

ПРО РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНОЇ ПЕРІОДИЧНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ З ПЕРЕМИКАННЯМИ У ВИПАДКУ ПАРАМЕТРИЧНОГО РЕЗОНАНСУ МЕТОДОМ НЬЮТОНА – КАНТОРОВИЧА

Сергій Чуйко

*Інститут динаміки складних технічних систем імені Макса Планка
Магдебург, Німеччина*

*Донбаський державний педагогічний університет
вул. Генерала Батюка, 19, Слов'янськ, 84 112, Україна
e-mail: chuiko@mpi-magdeburg.mpg.de, chujko-slav@ukr.net*

Олексій Чуйко, Дар'я Д'яченко

*Донбаський державний педагогічний університет
вул. Генерала Батюка, 19, Слов'янськ, 84 112, Україна
e-mail: alexeychuyko1980@gmail.com
dyachenkodaria2016@gmail.com*

We investigate the problem of determination of conditions of existence of solutions of the weakly nonlinear periodic boundary-value problem for systems of ordinary differential equations with switchings and construction of these solutions. The critical case where the equation for the generating amplitudes of the weakly nonlinear periodic boundary-value problem with switchings does not turn into the identity is considered. We improve the classification of critical and noncritical cases and construct an iterative algorithm for finding solutions of the weakly nonlinear periodic boundary-value problem with switchings in the critical case on the basis of the generalized Newton – Kantorovich theorem. We investigate the case of a nonlinear equation dimension of which does not coincide with the dimension of the unknown in the case of completeness of the rank of the Jacobian of the nonlinear equation.

As an example of application of the constructed iterative scheme based on the generalized Newton – Kantorovich theorem, we obtain approximations to solutions of the periodic boundary-value problem for the mathematical model of a nonisothermal chemical reaction. To verify the accuracy of the obtained approximations, we evaluate discrepancies in the original equation. We find the estimate for the length of the range of values of a small parameter on which the convergence of the iterative procedure for the construction of solutions of the weakly nonlinear periodic boundary-value problem with switchings for the mathematical model of a nonisothermal chemical reaction occurs. To this end, we use the condition of convergence, in particular, the requirement that the operator used for the construction of the required solution of the original problem is contracting and the assumption that the generalized Newton – Kantorovich theorem can be used.

Досліджено задачу про знаходження умов існування розв'язків слабконелінійної періодичної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь із перемиканнями та побудову цих розв'язків. Розглянуто критичний випадок у припущенні, що рівняння для породжуючих амплітуд слабконелінійної періодичної крайової задачі з перемиканнями не перетворюється на тотожність.

задачі (2), неперервна за незалежною змінною $t \in [a, b]$ і тричі неперервно диференційовна за малим параметром ε на відрізку $[0, \varepsilon_0]$. Функцію

$$f(t, \varepsilon) := \begin{cases} \mu_0(\varepsilon), & t \in [a, \tau_1[, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \mu_p(\varepsilon), & t \in [\tau_p, b], \end{cases}$$

припускаємо неперервною за незалежною змінною $t \in [a, b]$ і неперервною за малим параметром ε на відрізку $[0, \varepsilon_0]$. Функції $\mu_0(\varepsilon), \dots, \mu_p(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$ припускаємо неперервними; ці функції є власними функціями крайової задачі (1) у випадку параметричного резонансу [5–7].

Поставлена задача продовжує дослідження періодичних крайових задач у випадку параметричного резонансу [6, 8]. Задачі такого типу у випадку параметричного резонансу пов'язані з численними застосуваннями в електроніці [6], геодезії [9], теорії плазми [10], нелінійній оптиці, механіці [11] і верстатобудуванні [12], у яких разом зі знаходженням розв'язку періодичних крайових задач обчислюються власні функції відповідної задачі. Крім того, поставлена задача продовжує дослідження періодичних крайових задач, які виникають у хімії і будуть вивчені далі. Прийом, використаний у статті, а саме: перехід до більш широкого класу розв'язків у випадку наявності лише тривіальних розв'язків задачі в деякому класі, розроблено у загальній теорії лінійних крайових задач [13–15].

2. Умови існування розв'язку. Позначимо нормальну $(X(a) = I_n)$ фундаментальну матрицю $X(t)$ породжуючої задачі (2). У некритичному випадку

$$\det Q_0 \neq 0, \quad Q_0 := \ell_0 X(\cdot) := X(a) - X(b)$$

однорідна породжуюча задача (2) у класі $[1, 2]$ $z(t) \in \mathbb{C}^1[a, b]$ має лише тривіальний розв'язок $z_0(t) \equiv 0$.

Позначимо матрицю $Q := \ell X(\cdot) \in \mathbb{R}^{n(p+1) \times n}$, а також P_Q і P_{Q^*} — матриці-ортопроектори [1, 2]:

$$P_Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}(Q), \quad P_{Q^*}: \mathbb{R}^{n(p+1)} \rightarrow \mathbb{N}(Q^*).$$

Крім того, позначимо через $P_{Q_d^*}$ $(d \times n(p+1))$ -вимірну матрицю, утворену з d лінійно незалежних рядків матриці-ортопроектора P_{Q^*} . Матриця Q має вигляд

$$Q := \begin{pmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ \dots \\ Q_n \end{pmatrix},$$

тому

$$P_{Q^*} = \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_{np} \end{pmatrix} \neq 0, \quad P_{Q_d^*} = (O \quad I_{np}), \quad P_Q = O, \quad d := np.$$

Таким чином, згідно з традиційною класифікацією періодичних крайових задач [16, 17] збурена крайова задача (1) являє собою критичний випадок. Його особливістю є розв'язність породжуючої крайової задачі (2) не для всіх збурень. Позначимо оператор

$$K[g(s)](t) = \begin{cases} X(t) \int_a^t X^{-1}(s)g(s) ds, & t \in [a, \tau_1], \\ X(t) \int_{\tau_p}^t X^{-1}(s)g(s) ds, & t \in [\tau_p, b], \end{cases}$$

