

КРАЙОВА ЗАДАЧА З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ. КРИТИЧНИЙ ВИПАДОК ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Зоя Ординська, Раїса Овчар

*Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”
просп. Перемоги, 37, Київ, 03056, Україна
e-mail: zoya.o2501@gmail.com,
rfovchar@gmail.com*

The weakly nonlinear impulsive boundary-value problem is considered in the critical case of the second order. We obtain sufficient solvability conditions and propose a convergent algorithm for construction of solutions of these problems. The obtained results agree with known results of the theory of boundary-value problems for ordinary differential systems and generalize them to the case of the impulsive system.

Для імпульсної слабконелінійної крайової задачі розглянуто критичний випадок другого порядку. Отримано достатні умови розв'язності та запропоновано збіжний алгоритм побудови розв'язків таких задач. Одержані результати узгоджуються з раніше відомою теорією крайових задач для звичайних диференціальних систем і узагальнюють її для випадку наявності в системі імпульсної дії.

Робота має теоретичний характер, узагальнює й поглиблює раніш відомі результати з лінійних і слабконелінійних періодичних крайових задач для загального випадку, коли крайові умови задано слабконелінійним векторним функціоналом, а кількість крайових умов не співпадає з порядком диференціальної системи [1–3]. Практичну цінність обумовлено тим, що питання існування й побудови розв'язків крайових задач із імпульсною дією займають важливе місце у якісній теорії диференціальних рівнянь, широким застосуванням теорії крайових задач із імпульсною дією в різноманітних за фізичною природою і функціональним призначенням технічних задачах, а також конструктивністю запропонованих у цій роботі достатніх умов існування розв'язків і збіжного алгоритму їхньої побудови.

Розглянемо слабконелінійну крайову задачу для системи диференціальних рівнянь із імпульсною дією вигляду [4, 5]

$$\begin{cases} \dot{z} = A(t)z + f(t) + \varepsilon Z(z, t, \varepsilon), & t \neq \tau_i \in [a, b], \\ \Delta z|_{t=\tau_i} - S_i z(\tau_i - 0) = a_i + \varepsilon J_i(z(\tau_i - 0, \varepsilon), \varepsilon), & i = 1, \dots, k, \\ lz = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon), \end{cases} \quad (1)$$

де $A(t)$, $f(t)$ — $(n \times n)$ -вимірні матричні та $(n \times 1)$ -вимірні векторні функції, компоненти яких належать просторові $C([a, b] \setminus \{\tau_i\}_I)$ неперервних чи кусково-неперервних на

$[a, b] \setminus \{\tau_i\}$ функцій, що мають розриви першого роду за t при $t = \tau_i$; S_i — $(n \times n)$ -вимірні сталі матриці такі, що $(E + S_i)$ невиводжені; a_i — n -вимірний вектор-стовпець констант:

$$a_i \in \mathbb{R}^n, \quad -\infty < a < \tau_1 < \dots < \tau_i < \dots < \tau_p < b < +\infty, \quad i = 1, \dots, p,$$

$l = \text{col}(l_1, \dots, l_m)$ — лінійний обмежений m -вимірний векторний функціонал;

$\alpha = \text{col}(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$; $Z(z, t, \varepsilon)$ — нелінійна n -вимірна вектор-функція

$$Z(\bullet, t, \varepsilon) \in C^1[\|z - z_0\| < q], \quad Z(z, \bullet, \varepsilon) \in C([a, b] \setminus \{\tau_i\}_I), \quad Z(z, t, \bullet) \in C[0, \varepsilon_0],$$

$J_i(z(\tau_i - 0, \varepsilon), \varepsilon)$, $J(z(\bullet, \varepsilon), \varepsilon)$ — нелінійні n - і m -вимірні векторні функціонали за першим аргументом z , неперервно диференційовні (за Фреше), а як вектор-функції другого аргументу — неперервні за $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.

