DOI: 10.37863/nosc.v26i2.1433

УДК 517.9

ЗВ'ЯЗОК МІЖ ОБМЕЖЕНИМИ РОЗВ'ЯЗКАМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ І ДИНАМІЧНИХ РІВНЯНЬ НА ЧАСОВИХ ШКАЛАХ

Вікторія Цань, Юрій Перестюк

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
вул. Володимирська, 64/13, Київ, 01601, Україна
e-mail: viktoriia.tsan@knu.ua,
perestyuk@gmail.com

Вікторія Могильова

Національний технічий університет України
"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"
просп. Перемоги, 37, Київ, 03056, Україна
e-mail: mogylova.viktoria@gmail.com

A system of differential equations of the form $\frac{dx}{dt} = X(t,x)$ and the corresponding system of dynamic equations with delta-derivative are considered. We establish conditions for the existence of bounded solutions of the system of dynamic equations on the time scale $\mathbb{T}_\lambda$ under the condition of the existence of bounded solutions of the original system of differential equations. We derive conditions for the granularity function under which the existence of bounded solutions of differential equations yields the existence of solutions for the corresponding system of dynamic equations.

Розглянуто систему диференціальних рівнянь у формі $\frac{dx}{dt} = X(t,x)$ і відповідну систему динамічних рівнянь із дельта-похідною. Встановлено умови існування обмежених розв'язків системи динамічних рівнянь на часовій шкалі $\mathbb{T}_\lambda$ за умови існування обмежених розв'язків вихідної системи диференціальних рівнянь. Отримано умови на функцію зернистості, за яких із існування обмежених розв'язків диференціальних рівнянь випливає існування таких розв'язків для відповідної системи динамічних рівнянь.

Вступ. Диференціальні (динамічні) рівняння почали розглядати після публікації роботи [1], де автор запровадив поняття Δ-похідної, яка працює як на числовій осі, так і на довільній замкненій підмножині з $\mathbb{R}^1$, зокрема, й на дискретних множинах: $\mathbb{Z}$, ейлерових множинах $\{kh, h > 0\}$, множинах Кантора та канторвалах [2]. Це дозволило з єдиної точки зору розглянути неперервну та дискретну динаміку, що спонукало до вивчення динамічних рівнянь на часових шкалах [3]. У подальшому теорія рівнянь на часових шкалах розвивалась у багатьох напрямках. Було отримано аналоги класичних результатів теорії звичайних диференціальних рівнянь, теорії оптимального керування [4 – 6], стохастичних систем [7] та ін.

Особливе зацікавлення викликає вивчення зв'язку між властивостями розв'язків диференціальних і відповідних їм різницевих рівнянь за умови, що функція зернистості (чи різницевий крок) прямує до нуля. Формально тоді рівняння на шкалі переходить у звичайне диференціальне рівняння і питання зв'язку між властивостями їхніх розв'язків набуває важливого значення.

В роботах [8, 9] вивчався зв'язок між коливністю розв'язків лінійних диференціальних рівнянь другого порядку і їхніх дискретних аналогів, тобто для частинного випадку ейлерових часових шкал.

У роботі [10] подібні й більш загальні результати отримано на довільних часових шкалах. У [11] розглянуто питання зв'язку оптимальних керувань для оптимізаційних задач на часових шкалах і на дійсній осі.

Ця робота продовжує дослідження робіт [9, 12, 13] про зв'язок між глобальними обмеженими розв'язками звичайних і динамічних диференціальних рівнянь і розвиває та узагальнює їхні результати у кількох напрямках.

По-перше, на відміну від [9, 12], де розглянуто лише дискретну ейлерову шкалу, результати цієї статті отримано для загального випадку.

По-друге, на відміну від [13] у цій роботі отримано явну оцінку малості функції зернистості (кроку), яка гарантує збереження глобальних обмежених розв'язків при переході від диференціальних до динамічних рівнянь і навпаки.

Статтю побудовано таким чином. У вступі зроблено огляд літератури по темі дослідження та дано попередню постановку задачі. У п. 2 наведено основні необхідні результати з теорії часових шкал, а також надано строгу постановку задачі та деякі допоміжні твердження. Формулювання та доведення основних результатів наведено в п. 3. У п. 4 подано ілюстративний приклад отриманих результатів.

2. Постановка задачі. Довільна непорожня замкнута підмножина дійсної осі називається *часовою шкалою* $\mathbb{T}$. Для довільної підмножини дійсної осі $A \subset \mathbb{R}$ відповідна підмножина часової шкали визначається як $A_{\mathbb{T}} = A \cap \mathbb{T}$.

Для кожної точки t часової шкали $\mathbb{T}_\lambda$ визначають [3] три функції, що характеризують шкалу. *Оператор стрибка вперед* $\sigma\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ такий, що $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} | s > t\}$; *оператор стрибка назад* $\rho\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, який визначають як $\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} | s < t\}$, і *функція зернистості* $\mu\colon \mathbb{T} \to [0, \infty)$ така, що $\mu(t) = \sigma(t) - t$.

Згідно з властивостями шкали у точках $t \in \mathbb{T}$ точки шкали поділяють на *ліво-щільні* (LD), якщо $\rho(t) = t$; *ліво-розсіяні* (LS), якщо $\rho(t) < t$; *право-щільні* (RD), якщо $\sigma(t) = t$; і *право-розсіяні* (RS), якщо $\sigma(t) > t$. Якщо шкала $\mathbb{T}$ має право-розсіяний максимум M, то визначено $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} \setminus M$; інакше покладаємо $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$.

Функцію $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^d$ називають Δ*-диференційовною* при $t \in \mathbb{T}^k$, якщо границя

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t}$$

існує в $\mathbb{R}^d$. Тоді відповідне значення $f^{\Delta}(t)$ називають Δ*-похідною* у точці t.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x), \tag{1}$$

де $x \in D,\ D$ — область у просторі $\mathbb{R}^n$, і відповідну їй систему динамічних рівнянь

$$x_\lambda^{\Delta} = X(t, x_\lambda), \tag{2}$$

де $t \in \mathbb{T}_\lambda,\ x_\lambda\colon \mathbb{T}_\lambda \to \mathbb{R}^d$, і $x_\lambda^\Delta(t)$ — дельта-похідна функції $x_\lambda(t)$ на $\mathbb{T}_\lambda$. Припустимо, що $\inf \mathbb{T}_\lambda = -\infty,\ \sup \mathbb{T}_\lambda = \infty,\ \lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}$, і $\lambda = 0$ гранична точка множини Λ, причому для всіх $\lambda \in \Lambda$ точка $t = 0$ належить $\mathbb{T}_\lambda$. Також припустимо, що функція $X(t,x)$ неперервно диференційовна та обмежена разом зі своїми частинними похідними, тобто $\exists C > 0$ таке, що

$$|X(t,x)| + \left|\frac{\partial X(t,x)}{\partial t}\right| + \left\|\frac{\partial X(t,x)}{\partial x}\right\| \le C \tag{3}$$

при $t \in \mathbb{T}_\lambda,\ x \in D$, де $\dfrac{\partial X}{\partial x}$ — відповідна матриця Якобі.

Визначимо, що $\mu_\lambda := \sup_{t\in\mathbb{T}_\lambda} \mu_\lambda(t)$, де $\mu_\lambda(t)\colon \mathbb{T}_\lambda \to [0,\infty)$ — функція зернистості. Причому, якщо $\mu_\lambda \to 0$ при $\lambda \to 0$, то $\mathbb{T}_\lambda$ збігається з неперервною шкалою часу $\mathbb{T}_0 = \mathbb{R}$, а система (2) переходить у систему (1). Тому природно сподіватися, що за певних умов існування обмеженого на осі розв'язку рівняння (1) випливає існування обмеженого розв'язку у рівняння (2) на часовій шкалі $\mathbb{T}_\lambda$.

Для доведення основного результату знадобиться лема про оцінку близькості розв'язків задачі Коші для системи диференціальних рівнянь і відповідної системи динамічних рівнянь на часових шкалах із однаковими початковими умовами.

Припустимо, що $t_0 \in \mathbb{T}_\lambda,\ t_0 + T \in \mathbb{T}_\lambda,\ x(t)$ і $x_\lambda(t)$ — розв'язки (1) і (2) на $[t_0, t_0+T]$ і на $[t_0, t_0+T]_{\mathbb{T}_\lambda}$ відповідно та $x(t_0) = x_0,\ x_\lambda(t_0) = x_{\lambda 0}$.

Лема 2.1 [13]. *Якщо x_λ і $x(t)$ — розв'язки задачі Коші для (2) і (1) такі, що $x_0 = x_{\lambda 0}$, $x_0 \in D$, то виконується нерівність*

$$|x(t) - x_\lambda(t)| \le \mu(\lambda) K(T), \tag{4}$$

де $\mu(\lambda) = \sup_{t\in[t_0,t_0+T]_{\mathbb{T}_\lambda}} \mu_\lambda(t)$ для $t \in [t_0, t_0+T]_{\mathbb{T}_\lambda},\ K(T) = e^{C(T+1)}\left(C + \dfrac{C^2T}{4}\right) + 3C$ — стала.