який визначає розв'язок задачі Коші

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + g(s), \quad z(a) = 0, z(\tau_1) = 0, \dots, z(\tau_p) = 0.$$

Оскільки $P_Q = 0$, крайова задача

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + g(s), \quad \ell z(\cdot) = 0$$

у класі функцій $z(t) \in \mathbb{C}^1\{[a, b] \setminus \{\tau_i\}_I\} \cap \mathbb{C}[a, b]$ за умови [1, 2] $P_{Q_d^*} \ell K[g(s)](\cdot) = 0$ однозначно розв'язна у вигляді $z_0(t, \varepsilon) = G[g(s)](t)$, де $G[g(s)](t) := K[g(s)](t) - X(t)Q^+ \ell K[g(s)](\cdot)$ — узагальнений оператор Гріна періодичної крайової задачі для рівняння $\frac{dz}{dt} = A(t)z + g(s)$. Крім того, Q^+ — псевдообернена матриця за Муром – Пенроузом [1, 18]. Позначимо вектори

$$\lambda(\varepsilon) := \begin{pmatrix} \mu_0(\varepsilon) \\ \dots \\ \mu_p(\varepsilon) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n(p+1)}, \quad \lambda_0 := \lambda(0) := \begin{pmatrix} \mu_0^{(0)} \\ \dots \\ \mu_p^{(0)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n(p+1)}.$$

Однорідна породжуюча задача (2) має лише тривіальний розв'язок, тому необхідна й достатня умова розв'язності нелінійної крайової задачі (1) у випадку параметричного резонансу має вигляд [5]

$$P_{Q_d^*} \ell K[f(t, \varepsilon) + Z(z(t, \varepsilon), t, \varepsilon)](\cdot) = 0.$$

Нелінійна вектор-функція $Z(z, t, \varepsilon)$ і збурення $f(t, \varepsilon)$, $f(t, 0) := f_0(t)$ неперервні за малим параметром ε на відрізку $[0, \varepsilon_0]$, тому необхідна умова розв'язності крайової задачі (1) у випадку параметричного резонансу має вигляд

$$F(\lambda_0) := P_{Q_d^*} \ell K[f_0(t) + Z(0, t, 0)](\cdot) = 0. \quad (3)$$

Таким чином, довели таку лему.

Лема. Припустимо, що для породжуючої задачі (2) має місце некритичний випадок ($\det Q_0 \neq 0$), при цьому однорідна частина породжуючої задачі (2) у класі $z(t) \in \mathbb{C}^1[a, b]$ має тільки тривіальний розв'язок $z_0(t) \equiv 0$. При цьому нелінійна періодична крайова задача (1) у випадку параметричного резонансу являє собою критичний випадок ($P_{Q^*} \neq 0$). Припустимо також, що у малому околі тривіального розв'язку $z_0(t) \equiv 0$ однорідної частини породжуючої задачі (2) крайова задача (1) у випадку параметричного резонансу має розв'язок

$$z(t, \varepsilon) : z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1\{[a, b] \setminus \{\tau_i\}_I\} \cap \mathbb{C}[a, b], \quad z(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0], \quad \lambda(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0],$$

при цьому в достатньо малому околі вектора λ_0 існує власна функція $\lambda(\varepsilon)$. Тоді справджується рівність (3).

являє собою нелінійне рівняння щодо вектора

$$\xi_1(\varepsilon) := \begin{pmatrix} \mu_1^{(1)}(\varepsilon) \\ \vdots \\ \mu_{p-1}^{(1)}(\varepsilon) \\ \mu_p^{(0)}(\varepsilon) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n(p+1)}.$$

Для знаходження розв'язку $\xi_1(\varepsilon)$ рівняння (4) скористаємося методом Ньютона – Канторовича [2, 21]. Рівняння (4) визначає функція

$$F_1(\xi_1(\varepsilon)) : \mathbb{R}^{n(p+1)} \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad d \neq n(p+1),$$

для якої якобіан $\mathcal{J}_1(\xi_1) := F_1'(\xi_1) \in \mathbb{R}^{d \times n(p+1)}$ — прямокутна матриця, а отже, для знаходження розв'язку $\xi_1(\varepsilon)$ рівняння (4) не застосовний традиційний метод Ньютона [22]. Згідно з прийнятим припущенням функція $F_1(\xi_1(\varepsilon))$ двічі неперервно диференційовна за невідомою $\xi_1(\varepsilon)$ у малому околі точки

$$\xi_1^{(0)} := \begin{pmatrix} \mu_1^{(0)} \\ \vdots \\ \mu_{p-1}^{(0)} \\ \mu_p^{(0)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n(p+1)}.$$

Припустимо, що для рівняння (4) при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_* \leq \varepsilon_0$ виконуються нерівності

$$\left\| \mathcal{J}_1^+ \left(\xi_1^{(j)}(\varepsilon) \right) \right\| \leq \delta_1(j), \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\left\| d^2 F_1 \left(\zeta_j(\varepsilon); \xi_1(\varepsilon) - \xi_1^{(j)}(\varepsilon) \right) \right\| \leq \sigma_1(j) \left\| \xi_1(\varepsilon) - \xi_1^{(0)} \right\|$$

та існує константа

$$\theta_1 := \sup_{j \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{\delta_1(j) \sigma_1(j)}{2} \right\}.$$

Тоді згідно з [2, 21, 23] і за умов

$$P_{\mathcal{J}_1^* \left(\xi_1^{(j)}(\varepsilon) \right)} = 0, \quad \theta_1 \left\| \xi_1(\varepsilon) - \xi_1^{(j)}(\varepsilon) \right\| < 1 \quad (5)$$