Виконавши в (1) заміну змінної $z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon)$, в якій вектор констант $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ задовольняє рівняння для породжуючих амплітуд крайової задачі з імпульсною дією (1):

$$F(c_r^*) = P_{Q_d^*} \left\{ J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) - l \int_a^b K(\cdot, \tau) Z(z_0(\tau, c_r^*), \tau, 0) d\tau - l \sum_{i=1}^p \overline{K}(\cdot, \tau_i) J_i(z_0(\tau_i - 0, c_r^*), 0) \right\} = 0, \quad (*)$$

одержимо крайову задачу з імпульсною дією

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + \varepsilon Z(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon), & t \neq \tau_i, \\ \Delta x|_{t=\tau_i} = S_i x(\tau_i - 0) + \varepsilon J_i(z_0(\tau_i - 0, c_r^*) + x((\tau_i - 0, \varepsilon), \varepsilon)), \\ lx = \varepsilon J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon). \end{cases} \quad (2)$$

Прийнято такі позначення: $Q = lX(\bullet)$ — $(m \times n)$ -вимірна стала матриця, $\text{rank } Q = n_1$, $X(t)$, $K(t, \tau)$ — фундаментальна й Коші матриці диференціальної системи (1) при $\varepsilon = 0$; B_0 — $(d \times r)$ -вимірна матриця ($r = n - n_1$, $d = m - n_1$), яка визначається формулою

$$B_0 = P_{Q_d^*} \left\{ l_1 X_r(\bullet) - l \int_a^b K(\bullet, \tau) A_1(\tau) X_r(\tau) d\tau - l \sum_{i=1}^p K(\bullet, \tau_i + 0) A_{1i} X(\tau_i - 0) \right\},$$

P_{B_0} — $(r \times r)$ -вимірна матриця (ортопроектор), що проектує $\mathbb{R}^r$ на $N(B_0)$, $P_{B_0^*}$ — $(d \times d)$ -вимірна матриця, що проектує $\mathbb{R}^d$ на $N(B_0^*)$; P_Q — $(n \times n)$ -вимірна матриця (ортопроектор), що проектує $\mathbb{R}^n$ на нуль-простір $N(Q)$ матриці $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow N(Q)$; аналогічно P_{Q^*} — $(m \times m)$ -вимірна матриця: $\mathbb{R}^m \rightarrow N(Q^*)$; P_{Q_r} — $(n \times r)$ -вимірна матриця, стовпці якої — r -лінійно незалежні стовпці матриці P_Q , $r = n - n_1$, $P_{Q_d^*}$ — $(d \times m)$ -вимірна матриця, рядки якої — d -лінійно незалежні рядки матриці $P_{Q_d^*}$, $d = m - n_1$.

Нехай $P_Q \neq 0 \iff \text{rank } Q = n_1 < n$ і виконується умова $P_{B_0} \neq 0 \iff \text{rank } B_0 < r$.

1. Припускаємо, що вектор-функції $R(x, t, \varepsilon) \in C^1[x], C[t], C[\varepsilon]$, $R_i(x(\tau_i - 0, \varepsilon), \varepsilon) \in C^1[x], C[\varepsilon]$, $R_0(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \in C^1[x], C[\varepsilon]$ такі, що виконуються умови

$$\begin{aligned} R(0, t, 0) &= 0, & \frac{\partial R(0, t, \varepsilon)}{\partial x} &= 0, \\ R_i(0, 0) &= 0, & \frac{\partial R(0, \varepsilon)}{\partial x} &= 0, \\ R_0(0, 0) &= 0, & \frac{\partial R_0(0, \varepsilon)}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Рівняння

$$\begin{aligned} B_0 c = -P_{Q_d^*} & \left\{ l_1 x^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + R_0(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right. \\ & - l \int_a^b K(\cdot, \tau) \left[A_1(\tau) x^{(1)}(\tau, \varepsilon) + R(x(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) \right] d\tau \\ & \left. - l \sum_{i=1}^P \bar{K}(\cdot, \tau_i) \left[A_{1i} x^{(1)}(\tau_i - 0, \varepsilon) + R_i(x(\tau_i - 0, \varepsilon), \varepsilon) \right] \right\} \end{aligned}$$

