rightarrow T_{\max}-0} v(t) = +\infty$ .

**Доведення.** Достатньо застосувати до рівняння (2) та початкового значення  $f(0) = (q-1)v(0)$  теорему 10 із [8], а також урахувати п. 4 теореми 1 із [7].

Теорему доведено.

Зазначимо, що у розв'язків  $v(t)$  і  $f(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$ , описаних у теоремі, спільна область визначення. Також зауважимо, що теорема 10 із [8] не перекриває повністю п. 4 теореми 1 із [7]. Останнє зауваження дає можливість, застосовуючи до рівняння (2) твердження 4 теореми 1 із [7] після відповідного переформулювання, трохи доповнити теорему 10 із [8] такою лемою.

**Лема 1.** Припустимо, що  $0 < q < 1$  і  $f(t) \in C^1[0, T_{\max})$  є розв'язком початкової задачі

$$\frac{d}{dt} (f(t) + qf(qt)) + f^2(t) - q^2 f^2(qt) = \mu, \quad f(0) = f_0 \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

Якщо  $\mu < 0$ ,  $0 < q < \frac{1}{\sqrt{2}}$  і  $f_0 \leq \frac{1}{q} \left( \frac{|\mu|}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$ , то  $T_{\max} < +\infty$ ,  $f'(t) < 0$  для всіх  $t \in [0, T_{\max})$  і

$\lim_{t \rightarrow T_{\max}-0} f(t) = -\infty$ ; якщо при цьому  $0 < q < \sqrt{2}-1$  і  $\frac{1}{q} \left( \frac{|\mu|}{2} \right)^{\frac{1}{2}} < f_0 \leq q^{-1}h(q)\sqrt{|\mu|}$ , де

$$h(q) = \max \left\{ (1-q) \left( 2q + q^2 + \frac{1}{1-q^4} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{(1+q^2)^{\frac{1}{2}}(1-q^2)^{\frac{1}{2}}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\},$$

то  $T_{\max} < +\infty$  і  $\lim_{t \rightarrow T_{\max}-0} f(t) = -\infty$ .

**Доведення.** Достатньо застосувати до рівняння (2) та початкового значення  $f(0) = (q-1)v(0)$  п. 4 теореми 1 із [7], а також використати п. 4 теореми 10 із [8]. При цьому треба врахувати, що параметри у правих частинах рівнянь (2) і (9) відрізняються.

Лемі 1 доведено.

Додаткову інформацію про асимптотичну поведінку розв'язків рівнянь (1) і (2) наведено в [9, 10], при цьому в теоремі 4 з [10] розв'язки з дійсним аргументом не обов'язково повинні бути визначені в околі точки  $t = 0$ , існування таких розв'язків показано в [5]. Крім того, розв'язки у згаданій теоремі неперервно диференційовні скінченне число разів. Деякі добре аргументовані припущення про асимптотику розв'язків рівнянь (1) і (2) можна знайти в [5, 8].

Зазначимо, що лінеаризації рівнянь (1) і (2) в околі постійних розв'язків є окремими випадками узагальненого рівняння пантографа, асимптотична поведінка розв'язків цього рівняння може суттєво залежати від їхньої гладкості (див. [11], приклад 1), однак така залежність наявна не завжди [9].

Аналітичний розв'язок початкової задачі (1),  $v(0) = 0$  єдиний і є непарною функцією при кожному значенні параметра  $q$  [12]. Позначимо його  $v(z, q)$ . Завдяки непарності цей розв'язок також задовольнятиме рівняння (1) із параметром  $-q$  (з тією ж початковою умовою). Отже,

$$v(z, q) \equiv v(z, -q). \quad (10)$$

Припустимо, що розв'язок  $v(z, q)$  розкладається в ряд за степенями  $q$ . З (10) випливає, що в цьому розкладі є лише парні степені  $q$ , тобто

$$v(z, q) = \sum_{n=0}^{+\infty} h_n(z) q^{2n} = h_0(z) + h_1(z) q^2 + h_2(z) q^4 + \dots$$

Зокрема при  $\mu = 1$  із (1) знаходимо

$$h_0(z) = tg(z), \quad h_1(z) = z - \frac{z + \frac{1}{2} \sin(2z)}{\cos^2(z)}.$$

У [1] досліджувався факторизуючий ланцюжок (7). Зважаючи на рівності (6), наведені у згаданій роботі міркування можна повторити і для ланцюжка (5).