для знаходження розв'язку $\xi_1(\varepsilon)$ рівняння (4) застосовна ітераційна схема

$$\xi_1^{(j+1)}(\varepsilon) = \xi_1^{(j)}(\varepsilon) - \mathcal{J}_1^+ \left(\xi_1^{(j)}(\varepsilon) \right) F_1 \left(\xi_1^{(j)}(\varepsilon) \right), \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (6)$$

при цьому швидкість збіжності послідовності $\{\xi_1^{(j)}(\varepsilon)\}$ до розв'язку $\xi_1(\varepsilon)$ рівняння (4) квадратична. Тут

$$P_{\mathcal{J}_1^* \left(\xi_1^{(j)}(\varepsilon) \right)} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{N} \left(\mathcal{J}_1^* \left(\xi_1^{(j)}(\varepsilon) \right) \right)$$

— ортопроектор матриці $\mathcal{J}_1^* \left(\xi_1^{(j)}(\varepsilon) \right)$. У випадку $d = np < n(p+1)$ умова

$$P_{\mathcal{J}_1^* \left(\xi_1^{(j)}(\varepsilon) \right)} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

виконується у випадку повноти рангу матриці $\mathcal{J}_1 \left(\xi_1^{(j)}(\varepsilon) \right)$.

Таким чином, знайдено перше наближення $z_1(t, \varepsilon)$ до шуканого розв'язку $z(t, \varepsilon)$ вихідної крайової задачі (1), а також перше наближення $\xi_1(\varepsilon)$ до шуканого вектора $\lambda(\varepsilon)$. Позначимо вектори

$$\xi_k(\varepsilon) := \begin{pmatrix} \mu_1^{(k)}(\varepsilon) \\ \dots\dots\dots \\ \mu_{p-1}^{(k)}(\varepsilon) \\ \mu_p^{(k-1)}(\varepsilon) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n(p+1)},$$

$$f_k(t, \varepsilon) := \begin{cases} \mu_0^{(k)}(\varepsilon), & t \in [a, \tau_1[, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots, \\ \mu_{p-1}^{(k)}(\varepsilon), & t \in [\tau_{p-1}, \tau_p[, \\ \mu_p^{(k-1)}(\varepsilon), & t \in [\tau_p, b], \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots$$

Умова розв'язності нелінійної крайової задачі k -го наближення у випадку параметричного резонансу

$$F_k(\xi_k(\varepsilon)) := P_{Q_d^*} \ell K[f_k(t, \varepsilon) + Z(z_k(t, \varepsilon), t, \varepsilon)](\cdot) = 0 \quad (7)$$

являє собою нелінійне рівняння щодо вектора $\xi_k(\varepsilon)$, для якого якобіан $\mathcal{J}_k(\xi_k) := F'_k(\xi_k) \in \mathbb{R}^{d \times n(p+1)}$ — прямокутна матриця. Припустимо, що для рівняння (7) при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_* \leq \varepsilon_0$ виконуються нерівності

$$\|\mathcal{J}_k^+(\xi_k^{(j)}(\varepsilon))\| \leq \delta_k(j), \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\|d^2 F_k(\zeta_j(\varepsilon); \xi_k(\varepsilon) - \xi_k^{(j)}(\varepsilon))\| \leq \sigma_k(j) \|\xi_k(\varepsilon) - \xi_k^{(0)}\|$$

та існує константа

$$\theta := \sup_{k \in \mathbb{N}} \sup_{j \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{\delta_k(j) \sigma_k(j)}{2} \right\}.$$

Тоді за умов [2, 21, 23]

$$P_{\mathcal{J}_k^*(\xi_k^{(j)}(\varepsilon))} = 0, \quad \theta \|\xi_k(\varepsilon) - \xi_k^{(j)}(\varepsilon)\| < 1 \quad (8)$$

для знаходження розв'язку $\xi_k(\varepsilon)$ рівняння (7) застосовна ітераційна схема

$$\xi_k^{(j+1)}(\varepsilon) = \xi_k^{(j)}(\varepsilon) - \mathcal{J}_k^+(\xi_k^{(j)}(\varepsilon)) F_k(\xi_k^{(j)}(\varepsilon)), \quad j = 0, 1, 2, \dots; \quad (9)$$

при цьому швидкість збіжності послідовності $\{\xi_k^{(j)}(\varepsilon)\}$ до розв'язку $\xi_k(\varepsilon)$ рівняння (7) квадратична. Тут

$$P_{\mathcal{J}_k^*(\xi_k^{(j)}(\varepsilon))} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{J}_k^*(\xi_k^{(j)}(\varepsilon)))$$

— ортопроектор матриці $\mathcal{J}_k^*(\xi_k^{(j)}(\varepsilon))$. Шуканий розв'язок вихідної задачі (1) визначено ітераційною схемою

$$z_{k+1}(t, \varepsilon) = \varepsilon G[f_k(s, \varepsilon) + Z(z_k(s, \varepsilon), s, \varepsilon)](t), \quad F_k(\xi_k^{(j)}(\varepsilon)) = 0, \quad k, j = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Таким чином, довели таке твердження.

Теорема. Припустимо, що для породжуючої задачі (2) має місце некритичний випадок ($\det Q_0 \neq 0$), при цьому однорідна частина породжуючої задачі (2) у класі $z_0(t) \in \mathbb{C}^1[a, b]$ має тільки тривіальний розв'язок $z_0(t) \equiv 0$. У цьому випадку нелінійна крайова задача з перемиканнями (1) у випадку параметричного резонансу являє собою критичний випадок ($P_{Q^*} \neq 0$). Припустимо, що рівняння для породжуючих констант (3) не вироджується у тотожність і має дійсний корінь $\lambda_0 \in \mathbb{R}^{n(p+1)}$. Також припустимо, що для рівняння (7) виконуються умови (8). Тоді для кореня λ_0 рівняння для породжуючих констант (3) в околі тривіального породжуючого розв'язку $z_0(t) \equiv 0$ однорідної породжуючої задачі та в достатньо малому околі початкового значення λ_0 власної функції $\lambda(\varepsilon)$ для знаходження принаймні одного розв'язку

$$z(t, \varepsilon) : z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1\{[a, b] \setminus \{\tau_i\}_I\} \cap \mathbb{C}[a, b], \quad z(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0],$$

крайової задачі (1) у випадку параметричного резонансу застосовна ітераційна схема (10).