Лема 2.2 [13]. *При наведених вище умовах розв'язок системи (2) x_λ неперервно залежить від початкових даних до моменту виходу його з області D.*

Також визначимо поняття екпоненціальної стійкості розв'язків динамічних рівнянь на часових шкалах подібно до означень екпоненціальної стійкості розв'язків диференціальних рівнянь [14].

Означення 2.1. *Розв'язок $x_\lambda(t)$ системи (2), визначений на $\mathbb{T}_\lambda$, будемо називати експоненційно стійким рівномірно за t_0, якщо існують $\delta > 0,\ N > 0$ і $\alpha > 0$ такі, що для будь-якого розв'язку $y_\lambda(t)$ системи (2) такого, що*

$$|x_\lambda(t_0) - y_\lambda(t_0)| < \delta,$$

при $t \ge t_0$ має місце нерівність

$$|x_\lambda(t) - y_\lambda(t)| \le N e^{-\alpha(t-t_0)} |x_\lambda(t_0) - y_\lambda(t_0)|,$$

де сталі $\delta,\ N$ і α не залежать від t_0.

3. Основні результати.

Теорема 3.1. *Нехай виконуються такі умови:*

1) *Функцію $X(t,x)$ визначено і вона задовольняє умову (3) та неперервно диференційована при $t \in \mathbb{R},\ x \in D$, де D — область із простору $\mathbb{R}^d$;*

2) *існує таке* $\mu_0 > 0$, *що система (2) має обмежений на* $\mathbb{T}_{\lambda_0}$, *рівномірно за* t_0 *експоненційно стійкий розв'язок* $x_{\lambda_0}(t)$, *що лежить у області* D *разом із деяким своїм* ρ*-околом.*

Тоді якщо виконуються нерівності

$$\mu_0\left(e^{C\left(\frac{\ln 4N}{\alpha}+\mu_0+1\right)}\left(C+\frac{C^2\left(\frac{\ln 4N}{\alpha}+\mu_0\right)}{4}\right)+3C\right)\le\frac{\delta}{8}, \tag{5}$$

$$\mu_0\left(e^{C(\mu_0+1)}\left(C+\frac{C^2\mu_0}{4}\right)+3C\right)\le\frac{\rho}{2}, \tag{6}$$

$$\frac{3N\delta}{2}<\rho, \tag{7}$$

$$\mu_0\le\frac{\rho}{4C}, \tag{8}$$

де сталі δ, N *і* α *визначено в означенні 2.1 і* C *визначено в умові (3), то при кожному* μ_λ *такому, що* $\mu_\lambda < \mu_0$, *система (2) має обмежений на* $\mathbb{T}_\lambda$ *розв'язок.*

Доведення. З умови 2) наведеної теореми випливає, що система (2) при $\mu_\lambda = \mu_0$ має експоненційно стійкий обмежений рівномірно по t_0 розв'язок x_{λ_0}, який лежить у області D разом зі своїм ρ-околом. Отже, існує стала $C_0 > 0$ така, що

$$|x_{\lambda_0}(t)|\le C_0 \tag{9}$$

для довільного $t\in\mathbb{T}_{\lambda_0}$.

Нехай на часовій шкалі $\mathbb{T}_{\lambda_0}$ з функцією зернистості $\mu_0(t)$, $\mu_0 := \sup_{t\in\mathbb{T}_{\lambda_0}}\mu_0(t)$, t^* — найменша точка така, що $t^*\ge\frac{\ln 4N}{\alpha}$, тобто $t^*=\inf\left\{t\in\mathbb{T}_{\lambda_0}\;\middle|\;t\ge\frac{\ln 4N}{\alpha}\right\}$. Очевидно, що $t^*\le\frac{\ln 4N}{\alpha}+\mu_0$.

Оберемо $0<\mu_\lambda<\mu_0$ і зафіксуємо його. Через x_λ позначимо розв'язки системи (2) на відповідній часовій шкалі $\mathbb{T}_\lambda$.

Розглянемо точки $t\in[0,t^*]_{\mathbb{T}_\lambda}$. Тоді для кожної t можна вказати таку найменшу точку t_{λ_0} часової шкали $\mathbb{T}_{\lambda_0}$, що

$$0\le t_{\lambda_0}-t\le\mu_0. \tag{10}$$

Нехай x_λ — розв'язок системи (2) такий, що $x_\lambda(0)=x_{\lambda_0}(0)$. Позначимо через $x(t)$ розв'язок системи (1) із початковими даними $x(0)=x_{\lambda_0}(0)$.

Покажемо, що його можна продовжити на інтервал $\left[0,t^*\right]$. Дійсно, з теореми Пікара випливає, що цей розв'язок можна продовжити вправо на інтервал, не менший, ніж $\frac{\rho}{C}$. Звідси згідно з (8) розв'язок $x(t)$ визначено у точці $t=\mu_0\le\frac{\rho}{4C}<\frac{\rho}{C}$.

Тоді за лемою 2.1 і умовою (6) у цій точці виконується нерівність

$$|x(\mu_0)-x_{\lambda_0}(\mu_0(0))|\le\mu_0\left(e^{C(\mu_0+1)}\left(C+\frac{C^2\mu_0}{4}\right)+3C\right)\le\frac{\rho}{2}.$$

Отже, оскільки за умовою теореми $x_{\lambda 0}$ лежить в області D разом зі своїм ρ-околом, то значення $x(\mu_0)$ лежить в області D разом із $\frac{\rho}{2}$-околом. Тому розв'язок $x(t)$ продовжується вправо від точки μ_0 на інтервал не менший, ніж $\frac{\rho}{2C}$. Таким чином, він визначений у точці $2\mu_0$; аналогічно з попереднім завдяки лемі 2.1 та умові (6) виконується нерівність

$$|x(2\mu_0) - x_{\lambda_0}(\mu_0(\mu_0(0)))| \le \frac{\rho}{2}.$$

Повторюючи цей процес, переконуємося, що розв'язок $x(t)$ продовжується на весь інтервал $\left[0, t^*\right]$ і лежить в області D разом із $\frac{\rho}{2}$-околом.

Покажемо, що розв'язок x_λ системи (2) визначений при всіх t часової шкали $\mathbb{T}_\lambda$, $t \le t^*$, і лежить в області D. Дійсно, з теореми про локальне існування та єдиність [3, с. 322] випливає, що розв'язок можна продовжити на інтервал, не менший, ніж $\frac{\rho}{C}$. Звідси згідно з (8) і тим, що $\mu_\lambda < \mu_0$, розв'язок x_λ визначено в $t = \mu_\lambda(0) < \frac{\rho}{C}$.

Тоді за лемою 2.1 та умовою (6) у цій точці виконується нерівність

$$|x_\lambda(\mu_\lambda(0)) - x(\mu_\lambda)| \le \mu_\lambda \left(e^{C(\mu_\lambda + 1)} \left(C + \frac{C^2 \mu_\lambda}{4} \right) + 3C \right) \le \frac{\rho}{2}.$$

Отже, значення $x_\lambda(\mu_\lambda(0))$ лежить в області D разом із $\frac{\rho}{2}$-околом. Тому розв'язок $x_\lambda(t)$ продовжується вправо від точки $\mu_\lambda(0)$ на інтервал не менший, ніж $\frac{\rho}{2C}$. Таким чином, він визначений у точці $\mu_\lambda(\mu_\lambda(0))$; аналогічно з попереднім згідно з лемою 2.1 та умовою (6) виконується нерівність

$$|x_\lambda(\mu_\lambda(\mu_\lambda(0))) - x(2\mu_\lambda)| \le \frac{\rho}{2}.$$

Повторюючи цей процес, переконуємося, що розв'язок $x_\lambda(t)$ продовжується на весь інтервал $\left[0, t^*\right]_{\mathbb{T}_\lambda}$ і лежить в області D разом із $\frac{\rho}{2}$-околом.

Розглянемо тепер різницю $x_\lambda(t) - x_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})$, де для кожної точки $t \in \left[0, t^*\right]_{\mathbb{T}_\lambda}$ значення $t_{\lambda_0} \in \mathbb{T}_{\lambda_0}$ вибрано з умови (10). Тоді матимемо

$$|x_\lambda(t) - x_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})| \le |x_\lambda(t) - x(t)| + |x(t) - x(t_{\lambda_0})| + |x(t_{\lambda_0}) - x_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})|. \tag{11}$$

З леми 2.1 та нерівності (5) отримаємо, що

$$|x_\lambda(t) - x(t)| \le \frac{\delta}{8} \qquad \text{і} \qquad |x_{\lambda_0}(t_{\lambda_0}) - x(t_{\lambda_0})| \le \frac{\delta}{8}. \tag{12}$$

Для різниці $x(t) - x(t_{\lambda_0})$ одержимо оцінку

$$|x(t) - x(t_{\lambda_0})| \le \int\limits_t^{t_{\lambda_0}} |X(s, x(s))|\, ds \le C\mu_0 < \frac{\delta}{8} \tag{13}$$

згідно з нерівностями (5) і (10).