Для випадку  $q = e^{2\pi i/3}$ , вибираючи  $v_j(z) = q^j v(q^j z)$ ,  $\lambda_j = \mu q^{2j}$ ,  $\mu = (1 + q)^{-1}$  і враховуючи зв'язок  $f_j = v_{j+1} - v_j$ ,  $q f_j(qz) = f_{j+1}(z)$ , отримуємо рівність, аналогічну тотожності (23) з [1]:

$$u_0(x) = 2v'_0(x) = 2\wp(x + w_2), \quad u_0(0) = -2\lambda_1 = 2,$$

де функцію  $\wp$  визначено умовами  $g_2 = 0$ ,  $g_3 = 4$ ; числа  $g_{2,3}$  і  $w_{1,2,3}$  визначено в [13], § 18.13. Із формули 18.6.1 [13] випливає рівність

$$v_0(x) = -\zeta(x + w_2) + C_2.$$

Зауважимо, що при зроблених припущеннях із формули 18.2.3 [13] отримуємо тотожність

$$q\zeta(qz) = \zeta(z). \quad (11)$$

Тоді

$$qv_0(qx) = -q\zeta(q(x + q^2 w_2)) + qC_2 = -\zeta(x - w_3) + qC_2. \quad (12)$$

Виберемо  $C_2 = \frac{\zeta(-w_2 - w_3)}{q - 1}$  і, враховуючи формули складання та диференціювання для еліптичних функцій з [13], обчислимо вирази

$$\begin{aligned} qv_0(qx) - v_0(x) &= -\frac{1}{2} \frac{\wp'(x + w_2)}{\wp(x + w_2) - q}, \\ (qv_0(qx) - v_0(x))^2 &= \wp(x - w_3) + \wp(x + w_2) + \wp(-w_2 - w_3), \\ \frac{d}{dx} (qv_0(qx) + v_0(x)) &= \wp(x - w_3) + \wp(x + w_2). \end{aligned} \quad (13)$$

За допомогою результатів із [13] неважко переконатися, що функція  $v_0(x)$  є розв'язком рівняння (1).

Застосовуючи формули однорідності для еліптичних функцій з [13], запишемо функцію  $v_0(x)$  у вигляді

$$v_0(x) = -\zeta(x + w_2) + \frac{\zeta(w_2) + \zeta(w_3)}{1 - q}. \quad (14)$$

Використовуючи формулу 18.2.14 із [13] і позначаючи символами  $w_{1,i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , напівперіоди функції  $\wp(z; 0, 1)$ , отримуємо рівність

$$\zeta(w_i; 0, 4) = \zeta\left(4^{-\frac{1}{6}} w_{1,i}; 0, 4\right) = 4^{\frac{1}{6}} \zeta(w_{1,i}; 0, 1).$$

Звідси за допомогою результатів із § 18.13 [13] отримуємо значення

$$\zeta(w_2; 0, 4) = 4^{\frac{1}{6}} \frac{\sqrt{3}}{8} \Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right), \quad \zeta(w_3; 0, 4) = -q 4^{\frac{1}{6}} \frac{\sqrt{3}}{8} \Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right).$$

Зауважимо, що для величини  $\Gamma(1/3)$  явних формул зараз немає. Тоді

$$v_0(x) = -\zeta(x + w_2) + 4^{\frac{1}{6}} \frac{\sqrt{3}}{8} \Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right).$$

При зроблених припущеннях у  $\zeta$ -функції визначаюча її решітка симетрична відносно дійсної осі, тому розв'язок  $v_0(x)$  дійсний на дійсній осі  $x \in \mathbb{R}$ . Використовуючи непарність функції  $\zeta$ , тотожність (11) і формулу (14), отримуємо  $v_0(0) = 0$ .