Якщо для рівняння (7) виконано умови (8), то довжину відрізка $[0, \varepsilon_*]$, на якому застосовано ітераційну схему (10), можна оцінити аналогічно [24] безпосередньо з умови стиснення

$$\left\| \frac{\varepsilon \partial G[Z(z_k(s, \varepsilon), s, \varepsilon)](t)}{\partial z} \right\| \leq \lambda < 1, \quad \varepsilon \in [0; \varepsilon_*] \subseteq [0; \varepsilon_0], \quad (11)$$

оператора [21]

$$G[Z(z_k(s, \varepsilon), s, \varepsilon)](t), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Крім того, довжину відрізка $[0, \varepsilon_*]$, на якому збіжна ітераційна схема (10), можна оцінити за допомогою мажоруючих рівнянь Ляпунова [1, 16, 25].

Розв'язок крайової задачі (1) у випадку параметричного резонансу за допомогою ітераційної схеми (10) суттєво ускладнюється у випадку, коли нелінійності $Z(z_k(s, \varepsilon), s, \varepsilon)$ не інтегровні в елементарних функціях. Приклад такої ситуації для рівняння коливань супутника на еліптичній орбіті наведено в статтях [26–28]. У випадку, коли нелінійність $Z(z_k(s, \varepsilon), s, \varepsilon)$ не інтегровна в елементарних функціях і при цьому однорідна породжуюча задача (2) у класі функцій $z_0(t) \in \mathbb{C}^1[a, b]$ має лише тривіальний розв'язок $z_0(t) \equiv 0$, можна скористатися розкладом нелінійності $Z(z_k(s, \varepsilon), s, \varepsilon)$ в околі тривіального породжуючого розв'язку за малим параметром ε на відрізку $[0, \varepsilon_0]$. Оскільки нелінійна вектор-функція $Z(z, t, \varepsilon)$ тричі неперервно диференційовна за невідомою z у малому околі розв'язку породжуючої задачі та тричі неперервно диференційовна за малим параметром ε на відрізку $[0, \varepsilon_0]$, то в околі тривіального породжуючого розв'язку на відрізку $[0, \varepsilon_0]$ має місце розклад [29, с. 48]

$$\begin{aligned} Z(z_k(t, \varepsilon), t, \varepsilon) &= Z(z_0(t, c_0^*), t, 0) + dZ(z_k(t, \varepsilon), t, \varepsilon) \\ &+ \frac{1}{2!} d^2 Z(z_k(t, \varepsilon), t, \varepsilon) + \frac{1}{3!} d^3 Z(z_k(t, \varepsilon), t, \varepsilon) + \dots, \end{aligned} \quad (12)$$

де

$$dZ(z_k(t, \varepsilon), t, \varepsilon) := A_1(t) z_k(t, \varepsilon) + \varepsilon A_2(t)$$

— перший диференціал нелінійної вектор-функції $Z(z, t, \varepsilon)$, який зображується за допомогою похідних

$$A_1(t) = \left. \frac{\partial Z(z, t, \varepsilon)}{\partial z} \right|_{\substack{z=z_0(t), \\ \varepsilon=0}}, \quad A_2(t) = \left. \frac{\partial Z(z, t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\substack{z=z_0(t), \\ \varepsilon=0}}.$$

Другий диференціал нелінійної вектор-функції $Z(z, t, \varepsilon)$

$$d^2 Z(z_k(t, \varepsilon), t, \varepsilon) := A_3(z_k(t, \varepsilon), t) z_k(t, \varepsilon) + 2 \varepsilon A_4(t) z_k(t, \varepsilon) + \varepsilon^2 A_5(t)$$

визначають похідні

$$A_3(z_k(t, \varepsilon), t) = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial Z(z, t, \varepsilon)}{\partial z} z \right\} \Big|_{\substack{z=z_0(t), \\ \varepsilon=0}},$$

$$A_4(t) := \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left\{ \frac{\partial Z(z, t, \varepsilon)}{\partial z} \right\} \Big|_{\substack{z=z_0(t), \\ \varepsilon=0}}, \quad A_5(t) = \frac{\partial^2 Z(z, t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon^2} \Big|_{\substack{z=z_0(t), \\ \varepsilon=0}}.$$

Третій диференціал нелінійної вектор-функції $Z(z, t, \varepsilon)$

$$d^3 Z(z_k(t, \varepsilon), t, \varepsilon) := A_6(z_k^2(t, \varepsilon), t) z_k(t, \varepsilon) + 3 \varepsilon A_7(z_k(t, \varepsilon), t) z_k(t, \varepsilon) + 3 \varepsilon^2 A_8(t) z_k(t, \varepsilon) + \varepsilon^3 A_9(t)$$

визначають похідні

$$A_6(z_k^2(t, \varepsilon), t) = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial Z(z, t, \varepsilon)}{\partial z} z \right\} z \right\} \Big|_{\substack{z=z_0(t), \\ \varepsilon=0}},$$

$$A_7(z_k(t, \varepsilon), t) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial Z(z, t, \varepsilon)}{\partial z} z \right\} z \right\} \Big|_{\substack{z=z_0(t), \\ \varepsilon=0}},$$

$$A_8(t) := \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} \left\{ \frac{\partial Z(z, t, \varepsilon)}{\partial z} \right\} \Big|_{\substack{z=z_0(t), \\ \varepsilon=0}}, \quad A_9(t) = \frac{\partial^3 Z(z, t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon^3} \Big|_{\substack{z=z_0(t), \\ \varepsilon=0}}.$$