Таким чином, з (11) – (13) випливають нерівності

$$|x_\lambda(t) - x_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})| < \frac{3\delta}{8} \tag{14}$$

і

$$|x_\lambda(t)| \le |x_\lambda(t) - x_{\lambda_0}(t_{\lambda_0}) + x_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})| \le \frac{3\delta}{8} + |x_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})| \le \frac{3\delta}{8} + C_0, \tag{15}$$

справедливі при всіх t часової шкали $\mathbb{T}_\lambda$ таких, що $0 \le t \le t^*$, де $t_{\lambda_0} \in \mathbb{T}_{\lambda_0}$ вибрані з умови (10).

Позначимо через t_1 найбільшу точку шкали $\mathbb{T}_\lambda$, що не перевищує t^*.

Розглянемо тепер інтервал $\big[t^*, 2t^*\big]$. Дослідимо поведінку розв'язку x_λ при $t \in \mathbb{T}_\lambda$ таких, що $t_1 \le t \le 2t^*$.

Для цього розглянемо два розв'язки $x(t)$ і $y(t)$ системи (1) і розв'язок y_{λ_0} системи (2) на часовій шкалі $\mathbb{T}_{\lambda_0}$. Причому початкові умови $x_\lambda,\ x,\ y$ і y_{λ_0} такі, що

$$x(t_1) = x_\lambda(t_1) = y(t^*) = y_{\lambda_0}(t^*). \tag{16}$$

Покажемо, що ці розв'язки визначені на відрізку $\big[t^*, 2t^*\big]$. Зазначимо, що згідно з (14) з урахуванням (16) маємо

$$|y_{\lambda_0}(t^*) - x_{\lambda_0}(t^*)| < \frac{3\delta}{8}, \qquad |x(t_1) - x_{\lambda_0}(t^*)| < \frac{3\delta}{8}, \qquad |y(t^*) - x_{\lambda_0}(t^*)| < \frac{3\delta}{8}. \tag{17}$$

Тоді для розв'язку динамічного рівняння $y_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})$ з урахувуанням умови 2 теореми 3.1 та першої з нерівностей (17) отримаємо

$$|y_{\lambda_0}(t_{\lambda_0}) - x_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})| \le N\,\frac{3\delta}{8} < \frac{\rho}{4} \quad \text{при} \quad t_{\lambda_0} \ge t^*.$$

Отже, y_{λ_0} визначений для всіх $t_{\lambda_0} \ge t^*$ і лежить в області D разом зі своїм $\dfrac{\rho}{4}$-околом.

Розглянемо тепер розв'язок $y(t)$ рівняння (1) такий, що

$$y(t^*) = x_\lambda(t_1).$$

З третьої нерівності (17) і (7) випливає, що значення $y(t^*)$ лежить в області D принаймні зі своїм $\dfrac{\rho}{4}$-околом.

Таким чином, розв'язок $y(t)$ можна продовжити вправо на інтервал довжини не меншої, ніж $\dfrac{\rho}{4C}$, що згідно з нерівністю (8) означає його продовжуваність вправо на крок μ_0.

Тоді за лемою 2.1 у цій точці виконується нерівність

$$|y(t^* + \mu_0) - y_{\lambda_0}(t^* + \mu_0(t^*))| \le \frac{\rho}{2}.$$

Отже, значення $y\big(t^* + \mu_0\big)$ належить області D разом зі своїм $\dfrac{\rho}{2}$-околом. Далі, міркуючи подібним чином, можна переконатися, що $y(t)$ продовжується на весь інтервал $\big[t^*, 2t^*\big]$.

Нарешті розглянемо розв'язок $x(t)$ системи (1) такий, що $x(t_1) = x_\lambda(t_1)$. Очевидно, він продовжується до точки t^*. Маємо

$$x(t^*) = x(t_1) + \int\limits_{t_1}^{t^*} X(s, x(s))\,ds,$$

звідки з урахуванням (7)

$$|x(t^*) - x_{\lambda_0}(t^*)| \leq |x(t_1) - x_{\lambda_0}(t^*)| + C\mu_0 \leq \frac{3\delta}{8} + C\mu_0 \leq \frac{\delta}{2} \leq \frac{\rho}{3N} \leq \frac{\rho}{3}. \tag{18}$$

Отже, $x(t^*)$ лежить в області D із щонайменше своїм $\frac{\rho}{3}$-околом і продовжується ще на крок μ_0.

Розглянемо z_{λ_0} — розв'язок системи (2) на часовій шкалі $\mathbb{T}_{\lambda_0}$, що визначена функцією зернистості μ_0, з початковими даними $z_{\lambda_0}(t^*) = x(t^*)$.

Згідно з експоненціальною стійкістю, враховуючи (18) і (7), маємо

$$|z_{\lambda_0}(t_{\lambda_0}) - x_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})| \leq \frac{N\delta}{2} < \frac{\rho}{3} \quad \text{при} \quad t_{\lambda_0} \geq t^*.$$

Відповідно z_{λ_0} лежить в області D разом зі своїм $\frac{2\rho}{3}$-околом.

З леми 2.1 та умови (5) у точці $t^* + \mu_0$ одержуємо

$$|x(t^* + \mu_0) - z_{\lambda_0}(t^* + \mu_0(t^*))| \leq \frac{\delta}{8} \leq \frac{\rho}{12}. \tag{19}$$

Таким чином, $x(t^* + \mu_0)$ належить області D разом зі своїм $\frac{7\rho}{12}$-околом. Отже, враховуючи (20), будемо мати, що $x(t)$ продовжується на інтервал $\left[t^*, 2t^*\right]$ і лежить на ньому разом зі своїм $\frac{7\rho}{12}$-околом.

Покажемо, що розв'язок x_λ системи (2) визначений при всіх t часової шкали $\mathbb{T}_\lambda$, $t \leq 2t^*$, з початковими умовами (16) і лежить в області D.

Розглянемо z — розв'язок системи (1) з початковими даними $z(t_1) = x(t_1)$.

Згідно з експоненціальною стійкістю, враховуючи (18) і (7), отримуємо

$$|z(t_{\lambda_0}) - x(t_{\lambda_0})| \leq \frac{N\delta}{2} < \frac{\rho}{3} \quad \text{при} \quad t_{\lambda_0} \geq t^*.$$

Відповідно z_{λ_0} лежить в області D разом зі своїм $\frac{2\rho}{3}$-околом. З леми 2.1 та умови (5) у точці $t^* + \mu_0$ маємо

$$|x(t^* + \mu_0) - z_{\lambda_0}(t^* + \mu_0(t^*))| \leq \frac{\delta}{8} \leq \frac{\rho}{12}. \tag{20}$$

Таким чином, $x\big(t^* + \mu_0\big)$ належить області D разом зі своїм $\frac{7\rho}{12}$-околом. Отже, враховуючи (20), одержуємо, що $x(t)$ продовжується на інтервал $\left[t^*, 2t^*\right]$ і лежить на ньому разом зі своїм $\frac{7\rho}{12}$-околом.

Тоді з нерівностей (4) і (5) випливає, що розв'язок x_λ визначений при всіх t часової шкали $\mathbb{T}_\lambda$, $t \leq 2t^*$ і лежить в області D.

Далі, для заданого значення t такого, що $t_1 \leq t \leq 2t^*$, підберемо таке t_{λ_0}, щоб виконувалася нерівність (10). Оцінимо різницю між $x_\lambda(t)$ і $x_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})$ для кожного такого t. Маємо

$$|x_\lambda(t) - x_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})| \leq |y_{\lambda_0}(t_{\lambda_0}) - x_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})| + |x_\lambda(t) - y_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})|. \tag{21}$$

Із експоненціальної стійкості розв'язку x_{λ_0} випливає, що

$$|y_{\lambda_0}(t_{\lambda_0}) - x_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})| \leq \frac{3N\delta}{8} \leq \frac{\rho}{4} \tag{22}$$

при $t_{\lambda_0} \in \big[\sigma_{\lambda_0}(t^*), \rho_{\lambda_0}\big(2t^*\big)\big]_{\mathbb{T}_{\lambda_0}}$, а при $t_{\lambda_0} = 2t^*$

$$|y_{\lambda_0}(2t^*) - x_{\lambda_0}(2t^*)| < \frac{\delta}{4}. \tag{23}$$

Оцінимо другий доданок (21):

$$\begin{aligned} |x_\lambda(t) - y_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})| &\leq |x_\lambda(t) - x(t)| + |x(t) - x(t_{\lambda_0})| + |x(t_{\lambda_0}) - y_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})| \\ &\leq \frac{\delta}{8} + \frac{\delta}{8} + |x(t) - y_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})|. \end{aligned} \tag{24}$$

Тепер оцінимо останній доданок рівності (24). Маємо

$$|x(t) - y(t_{\lambda_0})| \leq |x(t) - x(t_{\lambda_0})| + |x(t_{\lambda_0}) - y(t_{\lambda_0})|. \tag{25}$$