розв'язне тоді й тільки тоді, коли

$$\begin{aligned} P_{B_0^*} P_{Q_d^*} & \left\{ l_1 x^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + R_0(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right. \\ & - l \int_a^b K(\cdot, \tau) \left[A_1(\tau) x^{(1)}(\tau, \varepsilon) + R(x(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) \right] d\tau \\ & \left. - l \sum_{i=1}^P \bar{K}(\cdot, \tau_i) \left[A_{1i} x^{(1)}(\tau_i - 0, \varepsilon) + R_i(x(\tau_i - 0, \varepsilon), \varepsilon) \right] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

і при цьому має розв'язок у вигляді прямої суми

$$c = c^{(0)} + c^{(1)}, \quad (5)$$

де

$$\begin{aligned} c^{(0)} &= -B_0^+ P_{Q_d^*} \left\{ l_1 x^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + R_0(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right. \\ & - l \int_a^b K(\cdot, \tau) \left[A_1(\tau) x^{(1)}(\tau, \varepsilon) + R(x(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) \right] d\tau \\ & \left. - l \sum_{i=1}^P \bar{K}(\cdot, \tau_i) \left[A_{1i} x^{(1)}(\tau_i - 0, \varepsilon) + R_i(x(\tau_i - 0, \varepsilon), \varepsilon) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$= (I_r - P_{B_0})c^{(0)} \in \mathbb{R}^r \ominus N(B_0),$$

$c^{(1)}$ — довільна r -вимірний константа з $N(B_0)$: $c^{(1)} = P_{B_0}c = P_{B_0}c^{(1)} \in N(B_0)$. Враховуючи зображення (5), отримаємо такий вираз:

$$x^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon G_1(t)P_{B_0}c^{(1)} + x^{(2)}(t, \varepsilon), \quad (6)$$

де $G_1(t)$ — $(n \times r)$ -вимірний матриця, яка має вигляд

$$G_1(t) = \left(G \begin{bmatrix} A_1(\tau)X_r(\tau) \\ A_{1i}X_r(\tau_i - 0) \end{bmatrix} \right)(t) + X(t)Q^+l_1X_r(\cdot),$$

а вектор-функція $x^{(2)}(t, \varepsilon)$ має вигляд

$$\begin{aligned} x^{(2)}(t, \varepsilon) = \varepsilon \left(G \begin{bmatrix} Z(z_0, \tau, 0) + A_1(\tau) \left[X_r(\tau)(I_r - P_{B_0})c^{(0)} \right. \\ \left. + \varepsilon G_1(\tau)P_{B_0}c^{(1)} + x^{(2)} \right] + R(x, \tau, \varepsilon) \\ I_i(z_0, 0) + A_{1i} \left[X_r(\tau_i - 0)(I_r - P_{B_0})c^{(0)} \right. \\ \left. + \varepsilon G_1(\tau_i - 0)P_{B_0}c^{(1)} + x^{(2)} \right] + R_i(x(\tau_i - 0, \varepsilon), \varepsilon) \end{bmatrix} \right)(t) \\ + \varepsilon X(t)Q^+ \left[I(z_0(\cdot, c_r^*), 0) \right. \\ \left. + l_1 \left[X_r(\cdot)(I_r - P_{B_0})c^{(0)} + \varepsilon G_1(\cdot)P_{B_0}c^{(1)} + x^{(2)} \right] + R_0(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right]. \end{aligned}$$