Позначимо функцію

$$\mathcal{Z}(z_k(t, \varepsilon), t, \varepsilon) := Z(z_0(t, c_0^*), t, 0) + dZ(z_k(t, \varepsilon), t, \varepsilon) + \frac{1}{2!} d^2 Z(z_k(t, \varepsilon), t, \varepsilon) + \frac{1}{3!} d^3 Z(z_k(t, \varepsilon), t, \varepsilon).$$

Шуканий розв'язок вихідної задачі (1) визначає ітераційна схема

$$z_{k+1}(t, \varepsilon) = \varepsilon G[f_k(s, \varepsilon) + \mathcal{Z}(z_k(s, \varepsilon), s, \varepsilon)](t), \quad F_k(\xi_k^{(j)}(\varepsilon)) = 0, \quad k, j = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

Таким чином, довели таке твердження.

Наслідок. Припустимо, що для породжуючої задачі (2) має місце некритичний випадок, при цьому однорідна породжуюча задача (2) у класі функцій $z_0(t) \in \mathbb{C}^1[a, b]$ має лише тривіальний розв'язок $z_0(t) \equiv 0$. При цьому нелінійна породжуюча крайова задача з перемиканнями (1) у випадку параметричного резонансу являє собою критичний випадок ($P_{Q^*} \neq 0$). Припустимо, що рівняння для породжуючих констант (3) не вироджується у тотожність і має дійсний корінь $\lambda_0 \in \mathbb{R}^{n(p+1)}$. Також припустимо, що для рівняння (7) виконуються умови (8). Тоді для кореня λ_0 рівняння для породжуючих констант (3) в околі тривіального породжуючого розв'язку $z_0(t) \equiv 0$ породжуючої задачі та в достатньо малому околі початкового значення λ_0 власної функції $\lambda(\varepsilon)$ для знаходження принаймні одного розв'язку

$$z(t, \varepsilon) : z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1\{[a, b] \setminus \{\tau_i\}_I\} \cap \mathbb{C}[a, b], \quad z(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0],$$

крайової задачі (1) у випадку параметричного резонансу застосовна ітераційна схема (13).

3. Модель неізотермічної хімічної реакції з параметричним збуренням. Умови доведеного наслідку виконуються у випадку задачі про знаходження гладкого розв'язку

$$z(t, \varepsilon) : z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[-1, 1], \quad z(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

періодичної крайової задачі [30]

$$z'(t, \varepsilon) = A z(t, \varepsilon) + \varepsilon f(t, \varepsilon) + \varepsilon Z(z(t, \varepsilon), \varepsilon), \quad \ell_0 z(\cdot, \varepsilon) := z(-1, \varepsilon) - z(1, \varepsilon) = 0. \quad (14)$$

Тут A — стала (2×2) -вимірна матриця, власні числа якої не перетинають уявної осі,

$$z(t, \varepsilon) := \begin{pmatrix} x(t, \varepsilon) \\ y(t, \varepsilon) \end{pmatrix}, \quad f(t, \varepsilon) := \begin{cases} \lambda(\varepsilon), & t \in [-1, 0[, \\ \mu(\varepsilon), & t \in [0, 1]; \end{cases}$$

крім цього,

$$Z(z(t, \varepsilon), \varepsilon) := (1 + x(t, \varepsilon)) e^{-\frac{\varepsilon}{1+y(t, \varepsilon)}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Власні числа матриці A не перетинають уявної осі, отже, має місце не критичний випадок [16, 19]. При цьому однорідна породжуюча задача для періодичної задачі (14) має лише тривіальний розв'язок $z_0(t) \equiv 0$; зокрема, для

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_a = -1, \quad \lambda_b = -2.$$

При цьому матриця Q має вигляд

$$Q := \begin{pmatrix} Q_0 \\ O_2 \end{pmatrix}, \quad Q_0 = \begin{pmatrix} e - \frac{1}{e} & 0 \\ 0 & e^2 - \frac{1}{e^2} \end{pmatrix}, \quad \det Q_0 = e^3 - e + \frac{1}{e^3} - \frac{1}{e} \neq 0,$$

до того ж

$$P_{Q^*} = \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_2 \end{pmatrix} \neq 0, \quad P_{Q_d^*} = (O \quad I_2), \quad P_Q = O.$$

Таким чином, у класі функцій

$$z(t) \in \mathbb{C}^1\{[-1, 1] \setminus \{\tau\}_I\} \cap \mathbb{C}[-1, 1], \quad \tau := 0,$$

крайова задача

$$z'(t, \varepsilon) = A z(t, \varepsilon) + \varepsilon f(t, \varepsilon) + \varepsilon Z(z(t, \varepsilon), \varepsilon), \quad \ell z(\cdot, \varepsilon) = 0 \quad (15)$$

являє собою критичний випадок. Нелінійна вектор-функція $Z(z, t, \varepsilon)$ тричі неперервно диференційовна за невідомою в малому околі розв'язку породжуючої задачі і тричі неперервно диференційовна за малим параметром ε на відрізку $[0, \varepsilon_0]$, тому в околі тривіального породжуючого розв'язку має місце розвинення (12), де

$$dZ(z, t, \varepsilon) = ((-1 + y)\varepsilon + x(1 + (-1 + y)\varepsilon)) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

— перший диференціал нелінійної вектор-функції $Z(z, t, \varepsilon)$,

$$d^2 Z(z, t, \varepsilon) = \varepsilon (1 + x) (\varepsilon - 2y\varepsilon + y^2(-2 + 3\varepsilon)) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