Зауважимо, що за допомогою рівності (12), формул складання для еліптичних функцій з [13] і трохи інакше групуючи доданки, можна отримати ще одну формулу для різниці (13):

$$qv_0(qx) - v_0(x) = \frac{1}{2} \frac{\wp'(x - w_3)}{\wp(x - w_3) - q}.$$

З огляду на (3) права частина останньої рівності тотожно збігається з розв'язком (24) з [1]. У цьому також можна переконатися за допомогою результатів із [13].

Трохи узагальнимо отриманий результат: розглянемо функцію

$$v_1(x) = -\zeta(x + a) + C_3, \quad (15)$$

де  $a \in \mathbb{C}$  — довільна точка, і припустимо, що  $q^n = 1$ ,  $n = 2, 3, 4, 6$ ,  $q \neq 1$ , а функція Вейєрштрасса  $\zeta(z|w, w')$  така, що решітки  $\Omega = \{w, w'\}$  і  $\Omega' = \{qw, qw'\}$  збігаються; зауважимо, що згідно з кристалографічною теоремою обмеження не існує інших поворотів, що переводять решітку в себе. При зроблених припущеннях внаслідок формули 18.2.3 із [13] виконується рівність (11). Тому, використовуючи формули складання та диференціювання для еліптичних функцій з [13] і вибираючи  $C_3 = -\frac{\zeta(a - q^{-1}a)}{q - 1}$ , отримуємо

$$\begin{aligned} qv_1(qx) - v_1(x) &= \frac{1}{2} \frac{\wp'(x + q^{-1}a) - \wp'(a - q^{-1}a)}{\wp(x + q^{-1}a) - \wp(a - q^{-1}a)}, \\ (qv_1(qx) - v_1(x))^2 &= \wp(x + a) + \wp(x + q^{-1}a) + \wp(a - q^{-1}a), \\ \frac{d}{dx}(qv_1(qx) + v_1(x)) &= \wp(x + q^{-1}a) + \wp(x + a). \end{aligned} \quad (16)$$

Таким чином, функція  $v_1$  є розв'язком рівняння (1) із параметром  $\mu = -\wp((1 - q^{-1})a)$ .

Внаслідок парності функції  $\wp$  заміна параметра  $a$  в (15) числом  $-a$  не приведе до зміни параметра  $\mu = -\wp((1 - q^{-1})a)$ , тому, виконуючи вказану заміну, отримуємо ще один розв'язок рівняння (1):

$$v_2(x) = -\zeta(x - a) - \frac{\zeta((1 - q^{-1})a)}{1 - q}.$$

З (3) та (16) випливає, що функція

$$f_1(x) = \frac{1}{2} \frac{\wp'(x + q^{-1}a) - \wp'(a - q^{-1}a)}{\wp(x + q^{-1}a) - \wp(a - q^{-1}a)}$$

є розв'язком рівняння (2). Позначимо  $\xi = a - q^{-1}a$ , тоді

$$f_1(x) = \frac{1}{2} \frac{\wp'\left(x + \frac{\xi}{q-1}\right) - \wp'(\xi)}{\wp\left(x + \frac{\xi}{q-1}\right) - \wp(\xi)}, \quad \mu = -\wp(\xi).$$

Якщо у розв'язок рівняння (2) з прикладу 6 із [12] замість параметра  $\xi$  поставити число  $-\xi$ , то, враховуючи формулу 18.4.3 з [13] і непарність функції  $\zeta$ , отримаємо розв'язок  $f_1$ . А якщо при виведенні рівності (16) трохи змінити угруповання доданків, то одержуємо тотожність

$$qv_1(qx) - v_1(x) = -\frac{1}{2} \frac{\wp'(x + a) - \wp'(q^{-1}a - a)}{\wp(x + a) - \wp(q^{-1}a - a)}$$

і, визначивши  $\xi = q^{-1}a - a$ , приходимо до розв'язку з прикладу 6 із [12]. Зауважимо, що розв'язок  $f_1$  і розв'язок з прикладу 6 із [12] — це два різні розв'язки рівняння (2) з параметром  $\mu = -\wp(\pm\xi)$ .