Враховуючи зображення (6), приходимо до алгебраїчної системи для визначення $c^{(1)} \in N(B_0)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon B_1 c^{(1)} + P_{B_0}^* P_{Q_d^*} \left\{ l_1 x^{(2)}(\cdot, \varepsilon) + R_0(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right. \\ \left. - l \int_a^b K(\cdot, \tau) \left[A_1(\tau) x^{(2)}(\tau, \varepsilon) + R(x(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) \right] d\tau \right. \\ \left. - l \sum_{i=1}^P \overline{K}(\cdot, \tau_i) \left[A_{1i} x^{(2)}(\tau_i - 0, \varepsilon) + R_i(x(\tau_i - 0, \varepsilon), \varepsilon) \right] \right\} = 0, \quad (7) \end{aligned}$$

де B_1 — $(d \times r)$ -вимірний матриця, яка має вигляд

$$\begin{aligned} B_1 = P_{B_0}^* P_{Q_d^*} \left\{ l_1 G_1(\cdot)P_{B_0} - l \int_a^b K(\cdot, \tau) A_1(\tau) G_1(\tau) P_{B_0} d\tau \right. \\ \left. - l \sum_{i=1}^P \overline{K}(\cdot, \tau_i) A_{1i} G_1(\tau_i - 0) P_{B_0} \right\}. \quad (8) \end{aligned}$$

Тоді необхідна й достатня умова розв'язності (7) має вигляд

$$P_{B_1^*} P_{B_0^*} P_{Q_d^*} \left\{ l_1 x^{(2)}(\cdot, \varepsilon) + R_0(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - l \int_a^b K(\cdot, \tau) [A_1(\tau) x^{(2)}(\tau, \varepsilon) + R(x(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon)] d\tau - l \sum_{i=1}^P \bar{K}(\cdot, \tau_i) [A_{1i} x^{(2)}(\tau_i - 0, \varepsilon) + R_i(x(\tau_i - 0, \varepsilon), \varepsilon)] \right\} = 0, \quad (9)$$

де P_{B_1} — $(r \times r)$ -вимірний ортопроектор, який проектує r -вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^r$ на нуль-простір $N(B_1)$ $(d \times r)$ -вимірної матриці B_1 , а через $P_{B_1^*}$ — $(d \times d)$ -вимірний ортопроектор, який проектує d -вимірний простір $\mathbb{R}^d$ на нуль-простір $N(B_1^*)$ $(r \times d)$ -вимірної матриці $B_1^* = B_1^T$. За цієї умови система (7) розв'язна щодо $\varepsilon c^{(1)} \in N(B_0)$:

$$\varepsilon c^{(1)} = -B_1^+ P_{B_0^*} P_{Q_d^*} \left\{ l_1 x^{(2)}(\cdot, \varepsilon) + R_0(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - l \int_a^b K(\cdot, \tau) [A_1(\tau) x^{(2)}(\tau, \varepsilon) + R(x(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon)] d\tau - l \sum_{i=1}^P \bar{K}(\cdot, \tau_i) [A_{1i} x^{(2)}(\tau_i - 0, \varepsilon) + R_i(x(\tau_i - 0, \varepsilon), \varepsilon)] \right\} + c^{(2)}, \quad (10)$$

де $c^{(2)}$ — довільний вектор із $N(B_0) \cap N(B_1)$,

$$c^{(2)} = P_{B_1} c^{(1)} = P_{B_1} P_{B_0} c^{(1)} \in N(B_0) \cap N(B_1).$$

Припустимо, що перетин нуль-просторів $N(B_0)$ і $N(B_1)$ нульовий, тобто $P_{B_0} P_{B_1} = 0$, тоді (7) має єдиний розв'язок (10) ($c^{(2)} = 0$). Достатньою умовою виконання рівності (9) є вимога, щоб перетин нуль-просторів $N(B_0^*)$, $N(B_1^*)$ і $N(Q^*)$ був нульовим:

$$P_{B_1^*} P_{B_0^*} P_{Q_d^*} = 0.$$

Таким чином, за умов

$$P_{B_0} \neq 0, \quad P_{B_0} P_{B_1} = 0, \quad P_{B_1^*} P_{B_0^*} P_{Q_d^*} = 0 \quad (11)$$