Але

$$|x(t) - x(t_{\lambda_0})| = \int\limits_t^{t_{\lambda_0}} X(s, x(s))\, ds \leq C\mu_0 < \frac{\delta}{8} \tag{26}$$

Залишається оцінити другий доданок у (25). З рівностей

$$y(t_{\lambda_0}) = y(t^*) + \int\limits_{t^*}^{t_{\lambda_0}} X(s, y(s))\, ds,$$

і

$$x(t_{\lambda_0}) = x(t^*) + \int\limits_{t^*}^{t_{\lambda_0}} X(s, x(s))\, ds,$$

отримуємо

$$|x(t_{\lambda_0}) - y(t_{\lambda_0})| \leq |x(t^*) - y(t^*)| + \int\limits_{t^*}^{t_{\lambda_0}} C|X(s) - Y(s))|\, ds.$$

Звідси за нерівністю Гроноулла одержуємо

$$|x(t_{\lambda_0}) - y(t_{\lambda_0})| \leq |x(t^*) - y(t^*)| e^{C|t_{\lambda_0} - t^*|}.$$

З іншого боку, згідно з рівністю $x(t^*) = x(t_1) + \displaystyle\int_{t_1}^{t^*} X(s, x(s))\, ds$ і (15) маємо, що $|x(t^*) - y(t^*)| = |x(t^*) - x(t_1)| \leq C\mu_0$. Тому

$$|y(t_{\lambda_0}) - x(t_{\lambda_0})| \leq C\mu_0 e^{Ct^*} \leq \frac{\delta}{8}. \tag{27}$$

Відповідно з (25), (26) та (27) випливає

$$|x(t) - x(t_{\lambda_0})| \leq \frac{\delta}{4}.$$

Тоді з (24) отримуємо

$$|x_\lambda(t) - y_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})| \leq \frac{\delta}{2}. \tag{28}$$

Таким чином, маємо

$$|x_\lambda(t)| \leq |x_\lambda(t) - y_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})| + |y_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})| \leq \frac{\delta}{2} + |y_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})|.$$

Але згідно з (22) і (9)

$$|y_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})| \leq |x_{\lambda_0}(t_{\lambda_0}) - y_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})| + |x_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})| \leq \frac{3\delta}{8} + C_0,$$

звідки випливає нерівність

$$|x_\lambda(t)| \leq \frac{\delta}{2} + \frac{3\delta}{8} + C_0, \tag{29}$$

яка виконується для всіх t таких, що $t_1 \leq t \leq 2t^*$.

Позначимо через t_2 найбільшу точку часової шкали $\mathbb{T}_\lambda$, що не перевищує $2t^*$.

Тоді з нерівностей (21), (23) і (28) отримуємо

$$|x_\lambda(t_2) - x_{\lambda_0}(2t^*)| \leq \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{2} = \frac{3\delta}{4}.$$

Таким чином, розв'язок x_λ задовольняє нерівність (29) при всіх t часової шкали $\mathbb{T}_\lambda$ таких, що $t_1 \leq t \leq t_2$, а у точці t_2 попадає в $\dfrac{3\delta}{4}$-окіл точки $x_{\lambda_0}\big(2t^*\big)$.

Аналогічними міркуваннями для таких t одержимо нерівність $t_2 \leq t \leq 3t^*$. У результаті отримаємо

$$|x_\lambda(t)| \leq \frac{\delta}{2} + \frac{3N\delta}{2} + C_0.$$

Якщо позначити через t_3 найбільшу точку часової шкали $\mathbb{T}_\lambda$, що не перевищує $3t^*$, то маємо $\big|x_\lambda(t_3) - x_{\lambda_0}\big(3t^*\big)\big| < \dfrac{3\delta}{4}$.

Таким чином, продовжуючи далі, отримаємо, що розв'язок $x_\lambda(t)$ визначений для всіх невід'ємних t і обмежений на додатній півосі часової шкали $\mathbb{T}_\lambda$.

Тепер побудуємо розв'язок рівняння (2), обмежений на всій осі часової шкали $\mathbb{T}_\lambda$.

Нехай $x_\lambda(t, t^*)$ — такий розв'язок динамічного рівняння (2), що починається у точці t^* часової шкали $\mathbb{T}_\lambda$, $t \geq t^*$, причому $x_\lambda\big(t^*, t^*\big) = x_\lambda(t^*)$. Для кожної t^* виберемо найменшу невід'ємну точку $\tilde{t}_{\lambda_0}$ часової шкали $\mathbb{T}_{\lambda_0}$ таку, що

$$t^* \leq \tilde{t}_{\lambda_0} \leq t^* + \mu_0.$$

Тепер розглянемо розв'язок $x_\lambda(t, t^*)$ такий, що

$$\big|x_\lambda(t^*, t^*) - x_{\lambda_0}\big(\tilde{t}_{\lambda_0}\big)\big| \leq \frac{3\delta}{4},$$

де x_{λ_0} — обмежений розв'язок рівняння (2) на часовій шкалі $\mathbb{T}_{\lambda_0}$ з функцією зернистості $\mu_\lambda = \mu_0$, що фігурує в умовах теореми.

Із доведеного вище випливає, що всі подібні розв'язки $x_\lambda(t, t^*)$ мають такі властивості:

1°) $x_\lambda(t, t^*)$ визначені при $t \geq t^*$;

2°) при $t \geq t^*$ задовольняють нерівність

$$|x_\lambda(t, t^*)| \leq \frac{\delta}{2} + \frac{3N\delta}{4} + C_0;$$

3°)

$$\left|x_\lambda(t_1, t^*) - x_{\lambda_0}\big(\tilde{t}_{\lambda_0} + t^*\big)\right| \leq \frac{3\delta}{4}, \tag{30}$$

де t_1 — найбільше t таке, що $(t_1 + t^*) \leq \tilde{t}_{\lambda_0} + t^*$, а t^* вибране з умови

$$t^* \geq \frac{\ln 4N}{\alpha}.$$

Розіб'ємо ліву піввісь часової шкали $\mathbb{T}_\lambda$ на інтервали вигляду $\big[-nt^*, -(n+1)t^*\big]_{\mathbb{T}_\lambda}$, де $n \to -\infty$. Для кожної точки $-nt^*$ оберемо найбільше t_n часової шкали $\mathbb{T}_\lambda$ таке, що

$$t_n \leq -nt^* \leq t_n + \mu_0.$$

Точку t_0 обираємо аналогічним чином.

Тепер розглянемо множину розв'язків $x_\lambda(t, t_n)$ рівняння (2), початкові умови яких задовольняють нерівність

$$\left|x_\lambda(t_n, t_n) - x_{\lambda_0}(-nt^*)\right| \leq \frac{3\delta}{4}.$$

Очевидно, що ці розв'язки задовольняють умови 1°) – 3°).

Нехай S_n — множина значень цих розв'язків у точці t_1. За своєю побудовою кожна множина S_n є образом кулі радіуса $\dfrac{3\delta}{4}$ з центром у точці $x_{\lambda_0}\big(-nt^*\big)$, породженим відображенням $x_\lambda(t_n, t_n)$. Згідно з лемою (2.2) кожна з множин S_n — компакт. Отже, множини задовольняють умови:

1) $S_n \neq \varnothing$ для довільного $n \in \mathbb{N}$;

2) S_n замкнена для довільного $n \in \mathbb{N}$;

3) $S_n \subset S_{n-1}$ за побудовою S_n і згідно з умовами 1°) – 3°).

Визначимо $z = \bigcap_n S_n$ і розглянемо розв'язок $x_\lambda(t, t_1)$ рівняння (2) з початковою умовою $x_\lambda(t_1, t_1) = z$. За побудовою цей розв'язок можна продовжити вліво до точок t_n, у яких він належить $\dfrac{3\delta}{4}$-околу значення $x_{\lambda_0}(t_n)$ для кожного натурального n.

Останнє означає, що цей розв'язок визначений при всіх t, що задовольняють нерівність (30). Отже, він обмежений. Це доводить, що система (2) має обмежений розв'язок, визначений на $\mathbb{T}_\lambda$.

Відзначимо, що наведені вище міркування для системи (2) з початковими даними у точці $t_0 = 0$ можна провести для цієї системи з початковими даними у будь-якій фіксованій точці t_0. При цьому всі отримані оцінки не залежатимуть від t_0, що випливає з умови 2) цієї теореми і рівномірної по t_0 оцінки (4).

Отже, провівши такі міркування для кожного $t_0 \in [0, \mu_\lambda]$, можна побудувати розв'язок (2), обмежений на $\mathbb{T}_\lambda$.

Розглянемо тепер умови існування обмеженого на $\mathbb{T}_\lambda$ розв'язку системи (2) при наявності такого розв'язку у відповідної системи (1).