Однак зведення факторизуючого ланцюжка (7) до рівняння (2) істотно обмежує коло розв'язків початкової задачі. Наприклад, у [2], у формулі (35) наведено приклад часткового

розв'язку факторизуючого ланцюжка (7) із довільною еліптичною функцією Вейерштрасса  $\wp$ . Аналогічно за допомогою формул складання та диференціювання для еліптичних функцій з [13] неважко перевірити, що послідовність функцій

$$v_j(x) = -\zeta(x + y_j) + c_j, \quad \beta_j = -\wp(z_j), \quad c_{j+1} - c_j = \zeta(z_j), \quad y_{j+1} - y_j = z_j \quad (17)$$

є розв'язком ланцюжка (5); при цьому легко отримуємо розв'язок (35) із [2]:

$$f_j = v_{j+1} - v_j = -\frac{1}{2} \frac{\wp'(x + y_j) - \wp'(z_j)}{\wp(x + y_j) - \wp(z_j)}.$$

Із додаткової умови

$$y_{j+N} - y_j = z_{j+N-1} + z_{j+N-2} + \dots + z_j = 0 \quad (18)$$

одержуємо рівності (8). При виконанні ще однієї додаткової умови

$$c_{j+N} - c_j = \zeta(z_{j+N-1}) + \zeta(z_{j+N-2}) + \dots + \zeta(z_j) = 0 \quad (19)$$

отримуємо тотожний збіг

$$v_{j+N} = v_j.$$

Зауважимо, що у випадку  $N = 3$  за допомогою прикладу 20.4.1 із [14], а також формул для еліптичних функцій з [13] можна легко довести, що умови (18) і (19) еквівалентні умові (18) і рівності  $\wp'(z_{j+m}) = \wp'(z_{j+l})$  для деяких  $\{m, l\} \subset \{0, 1, 2\}$ ,  $m \neq l$ . Також зазначимо, що для дійсності функції  $v_j(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , достатньо, щоб решітка, що визначає функцію  $\zeta$  в (17), була симетричною щодо дійсної осі та  $\{y_j, c_j\} \subset \mathbb{R}$ .

Аналітичні розв'язки рівнянь (1) і (2) вивчали в [1, 12, 15]. У лемі з [1] оцінювали радіус збіжності  $R_q$  аналітичного розв'язку початкової задачі (9),  $f(0) = 0$ , при цьому константу  $\alpha$  з цієї леми можна зменшити до величини  $\alpha = \frac{1 + |q|^4}{1 - |q|^4}$  і тим самим покращити оцінку знизу величини  $R_q$ . Тоді, враховуючи, що радіуси збіжності аналітичних розв'язків рівнянь (1) і (2) з початковими значеннями  $f(0) = v(0) = 0$  збігаються, і застосовуючи уточнену лему з [1] до рівняння (2), можна покращити результат леми 1 із [12].