приходимо до операторної системи

$$\left\{ \begin{aligned}
x(t, \varepsilon) &= X_r(t)(I_r - P_{B_0})c^{(0)} + \varepsilon G_1(t)P_{B_0}c^{(1)} + x^{(2)}(t, \varepsilon), \\
c^{(0)} &= -B_0^+ P_{Q_d^*} \left\{ l_1 [\varepsilon G_1(\cdot)P_{B_0}c^{(1)} + x^2(\cdot, \varepsilon)] + R_0(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right. \\
&\quad - l \int_a^b K(\cdot, \tau) \left\{ A_1(\tau) [\varepsilon G_1(\tau)P_{B_0}c^{(1)} + x^{(2)}(\tau, \varepsilon)] + R(x(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) \right\} d\tau \\
&\quad \left. - l \sum_{i=1}^P \bar{K}(\cdot, \tau_i) \left[A_{1i} [\varepsilon G_1(\tau_i - 0)P_{B_0}c^{(1)} + x^{(2)}(\tau_i - 0, \varepsilon)] + R_i(x(\tau_i - 0, \varepsilon), \varepsilon) \right] \right\}, \\
\varepsilon c^{(1)} &= -B_1^+ P_{B_0^*} P_{Q_d^*} \left\{ l_1 x^{(2)}(\cdot, \varepsilon) + R_0(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right. \\
&\quad - l \int_a^b K(\cdot, \tau) \left[A_1(\tau) x^{(2)}(\tau, \varepsilon) + R(x(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) \right] d\tau \\
&\quad \left. - l \sum_{i=1}^P \bar{K}(\cdot, \tau_i) \left[A_{1i} x^{(2)}(\tau_i - 0, \varepsilon) + R_i(x(\tau_i - 0, \varepsilon), \varepsilon) \right] \right\}, \\
x^{(2)}(t, \varepsilon) &= \varepsilon \left(G \left[\begin{aligned}
&Z(z_0, \tau, 0) + A_1(\tau) \left[X_r(\tau)(I_r - P_{B_0})c^{(0)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \varepsilon G_1(\tau)P_{B_0}c^{(1)} + x^{(2)}(\tau, \varepsilon) \right] + R(x, \tau, \varepsilon) \right. \\
&J_i(z_0, 0) + A_{1i} \left[X_r(\tau_i - 0)(I_r - P_{B_0})c^{(0)} \right. \\
&\quad \left. \left. + \varepsilon G_1(\tau_i - 0)P_{B_0}c^{(1)} + x^{(2)}(\tau_i - 0, \varepsilon) \right] + R_i(x(\tau_i - 0, \varepsilon), \varepsilon) \right] \right] (t) \\
&+ \varepsilon X(t)Q^+ \left[J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + l_1 \left[X_r(\cdot)(I_r - P_{B_0})c^{(0)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \varepsilon G_1(\cdot)P_{B_0}c^{(1)} + x^{(2)}(\cdot, \varepsilon) \right] + R_0(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right],
\end{aligned} \right)
\end{aligned} \right. \quad (12)$$

для розв'язання якої застосовується збіжний метод простих ітерацій.