Теорема 3.2. *Нехай виконуються такі умови:*

1) *функція $X(t,x)$ визначена та неперервно диференційовна при $t \in \mathbb{R},\ x \in D$, де D — область у $\mathbb{R}^d$, та задовольняє умову (3);*

2) *система (1) має обмежений на $\mathbb{R}$, рівномірно по $t_0 \in \mathbb{R}$ експоненційно стійкий розв'язок $x(t)$, який лежить у D разом із деяким ρ-околом, тобто існують $\delta > 0,\ N > 0$ і $\alpha > 0$ незалежні від t_0 такі, що для будь-якого розв'язку $y(t)$ системи (1) такого, що*

$$|x(t_0) - y(t_0)| < \delta, \tag{31}$$

при $t \geq t_0$ виконується нерівність

$$|x(t) - y(t)| \leq Ne^{-\alpha(t-t_0)}|x(t_0) - y(t_0)|.$$

Тоді, якщо виконуються нерівності

$$\mu_0\left(e^{C\left(\frac{\ln 4N}{\alpha}+\mu_0+1\right)}\left(C + \frac{C^2\left(\dfrac{\ln 4N}{\alpha}+\mu_0\right)}{4}\right) + 3C\right) \leq \frac{\delta}{8}, \tag{32}$$

$$\mu_0\left(e^{C(\mu_0+1)}\left(C + \frac{C^2\mu_0}{4}\right) + 3C\right) \leq \frac{\rho}{2}, \tag{33}$$

$$\frac{3N\delta}{2} < \rho,$$

$$\mu_0 \leq \frac{\rho}{4C}, \tag{34}$$

де C визначено в умові (3), то при кожному μ_λ такому, що $\mu_\lambda < \mu_0$, система (2) має обмежений на $\mathbb{T}_\lambda$ розв'язок $x_\lambda(t)$. При цьому справедливе співвідношення

$$\sup_{t\in\mathbb{T}_\lambda}|x_\lambda(t) - x(t)| \to 0, \quad \mu_\lambda \to 0. \tag{35}$$

Доведення. З умови 2) цієї теореми випливає, що система (1) має експоненційно стійкий обмежений рівномірно по t_0 розв'язок x, який лежить в області D разом зі своїм ρ-околом. Отже, існує стала $C_1 > 0$

$$|x(t)| \leq C_1 \tag{36}$$

для довільного $t \in \mathbb{R}$.

Оберемо $0 < \mu_\lambda < \mu_0$ і зафіксуємо його. Через x_λ позначимо розв'язок системи (2) на відповідній часовій шкалі $\mathbb{T}_\lambda$ такий, що $x_\lambda(0) = x(0)$.

Нехай точка t^* така, що $t^* = \dfrac{\ln 4N}{\alpha}$. Позначимо через t_1 найменшу точку шкали $\mathbb{T}_\lambda$, що більшає за t^*. Тоді $t_1 < \dfrac{\ln 4N}{\alpha} + \mu_\lambda$.

Покажемо, що розв'язок x_λ системи (2) можна продовжити на інтервал $[0, t_1]_{\mathbb{T}_\lambda}$. Дійсно, з теореми про локальне існування та єдиність [3, с. 322] випливає, що розв'язок можна продовжити на інтервал, не менший за $\dfrac{\rho}{C}$.

Таким чином, згідно з (34) і тим, що $\mu_\lambda < \mu_0$, розв'язок $x_\lambda(t)$ визначено в $t = \mu_\lambda(0) < \dfrac{\rho}{4C}$. Тоді з леми 2.1 та умови (33)

$$|x_\lambda(\mu_\lambda(0)) - x(\mu_\lambda)| \le \mu_\lambda\left(e^{C(\mu_\lambda+1)}\left(C + \frac{C^2\mu_\lambda}{4}\right) + 3C\right) \le \frac{\rho}{2}.$$

Отже, оскільки за умовою теореми x лежить в області D разом зі своїм ρ-околом, то значення $x_\lambda(\mu_\lambda(0))$ лежить в області D разом із $\dfrac{\rho}{2}$-околом. Тому розв'язок $x_\lambda(t)$ продовжується вправо від точки $\mu_\lambda(0)$ на інтервал не менший, ніж $\dfrac{\rho}{2C}$. Таким чином, він визначений у точці $\mu_\lambda(\mu_\lambda(0))$; аналогічно з попереднім згідно з лемою 2.1 та умовою (33) виконується нерівність

$$|x_\lambda(\mu_\lambda(\mu_\lambda(0))) - x(2\mu_\lambda)| \le \frac{\rho}{2}.$$

Повторюючи цей процес, переконуємося, що розв'язок $x_\lambda(t)$ продовжується на весь інтервал $[0, t_1]_{\mathbb{T}_\lambda}$ і лежить в області D разом із $\dfrac{\rho}{2}$-околом.

Тепер розглянемо різницю $x_\lambda(t_\lambda) - x(t)$, де для кожної точки t_λ інтервалу $[0, t_1]_{\mathbb{T}_\lambda}$ виконується нерівність

$$0 < t_\lambda - t < \mu_\lambda. \tag{37}$$

Тоді матимемо

$$|x_\lambda(t_\lambda) - x(t)| \le |x_\lambda(t_\lambda) - x(t_\lambda)| + |x(t_\lambda) - x(t)|. \tag{38}$$

Оскільки $t_1 < \dfrac{\ln 4N}{\alpha} + \mu_\lambda$ і $\mu_\lambda < \mu_0$, згідно з (32) і лемою 2.1 виконується

$$\begin{aligned} |x_\lambda(t_\lambda) - x(t_\lambda)| &\le \mu_\lambda\left(e^{C(t^*+1)}\left(C + \frac{C^2 t^*}{4}\right) + 3C\right) \\ &< \mu_0\left(e^{C\left(\frac{\ln 4N}{\alpha}+\mu_0+1\right)}\left(C + \frac{C^2\left(\dfrac{\ln 4N}{\alpha} + \mu_0\right)}{4}\right) + 3C\right) \le \frac{\delta}{8} \quad \text{при} \quad t \in [0, t_1]_{\mathbb{T}_\lambda}. \end{aligned} \tag{39}$$

Для різниці $x(t_\lambda) - x(t)$ завдяки умові (37) маємо оцінку

$$|x(t_\lambda) - x(t)| \le \int\limits_t^{t_\lambda} |X(s, x(s))|\, ds \le C_1\mu_\lambda < \frac{\delta}{8}. \tag{40}$$

Отже, з (38) – (40) одержуємо нерівності

$$|x_\lambda(t_\lambda) - x(t)| \le \frac{\delta}{8} + \frac{\delta}{8} \le \frac{\delta}{4} \tag{41}$$

і

$$|x_\lambda(t_\lambda)| \le |x_\lambda(t_\lambda) - x(t) + x(t)| \le \frac{\delta}{4} + |x(t)| \le \frac{\delta}{4} + C_1,$$

справедливі при всіх t на інтервалі $[0, t_1]_{\mathbb{T}_\lambda}$.

Розглянемо інтервал $\left[t_1, t_1 + t^*\right]$. Позначимо через t_2 найменшу точку шкали $\mathbb{T}_\lambda$, що більше за $t_1 + t^*$. Тоді $t_2 < \dfrac{\ln 4N}{\alpha} + \mu_\lambda$. Дослідимо поведінку розв'язку x_λ при t_λ з часової шкали $\mathbb{T}_\lambda$ таких, що $t_1 \le t_\lambda \le t_2$.

Розглянемо z — розв'язок (1) з початковими даними $z(t_1) = x_\lambda(t_1)$. Тоді з (41) маємо

$$|z(t_1) - x(t^*)| < \frac{\delta}{4}. \tag{42}$$

Оцінимо різницю між $x(t)$ та $x_\lambda(t_\lambda)$:

$$|x_\lambda(t_\lambda) - x(t)| \le |x_\lambda(t_\lambda) - x(t_\lambda)| + |x(t_\lambda) - x(t)|. \tag{43}$$

Проведемо оцінку першого доданка

$$|x_\lambda(t_\lambda) - x(t_\lambda)| \le |x_\lambda(t_\lambda) - z(t_\lambda)| + |z(t_\lambda) - x(t_\lambda)|. \tag{44}$$

З леми 2.1 з урахуванням (32) отримаємо

$$|x_\lambda(t_\lambda) - z(t_\lambda)| \le \frac{\delta}{8} \quad \text{при} \quad t_\lambda \in [t_1, t_2]_{\mathbb{T}_\lambda}.$$

Проведемо оцінку другого доданка нерівності (44). Для цього оцінимо значення різниці $z(t_1)$ і $x(t_1)$ з урахуванням нерівностей (42), (40). Тоді маємо

$$|z(t_1) - x(t_1)| \le |z(t_1) - x(t^*)| + |x(t^*) - x(t_1)| \le \frac{3\delta}{8}.$$

Далі з експоненціальної стійкості випливає

$$|x(t) - z(t)| \le \frac{3N\delta}{8}$$

при $t_1 \le t < t_2$, а при $t = t_2$

$$|x(t_2) - z(t_2)| < \frac{\delta}{4}. \tag{45}$$

Таким чином, з нерівності (44) маємо

$$|x_\lambda(t_\lambda) - x(t_\lambda)| \le \frac{\delta}{8} + \frac{3N\delta}{8}. \tag{46}$$

Для різниці $x(t_\lambda) - x(t)$ зважаючи на умову (37) маємо оцінку

$$|x(t_\lambda) - x(t)| \le \int_t^{t_\lambda} |X(s, x(s))| ds \le C_1\mu_\lambda < \frac{\delta}{8}. \tag{47}$$

З (46) і (47) згідно (43) маємо

$$|x_\lambda(t_\lambda) - x(t)| \le \frac{\delta}{4} + \frac{3N\delta}{8},$$

звідки та з (36) одержуємо

$$|x_\lambda| \le |x_\lambda - x(t)| + |x(t)| \le \frac{\delta}{4} + \frac{3N\delta}{8} + C_1 \tag{48}$$

для всіх t таких, що $t_1 \le t \le t_2$.