— другий диференціал нелінійної вектор-функції $Z(z, t, \varepsilon)$,

$$d^3 Z(z, t, \varepsilon) = \varepsilon (1 + x) (-\varepsilon^2 + 3y\varepsilon^2 - 6y^2\varepsilon^2 + 2y^3(3 - 6\varepsilon + 5\varepsilon^2))$$

— третій диференціал нелінійної вектор-функції. Рівняння (3) не перетворюється на тотожність і має дійсний корінь

$$\lambda_0 := \begin{pmatrix} \lambda_0^{(a)} \\ \lambda_0^{(b)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Особливість крайової задачі (14) у випадку параметричного резонансу полягає в тому, що корінь рівняння (3) визначений неоднозначно, а саме, залишається невідомим вектор

$$\mu_0 := \begin{pmatrix} \mu_0^{(a)} \\ \mu_0^{(b)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Таким чином, знайдений корінь рівняння (3) визначає перше наближення до розв'язку крайової задачі (14)

$$z_1(t, \varepsilon) := \begin{pmatrix} x_1(t, \varepsilon) \\ y_1(t, \varepsilon) \end{pmatrix},$$

де

$$\begin{aligned} x_1(t, \varepsilon) &= \frac{\varepsilon e^{-t} (1 + \mu_0^{(a)})}{1 + e}, & y_1(t, \varepsilon) &= \frac{\varepsilon e^{-2t} (1 + \mu_0^{(b)})}{2(1 + e^2)}, & t &\in [-1, 0], \\ x_1(t, \varepsilon) &= \frac{\varepsilon e^{-t} (-e + e^t + e^{1+t}) (1 + \mu_0^{(a)})}{1 + e}, & & & t &\in [0, 1], \\ y_1(t, \varepsilon) &= \frac{\varepsilon e^{-2t} (1 + \mu_0^{(b)}) (e \sinh(1) + e^t (-1 + e^4) \sinh(t))}{e^4 - 1}, & & & t &\in [0, 1]. \end{aligned}$$

Отже, перше наближення до розв'язку крайової задачі (14) знайдено з точністю до компонент вектора μ_0 . Умова розв'язності (4) крайової задачі першого наближення у випадку крайової задачі (14) являє собою нелінійне рівняння стосовно вектора

$$\xi_1(\varepsilon) := \begin{pmatrix} \lambda_1^{(a)}(\varepsilon) \\ \lambda_1^{(b)}(\varepsilon) \\ \mu_0^{(a)}(\varepsilon) \\ \mu_0^{(b)}(\varepsilon) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Для знаходження розв'язку $\xi_1(\varepsilon)$ рівняння (4) використаємо ефективний метод Ньютона – Канторовича. Рівняння (4) визначає функція $F_1(\xi_1(\varepsilon)) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Припустимо, що

$$\xi_1^{(0)}(\varepsilon) := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 7 \\ -\frac{8}{7} \\ -\frac{8}{7} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

При цьому яacobіан

$$\mathcal{J}_1(\xi_1^{(0)}(\varepsilon)) \approx \begin{pmatrix} \frac{-1+e}{e} & 0 & \frac{\varepsilon}{1+e} - \frac{\varepsilon^2}{1+e} & \frac{(-1+e)\varepsilon^2}{2(1+e^2)} \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^2} & \frac{(-1+e)\varepsilon}{e(1+e)} + \frac{(1-e)\varepsilon^2}{e(1+e)} & \frac{\varepsilon^2}{2(1+e^2)} \end{pmatrix}$$

— матриця повного рангу, тому умову $P_{\mathcal{J}_1^*(\xi_1^{(0)}(\varepsilon))} = 0$ виконано. Для знаходження розв'язку $\xi_1(\varepsilon)$ рівняння (7) використовуємо ітераційну схему (9); при цьому

$$\xi_1^{(1)}(\varepsilon) := \begin{pmatrix} \xi_1^{(1a)}(\varepsilon) \\ \xi_1^{(1b)}(\varepsilon) \\ \xi_1^{(1c)}(\varepsilon) \\ \xi_1^{(1d)}(\varepsilon) \end{pmatrix},$$

де

$$\begin{aligned} \xi_1^{(1a)}(\varepsilon) &\approx -1 + \frac{54\,457\,715\,\varepsilon}{57\,516\,584} - \frac{56\,514\,137\,\varepsilon^2}{120\,997\,324} - \frac{98\,878\,393\,\varepsilon^3}{578\,757\,928} + \frac{94\,801\,235\,\varepsilon^4}{115\,193\,399} \\ &\quad - \frac{131\,640\,517\,\varepsilon^5}{132\,631\,253} + \frac{51\,429\,358\,\varepsilon^6}{96\,764\,151} + \frac{43\,119\,434\,\varepsilon^7}{104\,808\,343} - \frac{85\,007\,648\,\varepsilon^8}{67\,499\,793} + \dots, \\ \xi_1^{(1b)}(\varepsilon) &\approx -1 + \frac{47\,196\,388\,\varepsilon}{49\,636\,153} - \frac{13\,709\,428\,\varepsilon^2}{29\,288\,671} - \frac{180\,445\,545\,\varepsilon^3}{1\,230\,110\,398} + \frac{184\,608\,059\,\varepsilon^4}{242\,476\,394} \\ &\quad - \frac{63\,836\,387\,\varepsilon^5}{69\,928\,371} + \frac{80\,664\,983\,\varepsilon^6}{168\,058\,104} + \frac{103\,349\,209\,\varepsilon^7}{262\,660\,100} - \frac{98\,122\,048\,\varepsilon^8}{83\,934\,697} + \dots \end{aligned}$$