2. Для дослідження крайової задачі з імпульсною дією (2) в загальному випадку, коли виконуються умови

$$\begin{aligned}
R(0, t, 0) &= 0, & \frac{\partial R(0, t, 0)}{\partial x} &= 0, \\
R_i(0, 0) &= 0, & \frac{\partial R_i(0, 0)}{\partial x} &= 0, \\
R_0(0, 0) &= 0, & \frac{\partial R_0(0, 0)}{\partial x} &= 0,
\end{aligned} \quad (13)$$

запишемо у явному вигляді лінійні по x і ε доданки, які входять у $R(x, t, \varepsilon)$, $R_i(x, \varepsilon)$, $R_0(x, \varepsilon)$. При цьому необхідні додаткові умови неперервної диференційованості вектор-функції $Z(z, t, \varepsilon)$ і вектор-функціоналів $J_i(z, \varepsilon)$, $J(z, \varepsilon)$ по ε мають вигляд

$$Z(z, t, \varepsilon) \in C^1[\varepsilon], \quad J_i(z, \varepsilon) \in C^1[\varepsilon], \quad J(z, \varepsilon) \in C^1[\varepsilon].$$

Для нелінійностей $Z(z_0 + x, t, \varepsilon)$, $J(z_0 + x, \varepsilon)$, $J(z_0 + x, \varepsilon)$ отримаємо такі розклади:

$$Z(z_0 + x, t, \varepsilon) = Z(z_0(t, c_r^*), t, 0) + A_1(t)x + \varepsilon A_2(t)x + R(x, t, \varepsilon),$$

де

$$A_2(t) = A_2(t, c_r^*) = \left. \frac{\partial^2 Z(z, t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon \partial z} \right|_{\substack{z=z_0(t, c_r^*), \\ \varepsilon=0}} \in C(t)$$

(у розглянутому вище випадку (3) $A_2(t) = 0$),

$$\begin{aligned} J_i(z_0 + x, \varepsilon) &= J_i(z_0(\tau_i - 0, c_r^*), 0) + A_{1i}x(\tau_i - 0, \varepsilon) \\ &\quad + \varepsilon A_{2i}x(\tau_i - 0, \varepsilon) + R_i(x(\tau_i - 0, \varepsilon), \varepsilon), \end{aligned} \quad (14)$$

де

$$A_{2i} = \left. \frac{\partial^2 J_i(z, \varepsilon)}{\partial \varepsilon \partial z} \right|_{\substack{z=z_0(t, c_r^*), \\ \varepsilon=0}}$$

(у розглянутому вище випадку (3) $A_{2i} = 0$),

$$J(z_0 + x, \varepsilon) = J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + l_1x(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon l_2x(\cdot, \varepsilon) + R_0(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$$

(у розглянутому вище випадку (3) $l_2 = 0$).

Аналогічно з попередніми міркуваннями від крайової задачі

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + \varepsilon \{Z(z_0(t, c_r^*), t, 0) + A_1(t)x + \varepsilon A_2(t)x + R(x, t, \varepsilon)\}, & t \neq \tau_i, \\ \Delta x|_{t=\tau_i} = S_i x(\tau_i - 0) + \varepsilon \{J_i(z_0(\tau_i - 0, c_r^*), 0) + A_{1i}x(\tau_i - 0, \varepsilon) \\ \quad + \varepsilon A_{2i}x(\tau_i - 0, \varepsilon) + R_i(x(\tau_i - 0, \varepsilon), \varepsilon)\}, \\ lx = \varepsilon \{J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + l_1x(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon l_2x(\cdot, \varepsilon) + R_0(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)\} \end{cases} \quad (15)$$

приходимо до еквівалентної на множині кусково неперервно диференційовних по t з розривами першого роду при $t = \tau_i$, неперервних по $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $x(t, 0) = 0$ вектор-функцій $x(t, \varepsilon)$ операторної системи