Тоді з нерівностей (44) і (45), (47) отримуємо

$$|x_\lambda(t_2) - x(t_1 + t^*)| \le \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} \le \frac{\delta}{2}.$$

Отже, розв'язок x_λ задовольняє нерівність (48) при всіх t часової шкали $\mathbb{T}_\lambda$, а при t_2 потрапляє в $\frac{\delta}{2}$-окіл точки $x\big(t_1 + t^*\big)$.

Міркуючи аналогічно, позначимо через t_3 найменшу точку шкали $\mathbb{T}_\lambda$, що більше за $t_2 + t^*$. Тоді для таких t, що

$$t_2 \le t \le t_3,$$

в результаті одержуємо

$$|x_\lambda(t)| \le \frac{\delta}{4} + \frac{3N\delta}{8} + C_1$$

і

$$|x_\lambda(t_3) - x(t_2 + t^*)| \le \frac{\delta}{2}.$$

Таким чином, продовжуючи далі, отримаємо, що розв'язок $x_\lambda(t)$ визначений для всіх невід'ємних t і обмежений на додатній півосі $\mathbb{T}_\lambda$.

Доведення існування обмеженого на всій $\mathbb{T}_\lambda$ розв'язку z_λ системи (2) з початковими даними у точці $t_0 = 0$ проводиться так само, як в теоремі (3.1).

Для кожного розв'язку z_λ справедлива оцінка

$$|z_\lambda(t) - x(t)| \le \varepsilon \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{T}_\lambda. \tag{49}$$

Тепер оберемо $0 < \varepsilon \le \frac{\rho}{4}$ і $\delta = \delta(\varepsilon) < \varepsilon$ з умови (31). Тоді для всіх μ_λ таких, що задовольняють нерівність (32), буде виконуватися нерівність (49), з якої випливає оцінка (35), де супремум взято по $t \in \mathbb{T}_\lambda$.

Аналогічно до теореми (3.1), всі міркування для системи (2) з початковими даними у точці $t_0 = 0$ можна застосувати й для довільного фіксованого t_0. При цьому всі оцінки не залежатимуть від t_0. Це випливає з умови 2) теореми 3.2 і рівномірності за t_0 оцінки (4).

Провівши для кожного $t_0 \in [0, \mu_\lambda]$ подані вище міркування, завершимо доведення теореми.

Теорема 3.3. *Нехай виконуються такі умови:*

1) *функція $X(t, x)$ задовольняє умови 1) теореми 3.1;*

2) *існує* $\mu_0 > 0$ *таке, що система (2) з початковими даними у точці* $t_0 = 0$ *має обмежений на* $\mathbb{T}_{\lambda_0}$, *рівномірно за* t_0 *експоненціально стійкий розв'язок, який лежить в області* D *разом із деяким своїм* ρ*-околом.*

Тоді, якщо виконуються нерівності (5) – (8), то система (1) має обмежений на $\mathbb{R}$ *розв'язок.*

Доведення. Доведення цієї теореми засноване на міркуваннях, поданих у доведенні теореми 3.1.

Розглянемо основні моменти.

Нехай x_{λ_0} — експоненційно стійкий розв'язок (2) з початковими даними у точці $t_0 = 0$ на часовій шкалі $\mathbb{T}_{\lambda_0}$, який визначений і обмежений на ній. За означенням 2.1 і лемою 2.1, подібно до доведення теореми 3.1, покажемо, що всі розв'язки системи (1), що починаються у точці nt^*, де $n \in \mathbb{Z}$ із $\frac{\delta}{2}$-околу $x_{\lambda_0}\big(nt^*\big)$ лежать у D при $t \in \big[nt^*, (n+1)t^*\big]$. Більш того, вони належать $\frac{\delta}{2}$-околу $x_{\lambda_0}\big((n+1)t^*\big)$. Це означає, що $x(t)$ продовжується на піввісь $\big[nt^*, +\infty\big)$. Крім цього, із зображення

$$x(t) = x\big(nt^*\big) + \int\limits_{nt^*}^{t} X(s, x(s))\, ds$$

отримаємо рівномірну оцінку

$$|x(t)| \leq C_0 + \frac{\delta}{2} + Ct^*$$

для $t \in \big[nt_{k_0,(n+1)}, t^*\big]$, де C_0 визначено в (9).

Тепер розіб'ємо ліву піввісь точками вигляду $-mt^*$, $m \in \mathbb{N}$. Позначимо через S_n множину значень розв'язків (1), що починаються у точці $t = -mt^*$ із $\frac{\delta}{2}$-околу x_{λ_0} при $t = 0$. Аналогічно до теореми 3.1 можна показати, що $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n \neq \varnothing$. Тоді розв'язок $x(t)$ системи (1) такий, що $x(0) = z_0$, де $z_0 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n$ є обмеженим розв'язком (1), визначеним на $\mathbb{R}$.

Теорему 3.3 доведено.

Наведемо приклад, який ілюструє застосування теореми 3.3.

4. Приклад. Розглянемо у ролі (1) систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + arctg(x+y), \\ \dfrac{dy}{dt} = -y + \dfrac{1}{1+x^2+y^2}. \end{cases} \tag{50}$$

Функції

$$f_1(t,x,y) = \operatorname{arctg}(x+y) \qquad \text{і} \qquad f_2(t,x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$$

визначені на $\mathbb{R}^3$, належать класу $C^1\big(\mathbb{R}^3\big)$ і обмежені там разом зі своїми частинними похідними деякою сталою $C > 0$.

Ця система має обмежений на $\mathbb{R}$, рівномірно по t_0 експоненціально стійкий розв'язок.

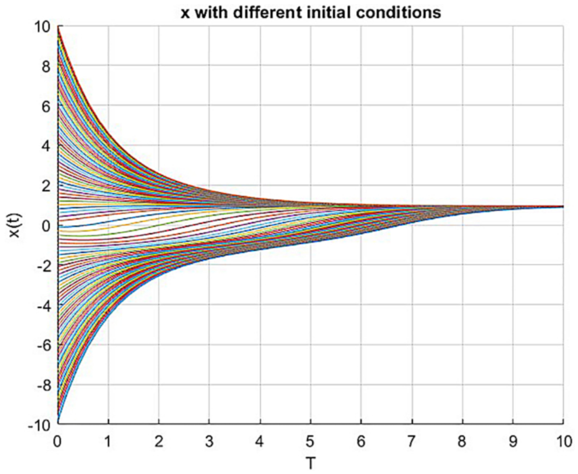

Рис. 1. Графік розв'язків x системи (50) з початковими даними (51).

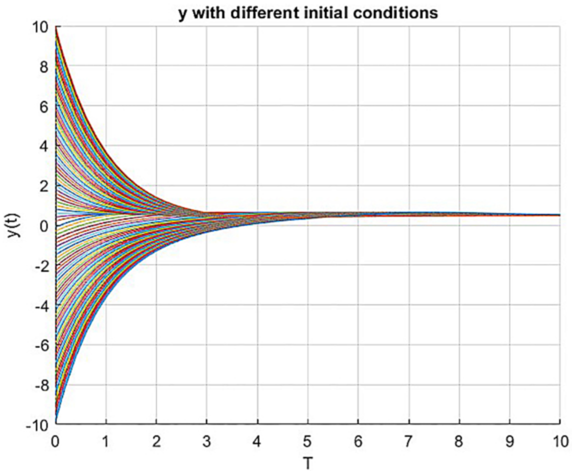

Рис. 2. Графік розв'язків y системи (50) з початковими даними (51).

Побудуємо (див. рис. 1, 2) розв'язки системи (1) з початковими даними

$$\begin{cases} x_n(0) = (-1)^n \dfrac{n}{10}, \\ y_n(0) = (-1)^n \dfrac{n}{10}. \end{cases} \tag{51}$$

Тепер розглянемо розв'язок відповідної системи динамічних рівнянь:

$$\begin{cases} x_\lambda^\Delta(t) = -x_\lambda(t) + \operatorname{arctg}(x_\lambda(t) + y_\lambda(t)), \\ y_\lambda^\Delta(t) = -y_\lambda(t) + \dfrac{1}{1 + x_\lambda^2(t) + y_\lambda^2(t)} \end{cases} \tag{52}$$

на множині часових шкал $\mathbb{T}_\lambda = h\mathbb{Z}$. Зауважимо, що функція зернистості цієї шкали є сталою і $\mu_\lambda = h$.