**3. Перетворення Беклунда.** Для отримання перетворення Беклунда між факторизуючими ланцюжками з різними параметрами розпишемо зазначені на початку цієї статті перетворення Дарбу, дотримуючись позначень і термінології § 3.3.1 із [16]. Для цього запишемо диференціальний оператор другого порядку одновимірного стаціонарного рівняння Шредінгера у вигляді добутку двох диференціальних операторів першого порядку

$$A^\pm = \pm D + W, \quad H_0 = -D^2 + V_0 = A^+ A^- + \varepsilon = -D^2 + W' + W^2 + \varepsilon, \\ W' + W^2 + \varepsilon = V_0,$$

де  $\varepsilon$  — певна константа. Для деякого ненульового розв'язку  $\psi_0(x, \varepsilon)$  рівняння

$$(-D^2 + V_0 - \varepsilon)\psi_0(x, \varepsilon) = 0 \quad (20)$$

вважаємо, що

$$W(x) = W(x, \varepsilon) = \frac{\psi'_0(x, \varepsilon)}{\psi_0(x, \varepsilon)}.$$

Запишемо оператор  $H_1$  у вигляді

$$H_1 = A^- A^+ + \varepsilon = -D^2 + V_0 - 2W' = -D^2 + V_1, \quad V_1 = V_0 - 2W'.$$

Функція  $\psi_1(x, E)$  — деякий розв'язок рівняння

$$(-D^2 + V_1)\psi_1(x, E) = E\psi_1(x, E)$$

або

$$(-D^2 + V_0 - 2W'(x, \varepsilon) - E)\psi_1(x, E) = 0. \quad (21)$$

Згідно з рівністю (3.85) із [16] вважаємо, що

$$\psi_1(x, E) = A^- \psi_0(x, E) = \{W(x, \varepsilon) - W(x, E)\}\psi_0(x, E). \quad (22)$$

Розв'язки  $\psi_0(x, \varepsilon)$  і  $\psi_0(x, E)$  довільні. Зокрема, при  $\varepsilon = E$  це можуть бути лінійно незалежні розв'язки одного рівняння.

Аналогічно отримуємо рівність

$$\psi_1(x, \varepsilon) = \{W(x, E) - W(x, \varepsilon)\}\psi_0(x, \varepsilon). \quad (23)$$

Продиференціюємо рівності (22) і (23):

$$\psi_1'(x, E) = \{W'(x, \varepsilon) - W'(x, E)\}\psi_0(x, E) + \{W(x, \varepsilon) - W(x, E)\}\psi_0'(x, E), \quad (24)$$

$$\psi_1'(x, \varepsilon) = \{W'(x, E) - W'(x, \varepsilon)\}\psi_0(x, \varepsilon) + \{W(x, E) - W(x, \varepsilon)\}\psi_0'(x, \varepsilon). \quad (25)$$

Розділимо тотожність (24) на рівність (22) і (25) на (23):

$$\begin{aligned} \frac{\psi_1'(x, E)}{\psi_1(x, E)} &= \frac{W'(x, \varepsilon) - W'(x, E)}{W(x, \varepsilon) - W(x, E)} + \frac{\psi_0'(x, E)}{\psi_0(x, E)}, \\ \frac{\psi_1'(x, \varepsilon)}{\psi_1(x, \varepsilon)} &= \frac{W'(x, E) - W'(x, \varepsilon)}{W(x, E) - W(x, \varepsilon)} + \frac{\psi_0'(x, \varepsilon)}{\psi_0(x, \varepsilon)}. \end{aligned}$$

З двох останніх рівностей отримуємо тотожність

$$\frac{\psi_0'(x, \varepsilon)}{\psi_0(x, \varepsilon)} + \frac{\psi_1'(x, E)}{\psi_1(x, E)} = \frac{\psi_0'(x, E)}{\psi_0(x, E)} + \frac{\psi_1'(x, \varepsilon)}{\psi_1(x, \varepsilon)}. \quad (26)$$

Крім цього, з (22) і (23) маємо рівність

$$\frac{\psi_1(x, E)}{\psi_0(x, E)} = -\frac{\psi_1(x, \varepsilon)}{\psi_0(x, \varepsilon)}.$$

Запишемо тотожність (24) у вигляді

$$\frac{\psi_1'(x, E)}{\psi_1(x, E)} \frac{\psi_1(x, E)}{\psi_0(x, E)} = W'(x, \varepsilon) - W'(x, E) + \{W(x, \varepsilon) - W(x, E)\} \frac{\psi_0'(x, E)}{\psi_0(x, E)}.$$