$$x(t, \varepsilon) = X_r(t)c + x^{(1)}(t, \varepsilon),$$

$$\begin{aligned} B_0c &= -P_{Q_d^*} \left\{ l_1x^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon l_2 \left[X_r(\cdot)c + x^{(1)}(\cdot, \varepsilon) \right] \right. \\ &\quad + R_0(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - l \int_a^b K(\cdot, \tau) \left[A_1(\tau)x^{(1)}(\tau, \varepsilon) + \varepsilon A_2(\tau) \left[X_r(\tau)c + x^{(1)}(\tau, \varepsilon) \right] \right. \\ &\quad + R(x(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) \Big] d\tau - l \sum_{i=1}^P \bar{K}(\cdot, \tau_i) \left[A_{1i}x^{(1)}(\tau_i - 0, \varepsilon) \right. \\ &\quad \left. \left. + \varepsilon A_{2i} \left[X_r(\tau_i - 0)c + x^{(1)}(\tau_i - 0, \varepsilon) \right] + R_i(x(\tau_i - 0, \varepsilon), \varepsilon) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$x^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon \left(G \left[\begin{array}{l} Z(z_0, \tau, 0) + [A_1(\tau) + \varepsilon A_2(\tau)]x(\tau, \varepsilon) + R(x, \tau, \varepsilon) \\ J_i(z_0, 0) + [A_{1i} + \varepsilon A_{2i}]x(\tau_i - 0, \varepsilon) + R_i(x(\tau_i - 0, \varepsilon), \varepsilon) \end{array} \right] \right) (t) \\ + \varepsilon X(t)Q^+ [J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + [l_1 + \varepsilon l_2]x(\cdot, \varepsilon) + R_0(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)].$$

Друге рівняння (16) розв'язне тоді й тільки тоді, коли

$$P_{B_0^*} P_{Q_d^*} \left\{ l_1 x^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon l_2 [X_r(\cdot)c + x^{(1)}(\cdot, \varepsilon)] + R_0(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right. \\ \left. - l \int_a^b K(\cdot, \tau) [A_1(\tau)x^{(1)}(\tau, \varepsilon) + \varepsilon A_2(\tau) [X_r(\tau)c + x^{(1)}(\tau, \varepsilon)] \right. \\ \left. + R(x(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon)] d\tau - l \sum_{i=1}^P \bar{K}(\cdot, \tau_i) [A_{1i}x^{(1)}(\tau_i - 0, \varepsilon) \right. \\ \left. + \varepsilon A_{2i} [X_r(\tau_i - 0)c + x^{(1)}(\tau_i - 0, \varepsilon)] + R_i(x(\tau_i - 0, \varepsilon), \varepsilon)] \right\} = 0 \quad (17)$$

і при виконанні цієї умови має розв'язок у вигляді прямої суми $c = c^{(0)} + c^{(1)}$, де

$$c^{(0)} = -B_0^+ P_{Q_d^*} \left\{ l_1 x^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon l_2 x(\cdot, \varepsilon) + R_0(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right. \\ \left. - l \int_a^b K(\cdot, \tau) [A_1(\tau)x^{(1)}(\tau, \varepsilon) + \varepsilon A_2(\tau)x(\tau, \varepsilon) + R(x(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon)] d\tau \right. \\ \left. - l \sum_{i=1}^P \bar{K}(\cdot, \tau_i) [A_{1i}x^{(1)}(\tau_i - 0, \varepsilon) + \varepsilon A_{2i}x(\tau_i - 0, \varepsilon) + R_i(x(\tau_i - 0, \varepsilon), \varepsilon)] \right\} \\ = (I_r - P_{B_0})c^{(0)} \in \mathbb{R}^r \ominus N(B_0), \\ c^{(1)} = P_{B_0}c = P_{B_0}c^{(1)} \in N(B_0).$$

Із третього рівняння операторної системи (16), враховуючи зображення константи c , отримаємо

$$x^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon G_1(t)P_{B_0}c^{(1)} + x^{(2)}(t, \varepsilon),$$