і, крім того,

$$\begin{aligned} \xi_1^{(1c)}(\varepsilon) &\approx -\frac{985\,162\,418\,487\,295}{1\,125\,899\,906\,842\,623} + \frac{74\,179\,465\,\varepsilon^2}{95\,502\,514} \\ &\quad - \frac{123\,714\,231\,\varepsilon^3}{106\,695\,563} + \frac{62\,422\,511\,\varepsilon^4}{94\,876\,831} + \frac{43\,088\,483\,\varepsilon^5}{99\,529\,439} \\ &\quad - \frac{88\,989\,286\,\varepsilon^6}{62\,801\,755} + \frac{126\,151\,882\,\varepsilon^7}{81\,135\,613} - \frac{31\,636\,610\,\varepsilon^8}{51\,240\,771} + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi_1^{(1d)}(\varepsilon) \approx & -\frac{985\,162\,418\,487\,295}{1\,125\,899\,906\,842\,623} + \frac{18\,287\,459\,\varepsilon^3}{64\,283\,510} - \frac{52\,091\,216\,\varepsilon^4}{123\,373\,041} \\ & + \frac{496\,114\,12\,\varepsilon^5}{208\,506\,889} + \frac{85\,597\,813\,\varepsilon^6}{412\,697\,436} - \frac{69\,280\,352\,\varepsilon^7}{127\,215\,491} + \frac{42\,222\,551\,\varepsilon^8}{75\,319\,416} + \dots\end{aligned}$$

Перевіряємо виконання другої з умов (8). Для рівняння (4) за умови $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_* := 1,15$ виконується нерівність

$$\left\| \xi_1^{(1)}(\varepsilon) - \xi_1^{(0)}(\varepsilon) \right\| \leq 1,51\,845,$$

де

$$\left\| \mathcal{J}_1^+ \left(\xi_1^{(1)}(\varepsilon) \right) \right\| \leq \delta_1, \quad \left\| d^2 F_1 \left(\zeta_j(\varepsilon); \xi_1(\varepsilon) - \xi_1^{(1)}(\varepsilon) \right) \right\| \leq \sigma_1 \left\| \xi_1^{(1)}(\varepsilon) - \xi_1^{(0)}(\varepsilon) \right\|.$$

Крім цього,

$$\theta_1 \left\| \xi_1(\varepsilon) - \xi_1^{(j)}(\varepsilon) \right\| \approx 0,223\,489 < 1, \quad \theta_1 := \frac{\delta_1 \sigma_1}{2}.$$

Таким чином, для значень малого параметра $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_* := 1,15$ знайдене наближення до розв'язку $\xi_1(\varepsilon)$ рівняння (7) забезпечує виконання умови (8). Для достатньо малих значень малого параметра ε знайдене наближення до розв'язку $\xi_1(\varepsilon)$ рівняння (7) забезпечує достатню точність, наприклад,

$$F_1(\xi_1^{(1)}(0,1)) \approx \begin{pmatrix} 7,42\,390 \times 10^{-11} \\ 4,00\,107 \times 10^{-11} \end{pmatrix},$$

тому природно обмежитися цим наближенням. Перевіримо виконання умови збіжності (11) у випадку задачі про знаходження наближень до періодичного розв'язку рівняння (14):

$$\begin{aligned}\left\| \frac{\varepsilon \partial G[Z(z_0(s, \varepsilon), s, \varepsilon)](t)}{\partial z} \right\|_{\infty} & \leq 0,737\,270 < 1, \quad \varepsilon \in [0; 1, 2], \\ \left\| \frac{\varepsilon \partial G[Z(z_1(s, \varepsilon), s, \varepsilon)](t)}{\partial z} \right\|_{\infty} & \leq 0,960\,268 < 1, \quad \varepsilon \in [0; 1, 2].\end{aligned}$$

Таким чином, у випадку задачі про знаходження наближень до періодичного розв'язку рівняння (14) для значень малого параметра $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_* := 1,2$ для знайденого наближення до розв'язку $\xi_1(\varepsilon)$ рівняння (7) виконуються умови (8), а також умова (11).

Відзначимо періодичність і неперервність отриманих наближень у малому околі тривіального розв'язку $z_0(t) \equiv 0$ породжуючої періодичної задачі для рівняння (14). Точність знайдених наближень до періодичного розв'язку рівняння (14) визначають нев'язки

$$\Delta_k(\varepsilon) := \left\| z'_k(t, \varepsilon) - A z_k(t, \varepsilon) - \varepsilon f(t, \varepsilon) - \varepsilon Z(z_k(t, \varepsilon), \varepsilon) \right\|_{\mathbb{C}[-1;1]}, \quad k = 0, 1.$$

Зокрема,

$$\Delta_1(0,1) \approx 0,00472\,468, \quad \Delta_1(0,01) \approx 0,0012\,291.$$

Для обчислення наближень до періодичного розв'язку крайової задачі (1), знайдених за допомогою ітераційної схеми (13), а також наближень до власної функції застосовний також метод найменших квадратів [31, 32]. Отримані результати для умов розв'язності крайової задачі (1) та ітераційна схема (13) можуть бути перенесені на нелінійні матричні диференціально-алгебраїчні крайові задачі [33], а також на гібридні крайові задачі [34].

Виконано за часткової підтримки Інституту динаміки складних технічних систем імені Макса Планка, Магдебург, Німеччина.