Враховуючи рівність (22) і визначення функції  $W$ , з останньої тотожності отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{\psi'_1(x, E)}{\psi_1(x, E)} \{W(x, \varepsilon) - W(x, E)\} &= E - \varepsilon - W^2(x, \varepsilon) + W^2(x, E) \\ &+ \{W(x, \varepsilon) - W(x, E)\}W(x, E), \\ \{W(x, \varepsilon) - W(x, E)\} \left[ \frac{\psi'_1(x, E)}{\psi_1(x, E)} + W(x, \varepsilon) \right] &= E - \varepsilon. \end{aligned} \quad (27)$$

У ланцюжку (7) скорочено позначимо  $\mu_j = \beta_{j+1} - \beta_j$ . І нехай  $\phi_0$  — деякий ненульовий розв'язок рівняння

$$\phi_0'' = \{f'_j + f_j^2 - \mu_j\} \phi_0.$$

Тоді оберемо

$$f_{j+1} = -\frac{\phi'_0}{\phi_0}.$$

Визначимо потенціал  $V_0(z) = f'_j(z) + f_j^2(z)$  і параметр  $\varepsilon = \mu_j$ . Тоді з урахуванням рівності (20) можна вважати, що  $\phi_0(z) = \psi_0(z, \mu_j)$  і

$$f_{j+1} = f_{j+1}(z | \mu_j) = -\frac{\psi'_0(z, \mu_j)}{\psi_0(z, \mu_j)} = -W(z, \mu_j).$$

Використовуючи нові позначення, рівняння для функції  $f_{j+2}$  можна записати у вигляді

$$f'_{j+2} - f_{j+2}^2 = \mu_j + \mu_{j+1} - V_0(z) + 2W'(z, \mu_j).$$

Нехай  $\phi_1$  — деякий ненульовий розв'язок рівняння

$$\phi_1'' = \{V_0(z) - 2W'(z, \mu_j) - (\mu_j + \mu_{j+1})\} \phi_1;$$

тоді оберемо

$$f_{j+2} = -\frac{\phi'_1}{\phi_1}.$$

Визначимо  $E = \mu_j + \mu_{j+1}$ , а далі, враховуючи рівність (21), можна вважати, що  $\phi_1 = \psi_1(z, \mu_j + \mu_{j+1})$  і

$$f_{j+2} = f_{j+2}(z | \mu_j, \mu_{j+1}) = -\frac{\psi'_1(z, \mu_j + \mu_{j+1})}{\psi_1(z, \mu_j + \mu_{j+1})}.$$

Проводячи аналогічні міркування для функцій  $\tilde{f}_{j+1}$  і  $\tilde{f}_{j+2}$  таких, що

$$\begin{aligned} \tilde{f}'_{j+1} + \tilde{f}_j &= \tilde{f}_{j+1}^2 - f_j^2 + \mu_j + \mu_{j+1}, \\ \tilde{f}'_{j+2} + \tilde{f}'_{j+1} &= \tilde{f}_{j+2}^2 - \tilde{f}_{j+1}^2 - \mu_{j+1}, \end{aligned}$$

отримуємо

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{j+1} &= f_{j+1}(z | \mu_j + \mu_{j+1}) = -\frac{\psi'_0(z, \mu_j + \mu_{j+1})}{\psi_0(z, \mu_j + \mu_{j+1})} = -W(z, \mu_j + \mu_{j+1}), \\ \tilde{f}_{j+2} &= f_{j+2}(z | \mu_j + \mu_{j+1}, -\mu_{j+1}) = -\frac{\psi'_1(x, [\mu_j + \mu_{j+1}] - \mu_{j+1})}{\psi_1(x, [\mu_j + \mu_{j+1}] - \mu_{j+1})} = -\frac{\psi'_1(x, \mu_j)}{\psi_1(x, \mu_j)}. \end{aligned}$$

Тепер рівності (26) і (27) з урахуванням вибраних значень параметрів  $\varepsilon$  і  $E$  можна записати через функції  $f_{j+1}$ ,  $f_{j+2}$ ,  $\tilde{f}_{j+1}$  і  $\tilde{f}_{j+2}$  таким чином.