Тоді система (52) набуває вигляду

$$\begin{cases} x_{k+1}^h = x_k^h - hx_k^h + h \operatorname{arctg}\big(x_k^h + y_k^h\big), \\ y_{k+1}^h = y_k^h - hy_k^h + \dfrac{h}{1 + \big(x_k^h\big)^2 + \big(y_k^h\big)^2}, \end{cases} \tag{53}$$

де $h > 0$ крок різницевого рівняння на $[0, 10]$, $kh = t_k \in \mathbb{T}_\lambda = h\mathbb{Z}$, $x_k^h = x_\lambda(t_k)$.

Розглянемо розв'язки системи (53) для 100 різних пар $\big(x_{k,n}^h(t_0), y_{k,n}^h(t_0)\big)$ початкових даних у точці $t_0 = 0$, що визначаються таким чином:

$$\begin{cases} x_{0,n}^h = x_n(0) = (-1)^n \dfrac{n}{10}, \\ y_{0,n}^h = y_n(0) = (-1)^n \dfrac{n}{10}, \end{cases} \tag{54}$$

де $n = 1, \ldots, 100$, та побудуємо розв'язки $x_{k,n}^h(t)$ і $y_{k,n}^h(t)$ системи (53) з початковими даними (54) на проміжку $[0, 100]$. На графіках виділено розв'язок із початковими даними $\big(x_{0,n}^h, y_{0,n}^h\big) = (0, 0)$.

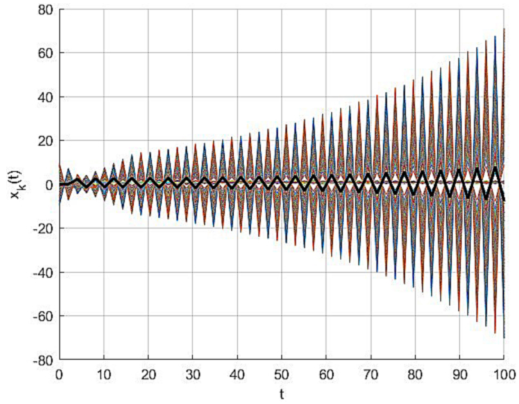

Рис. 3. Графік розв'язків $x^h_{k,n}$ при $h = \dfrac{100}{49}$ з початковими даними (54).

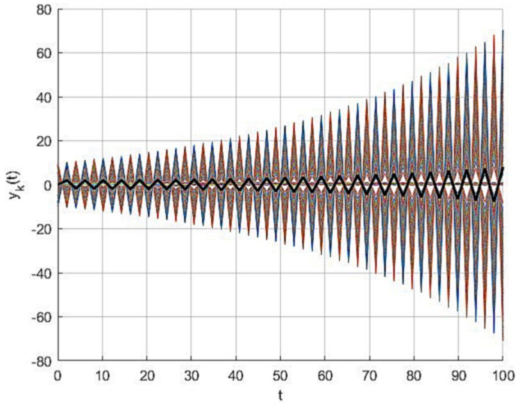

Рис. 4. Графік розв'язків $y^h_{k,n}$ при $h = \dfrac{100}{49}$ з початковими даними (54).

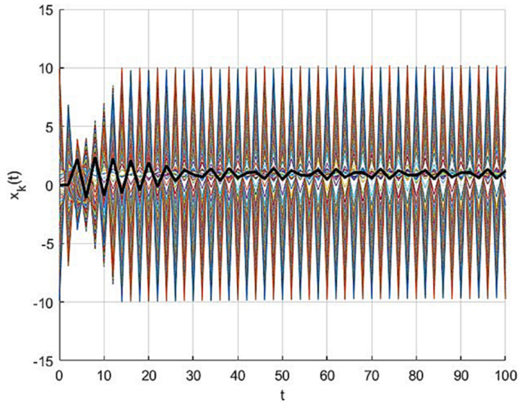

Рис. 5. Графік розв'язків $x^h_{k,n}$ при $h = 2$ з початковими даними (54).

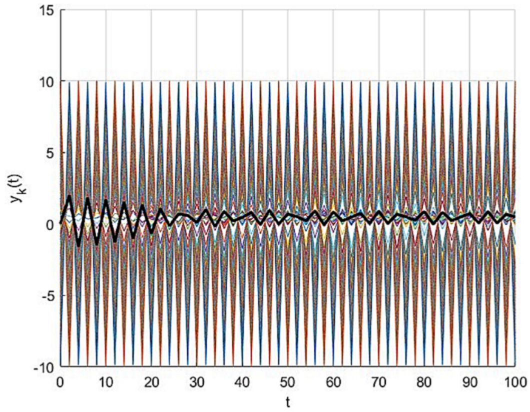

Рис. 6. Графік розв'язків $y^h_{k,n}$ при $h = 2$ з початковими даними (54).

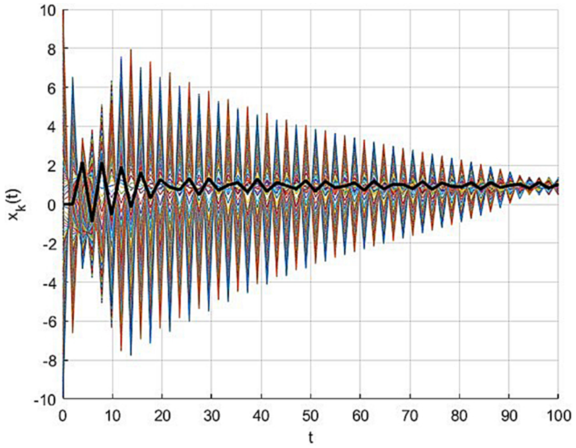

Рис. 7. Графік розв'язків $x^h_{k,n}$ при $h = \dfrac{100}{51}$ з початковими даними (54).

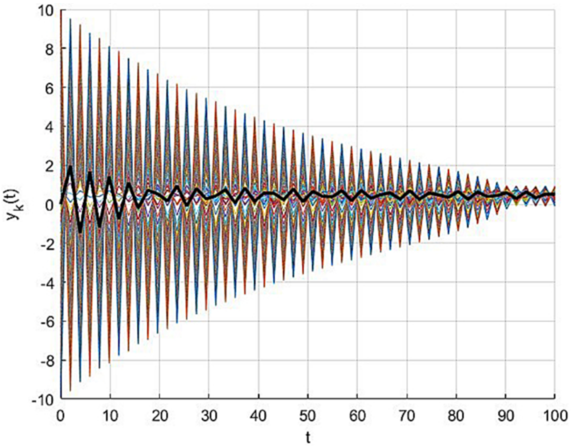

Рис. 8. Графік розв'язків $y^h_{k,n}$ при $h = \dfrac{100}{51}$ з початковими даними (54).

При величині кроку $h > 2$ розв'язки системи різницевих рівнянь (53) необмежені, проте при малих значеннях функції зернистості (кроку) вони стають обмеженими (див. рис. 3 – 8).

При $h \leq 0{,}1$ розглядатимемо розв'язки на інтервалі $[0; 10]$ як на рис. 9, 10.

Крім того, що розв'язки розглянутих систем обмежені, розглянувши модуль різниці розв'язків системи диференціальних рівнянь (50) і відповідних розв'язків системи різницевих рівнянь (53), неважко показати, що зі зменшенням функції зернистості (кроку) різниця між відповідними розв'язками систем (50) і (53) також зменшується (див. рис. 11 – 14).

Найбільші значення різниці наведено в табл. 1.

Отже, при $h \to 0$ розв'язки системи рівнянь (53) на часовій шкалі $\mathbb{T}_\lambda = h\mathbb{Z}$ збігаються до відповідних розв'язків системи диференціальних рівнянь (1).

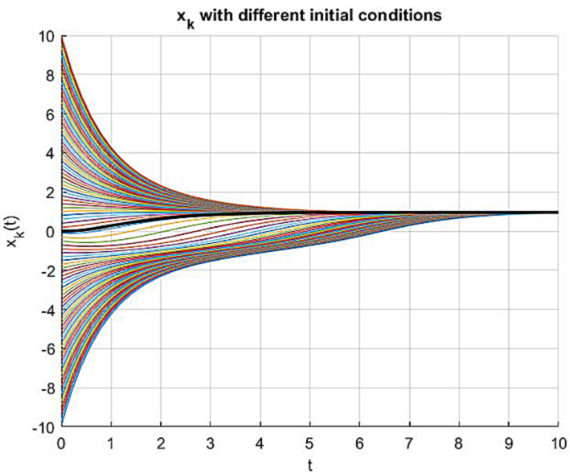

Рис. 9. Графік розв'язків $x^h_{k,n}$ при $h = 0{,}1$ з початковими даними (54).