Література

1. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. Second edition*, De Gruyter, Berlin (2016).
2. О. А. Бойчук, С. М. Чуйко, *Про наближене розв'язання нелінійних крайових задач за методом Ньютона – Канторовича*, Нелін. коливання, **23**, № 2, 162 – 183 (2020); **English translation**: J. Math. Sci., **258**, № 5, 594 – 617 (2021).
3. A. D. Myshk, *On the relation between systems with switching and hybrid systems*, Funct. Differ. Equ., **11**, № 3-4, 467 – 473 (2004).
4. О. А. Бойчук, С. М. Чуйко, *Узагальнений оператор Гріна імпульсної крайової задачі з переключеннями*, Нелін. коливання, **10**, № 1, 51 – 65 (2007); **English translation**: Nonlinear Oscillations (N.Y.), **10**, № 1, 46 – 61 (2007).
5. С. М. Чуйко, *Нелінійна нетерова крайова задача у випадку параметричного резонансу*, Нелін. коливання, **17**, № 1, 137 – 148 (2014); **English translation**: J. Math. Sci. (N.Y.), **205**, № 6, 859 – 870 (2015).
6. Л. И. Мандельштам, Н. Д. Папалекси, *О параметрическом возбуждении электрических колебаний*, Журн. техн. физики, № 3, 5 – 29 (1934).
7. С. М. Чуйко, О. С. Чуйко, Д. В. Сисоев, *Слабконелінійна матрична крайова задача у випадку параметричного резонансу*, Нелін. коливання, **19**, № 2, 276 – 289 (2016); **English translation**: J. Math. Sci., **223**, № 3, 337 – 350 (2017).
8. В. А. Якубович, В. М. Старжинский, *Параметрический резонанс в линейных системах*, Наука, Москва (1987).
9. Н. А. Люлько, *Основной и комбинационный резонансы в нелинейной системе двух осцилляторов*, Новосибирск, Препринт, Ин-т математики, Сиб. отд-ние РАН; № 281 (2012).
10. В. П. Силин, *Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму*, Наука, Москва (1973).
11. В. В. Болотин, *Динамическая устойчивость упругих систем*, Гостехиздат, Москва (1956).
12. Ю. Ф. Копелев, *Параметрические колебания станков*, Металлорежущие станки: Республ. Межведомст. науч.-тех. сб., Киев, Вып. 12, 3 – 8 (1984).
13. С. Г. Крейн, *Линейные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, Москва (1971).
14. Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматулина, *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений*, Наука, Москва (1991).
15. С. М. Чуйко, *Про регуляризацію лінійної нетерової крайової задачі за допомогою виродженої імпульсної дії*, Нелін. коливання, **16**, № 1, 133 – 145 (2013); **English translation**: J. Math. Sci., **197**, № 1, 138 – 150 (2014).
16. Е. А. Гребеников, Ю. А. Рябов, *Конструктивные методы анализа нелинейных систем*, Наука, Москва (1979).
17. A. Boichuk, S. Chuiko, *Autonomous weakly nonlinear boundary value problems in critical cases*, Differ. Equ., № 10, 1353 – 1358 (1993).
18. А. Алберт, *Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание*, Наука, Москва (1977).
19. И. Г. Малкин, *Некоторые задачи теории нелинейных колебаний*, Гостехиздат, Москва (1956).
20. О. А. Бойчук, С. М. Чуйко, О. С. Чуйко, *Неавтономні періодичні крайові задачі в особливому критичному випадку*, Нелін. коливання, **7**, № 1, 53 – 66 (2004); **English translation**: Nonlinear Oscillations (N.Y.), **7**, № 1, 52 – 64 (2004).
21. О. А. Бойчук, С. М. Чуйко, *Про наближене розв'язання слабконелінійних крайових задач методом Ньютона – Канторовича*, Нелін. коливання, **23**, № 3, 321 – 331 (2020); **English translation**: J. Math. Sci., **261**, № 2, 228 – 240 (2022).
22. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, Москва (1977).
23. S. M. Chuiko, *To the generalization of the Newton – Kantorovich theorem*, Visn. V. N. Karazin Kharkiv Nat. Univ. Ser. Math., Appl. Math. and Mech., **85**, № 1, 62 – 68 (2017).

24. С. М. Чуйко, *Область збіжності ітераційної процедури для автономної крайової задачі*, Нелін. коливання, **9**, № 3, 416–432 (2006); **English translation**: Nonlinear Oscillations (N.Y.), **9**, № 3, 405–422 (2006).
25. Д. К. Лика, Ю. А. Рябов, *Методы итераций и мажорирующие уравнения Ляпунова в теории нелинейных колебаний*, Штиинца, Кишинев (1974).
26. Ю. Д. Шлапак, *О периодических решениях нелинейных уравнений второго порядка, не разрешенные относительно старшей производной*, Укр. мат. журн., **26**, № 6, 850–854 (1974); **English translation**: Ukr. Math. J., **26**, № 6, 702–706 (1974).
27. А. П. Торжевский, *Периодические решения уравнения плоских колебаний спутника на эллиптической орбите*, Косм. исследования, **2**, № 5, 667–678 (1964).
28. А. М. Самойленко, С. М. Чуйко, О. В. Несмелова, *Нелінійні крайові задачі, не розв'язані відносно похідної*, Укр. мат. журн., **72**, № 8, 1106–1118 (2020); **English translation**: Ukr. Math. J., **72**, № 8, 1280–1293 (2021).
29. В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Наука, Москва (1980).
30. P. Benner, A. Seidel-Morgenstern, A. Zuyev, *Periodic switching strategies for an isoperimetric control problem with application to nonlinear chemical reactions*, Appl. Math. Model., **69**, 287–300 (2019).
31. Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, Наука, Москва (1965).
32. С. М. Чуйко, *Про наближене розв'язування крайових задач методом найменших квадратів*, Нелін. коливання, **11**, № 4, 554–573 (2008); **English translation**: Nonlinear Oscillations (N.Y.), **11**, № 4, 585–604 (2008).
33. S. M. Chuiko, *Nonlinear matrix differential-algebraic boundary value problem*, Lobachevskii J. Math., **38**, № 2, 236–244 (2017).
34. A. Samoilenko, A. Boichuk, S. Chuiko, *Hybrid difference-differential boundary-value problem*, Miskolc Math. Notes, **18**, № 2, 1015–1031 (2017).

Одержано 08.02.23