**Лема 2.** Для факторизуючого ланцюжка (7) виконується перетворення Беклунда

$$f_{j+1}(z | \mu_j) + f_{j+2}(z | \mu_j, \mu_{j+1}) = f_{j+1}(z | \mu_j + \mu_{j+1}) + f_{j+2}(z | \mu_j + \mu_{j+1}, -\mu_{j+1}),$$

$$\{f_{j+1}(z | \mu_j) - f_{j+1}(z | \mu_j + \mu_{j+1})\}[f_{j+2}(z | \mu_j, \mu_{j+1}) + f_{j+1}(z | \mu_j)] = \mu_{j+1},$$

де функції  $f_n$  є розв'язками рівнянь

$$f'_{j+1}(z | \mu_j) + f'_j = \mu_j + f_{j+1}^2(z | \mu_j) - f_j^2,$$

$$f'_{j+2}(z | \mu_j, \mu_{j+1}) + f'_{j+1}(z | \mu_j) = \mu_{j+1} + f_{j+2}^2(z | \mu_j, \mu_{j+1}) - f_{j+1}^2(z | \mu_j)$$

і

$$f'_{j+1}(z | \mu_j + \mu_{j+1}) + f'_j = \mu_j + \mu_{j+1} + f_{j+1}^2(z | \mu_j + \mu_{j+1}) - f_j^2,$$

$$f'_{j+2}(z | \mu_j + \mu_{j+1}, -\mu_{j+1}) + f'_{j+1}(z | \mu_j + \mu_{j+1})$$

$$= -\mu_{j+1} + f_{j+2}^2(z | \mu_j + \mu_{j+1}, -\mu_{j+1}) - f_{j+1}^2(z | \mu_j + \mu_{j+1}).$$

Лема 2 встановлює взаємно однозначну відповідність між парами розв'язків  $f_{j+1}(z | \mu_j)$ ,  $f_{j+2}(z | \mu_j, \mu_{j+1})$  і  $f_{j+1}(z | \mu_j + \mu_{j+1})$ ,  $f_{j+2}(z | \mu_j + \mu_{j+1}, -\mu_{j+1})$ , яку можна легко перевірити прямими обчисленнями.

У випадку  $\mu_{j+n} = \mu(-1)^n$ ,  $n \geq 0$ , вибираючи в лемі 2  $f_{j+1}(z | 0) = -f_j(z)$ , отримуємо відому (див. [2, с. 88]) рівність

$$f_{j+2}(z | \mu, -\mu) + f_{j+1}(z | \mu) = -\frac{\mu}{f_{j+1}(z | \mu) + f_j(z)}$$

або для всього ланцюжка (7):

$$f_{j+n} + f_{j+n-1} = \frac{\mu(-1)^{n-1}}{f_{j+n-1} + f_{j+n-2}}, \quad n \geq 2,$$

$$f_{j+n} = f_{j+n-4}, \quad n \geq 4.$$

Проте якщо функцію  $f_j$  визначено, то функцію  $f_{j+1}$  треба шукати як розв'язок відповідного рівняння Ріккати, що не завжди є простою задачею. Тому на функцію  $f_j$  можна накладати додаткові умови: наприклад, припустимо, що функція  $f_j$  є розв'язком рівняння

$$\pm q^2 f'_j(qz) + f'_j(z) = \mu + q^2 f_j^2(qz) - f_j^2(z), \quad (28)$$

тоді можна вибрати  $f_{j+1}(z) = f_{j+1}(z | \mu) = \pm q f_j(qz)$ . А якщо в лемі 2 покласти, що  $f_{j+1}(z | 0) = -f_j$ , то рівняння для функції  $f_{j+2}(z | 0, \mu)$  набуває вигляду