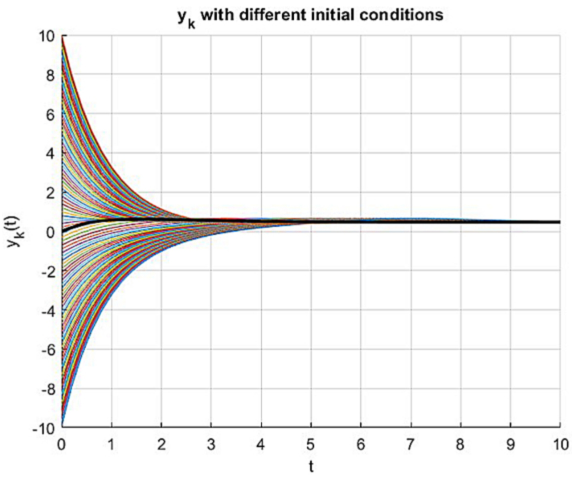

Рис. 10. Графік розв'язків $y^h_{k,n}$ при $h = 0{,}1$ з початковими даними (54).

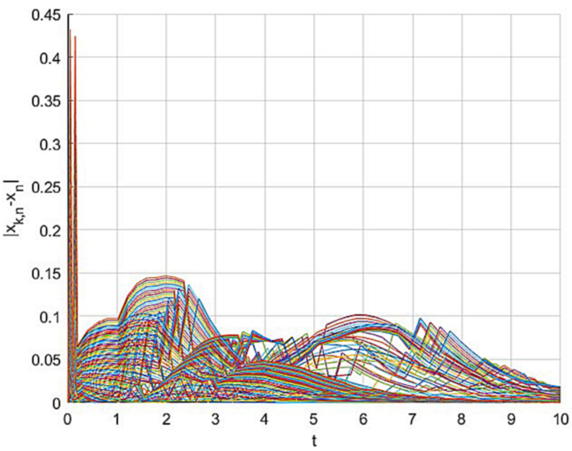

Рис. 11. Графік $|x_n - x^h_{k,n}|$ при $h = 0{,}1$ з початковими даними (54).

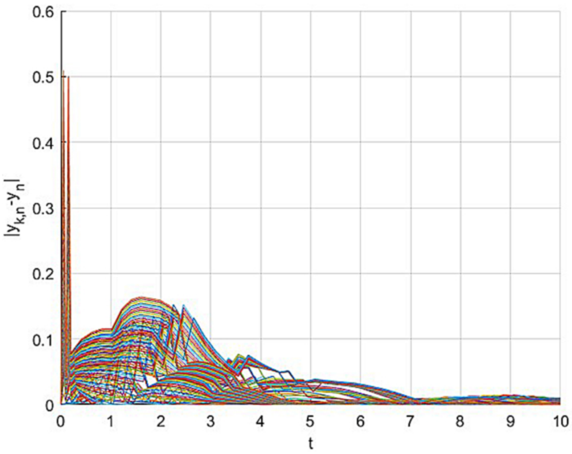

Рис. 12. Графік $|y_n - y^h_{k,n}|$ при $h = 0{,}1$ з початковими даними (54).

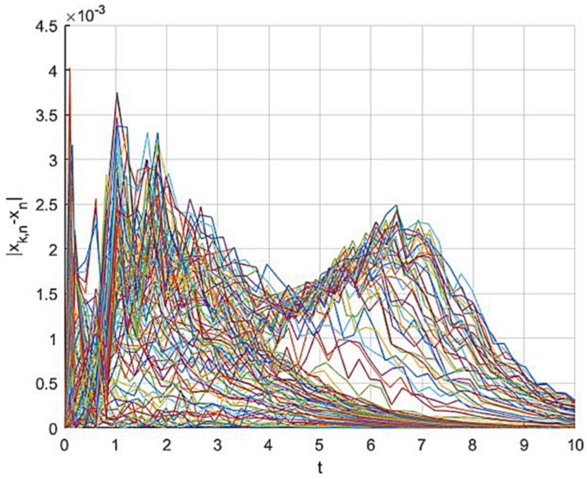

Рис. 13. Графік $|x_n - x^h_{k,n}|$ при $h = 0{,}001$ з початковими даними (54).

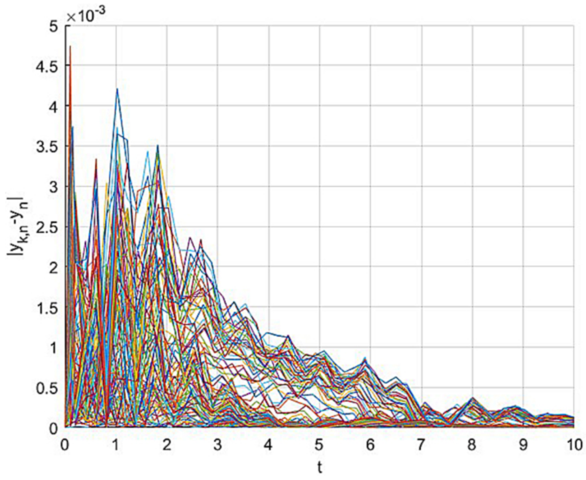

Рис. 14. Графік $|y_n - y^h_{k,n}|$ при $h = 0{,}001$ з початковими даними (54).

Таблиця 1. Максимальні значення різниці розв'язків системи різницевих рівнянь (53) і відповідних розв'язків системи диференціальних рівнянь (50) із початковими даними (54)

h	$\lvert x_n - x^h_{k,n}\rvert$	$\lvert y_n - y^h_{k,n}\rvert$
0,1	0,432205	0,509552
0,01	0,032116	0,037537
0,001	0,004023	0,004742

Виконано у рамках Держбюджетної теми НДР № 210BF38-01.

Література

1. S. Hilger, *Ein Makettenkalkl mit Anwendungen auf Zentrumsmannigfaltigkeiten*, PhD, Universit Würzburg, Würzburg, Germany (1988).
2. M. V. Pratsiovytyi, S. P. Ratuhniak, *Properties and distributions of values of fractal functions related to Q_2-representations of real numbers*, Probab. Theory Math. Statist., **99**, № 2, 187 – 202 (2018).
3. M. Bohner, A. Peterson, *Dynamical equations on time scales. An introduction with applications*, Birkhäuser, Boston, MA (2001).
4. M. Bohner, K. Kenzhebaev, O. Lavrova, O. Stanzhytskyi, *Pontryagin's maximum principle for dynamic systems on time scales*, J. Difference Equ. Appl., **23**, № 7, 1161 – 1189 (2017).
5. В. Я. Данілов, О. Є. Лаврова, О. М. Станжицький, *В'язкі розв'язки рівняння Гамільтона – Якобі – Беллмана на часових шкалах*, Укр. мат. журн., **69**, № 7, 933 – 950 (2017); ***English translation:*** Ukr. Math. J., **69**, № 7, 1085 – 1106 (2017).
6. L. Bourdin, O. Stanzhytskyi, E. Trelat, *Addendum to Pontryagin's maximum principle for dynamic systems on time scales*, J. Difference Equ. Appl., **23**, № 10, 1760 – 1763 (2017).
7. M. Bohner, O. Stanzhetskyi, A. Bratochkina, *Stochastic dynamic equations on general time scales*, Electronic J. Differential Equations, **57**, 1 – 15 (2013).
8. M. Bohner, O. Karpenko, O. Stanzhytskyi, *Oscillation of solutions of second-order linear differential equations and corresponding difference equations*, J. Difference Equ. Appl., **20**, № 7, 1112 – 1126 (2013).

9. О. М. Станжицький, А. М. Ткачук, *Про зв'язок між властивостями розв'язків різницевих та відповідних диференціальних рівнянь*, Укр. мат. журн., **59**, № 7, 989 – 996 (2005); 577 – 587 (2005); ***English translation:*** Ukr. Math. J., **59**, № 7, 1167 – 1176 (2005).

10. O. Stanzhytskyi, R. Uteshova, V. Tsan, Z. Khaletska, *On the relation between oscillation of solutions of differential equations and corresponding equations on time scales*, Turkish J. Math., **47**, № 2, 476 – 501 (2023).

11. O. Lavrova, V. Mogylova, O. Stanzhytskyi, O. Misiats, *Approximation of the optimal control problem on an interval with a family of optimization problems on time scales*, Nonlinear Dyn. Syst. Theory, **17**, № 3, 303 – 314 (2017).

12. O. Karpenko, O. Stanzhytskyi, *The relation between the existence of bounded solutions of differential equations and the corresponding difference equations*, J. Difference Equ. Appl., **19**, № 12, 1967 – 1982 (2013).

13. O. M. Karpenko, O. Stanzhytskyi, T. V. Dobrodzii, *The relation between the existence of bounded global solutions of the differential equations and equations on time scales*, Turkish J. Math., **44**, 2099 – 2112 (2020).

14. A. M. Samoilenko, M. O. Perestyuk, I. O. Parasyuk, *Differential equations textbook*, International Mathematical Center. JO Mitropolsky, Almaty (2012).

Одержано 03.05.23