$$f'_{j+2}(z | 0, \mu) - f'_j(z) = \mu + f_{j+2}^2(z | 0, \mu) - f_j^2(z).$$

І якщо додатково припустити, що функція  $f_j$  — розв'язок рівняння

$$\pm q^2 f'_j(qz) - f'_j(z) = \mu + q^2 f_j^2(qz) - f_j^2(z), \quad (29)$$

то можна вибрати  $f_{j+2}(z | 0, \mu) = \pm q f_j(qz)$ . Після цього залишається лише виразити за допомогою леми 2 розв'язок  $f_{j+1}(z | \mu)$  через функції  $f_{j+1}(z | 0)$  і  $f_{j+2}(z | 0, \mu)$ . Властивості розв'язків рівнянь (28) і (29) можуть суттєво відрізнятися.

Автор висловлює подяку рецензенту за цінні зауваження та рекомендації щодо покращення цієї роботи.

Автор заявляє про відсутність конфлікту інтересів.

### Література

1. S. Skorik, V. Spiridonov, *Self-similar potentials and the  $q$ -oscillator algebra at roots of unity*, Lett. Math. Phys., **28**, 59–74 (1993).
2. A. P. Veselov, A. B. Shabat, *Dressing chains and the spectral theory of the Schrödinger operator*, Funct. Anal. Appl., **27**, 81–96 (1993).
3. V. P. Spiridonov, *Self-similar potentials in quantum mechanics and coherent states*, Phys. Particles Nuclei, **52**, 274–289 (2021).
4. В. Э. Адлер, *Перекройка многоугольников*, Функцион. анализ и его прил., **27**, вып. 2, 79–82 (1993).
5. V. E. Adler, *On the rational solutions of the Shabat equations*, Nonlinear Physics: Theory and Experiment, World Sci., Singapore (1996), pp. 3–10.
6. L. Infeld, *On a new treatment of some eigenvalue problems*, Phys. Rev. (2), **59**, 737–747 (1941).
7. Г. П. Пелюх, Д. В. Бельський, *Про одне нелінійне диференціально-функціональне рівняння нейтрального типу з лінійним відхиленням аргументу*, Нелін. коливання, **25**, № 1, 59–71 (2022).
8. Y. Liu, *Regular solutions of the Shabat equation*, J. Differential Equations, **154**, 1–41 (1999).
9. Г. П. Пелюх, Д. В. Бельський, *Теорема порівняння з теорії монотонних динамічних систем для лінійних систем диференціально-функціональних рівнянь із лінійно перетвореним аргументом*, Нелін. коливання, **24**, № 2, 210–215 (2021).
10. Г. П. Пелюх, Д. В. Бельський, *Об асимптотических свойствах решений некоторых дифференциально-функциональных уравнений*, Нелін. коливання, **19**, № 3, 311–348 (2016).
11. Д. В. Бельський, Г. П. Пелюх, *Асимптотические оценки решений дифференциально-функционального уравнения с линейным запаздыванием*, Укр. мат. журн., **71**, № 1, 129–138 (2019).
12. Г. П. Пелюх, Д. В. Бельський, *Про деякі нелінійні диференціально-функціональні рівняння нейтрального типу з лінійним відхиленням аргументу*, Нелін. коливання, **25**, № 4, 370–376 (2022).
13. M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables*, Nat. Bur. Stands (1964).
14. E. T. Whittaker, G. N. Watson, *A course of modern analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2021).
15. Y. Liu, *An existence result for the Shabat equation*, Aequationes Math., **64**, 104–109 (2002).
16. Б. Н. Захарьев, В. М. Чабанов, *Послушная квантовая механика*, Ин-т компьютер. исслед., Москва (2002).

Одержано 01.04.23,  
після доопрацювання — 21.08.23