де $(n \times r)$ -вимірний матриця $G_1(t)$ така ж, що і в формулі (6), а вектор-функція $x^{(2)}(t, \varepsilon)$ має вигляд

$$\begin{aligned}
x^{(2)}(t, \varepsilon) = \varepsilon \left(G \begin{bmatrix} Z(z_0, \tau, 0) + [A_1(\tau) + \varepsilon A_2(\tau)] \\ \times (X_r(\tau)(I_r - P_{B_0})c^{(0)} + x^{(1)}(\tau, \varepsilon)) + R(x, \tau, \varepsilon) \\ J_i(z_0, 0) + [A_{1i} + \varepsilon A_{2i}](X_r(\tau_i - 0)(I_r - P_{B_0})c^{(0)} \\ + x^{(1)}(\tau_i - 0, \varepsilon)) + R_i(x(\tau_i - 0, \varepsilon), \varepsilon) \end{bmatrix} \right) (t) \\
+ \varepsilon X(t)Q^+ \left[J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + [l_1 + \varepsilon l_2] \right. \\
\left. \times (X_r(\cdot)(I_r - P_{B_0})c^{(0)} + x^{(1)}(\cdot, \varepsilon)) + R_0(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right].
\end{aligned}$$

Враховуючи $x^{(1)}(t, \varepsilon)$ і c , з умови (17) розв'язності другого рівняння (16) отримаємо алгебраїчну систему для визначення $c^{(1)} \in N(B_0)$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon B_1 c^{(1)} + P_{B_0}^* P_{Q_d^*} \left\{ l_1 x^{(2)} + \varepsilon l_2 [X_r(\cdot)(I_r - P_{B_0})c^{(0)} + x^{(1)}] \right. \\
+ R_0(x, \varepsilon) - l \int_a^b K(\cdot, \tau) [A_1(\tau)x^{(2)} \\
+ \varepsilon A_2(\tau) [X_r(\tau)(I_r - P_{B_0})c^{(0)} + x^{(1)}] \\
+ R(x, \tau, \varepsilon)] d\tau - l \sum_{i=1}^P \bar{K}(\cdot, \tau_i) [A_{1i}x^{(2)} \\
+ \varepsilon A_{2i} [X_r(\tau_i - 0)(I_r - P_{B_0})c^{(0)} + x^{(1)}] + R_i(x, \varepsilon)] \left. \right\} = 0,
\end{aligned}$$

де, на відміну від (8), $(d \times r)$ -вимірна матриця B_1 записується так:

$$\begin{aligned}
B_1 = P_{B_0}^* P_{Q_d^*} \left\{ [l_1 G_1(\cdot) + l_2 X_r(\cdot)] P_{B_0} \right. \\
- l \int_a^b K(\cdot, \tau) [A_1(\tau)G_1(\tau) + A_2(\tau)X_r(\tau)] P_{B_0} d\tau \\
\left. - l \sum_{i=1}^P \bar{K}(\cdot, \tau_i) [A_{1i}G_1(\tau_i - 0) + A_{2i}X_r(\tau_i - 0)] P_{B_0} \right\}. \quad (18)
\end{aligned}$$

Позначаючи через P_{B_1} і $P_{B_1}^*$ ортопроектори на нуль-простори $N(B_1)$ і $N(B_1^*)$ матриць B_1 (18) і $B_1^* = B_1^T$, за умов (11) від операторної системи (16) приходимо до системи

$$\left\{ \begin{aligned}
& x(t, \varepsilon) = X_r(t)(I_r - P_{B_0})c^{(0)} + \varepsilon G_1(t)P_{B_0}c^{(1)} + x^{(2)}(t, \varepsilon), \\
& c^{(0)} = B_0^+ P_{Q_d^*} \left\{ l_1 \left[\varepsilon G_1(\cdot)P_{B_0}c^{(1)} + x^{(2)} \right] + \varepsilon l_2 x(\cdot, \varepsilon) \right. \\
& \quad + R_0(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - l \int_a^b K(\cdot, \tau) \left[A_1(\tau) \left(\varepsilon G_1(\tau)P_{B_0}c^{(1)} + x^{(2)} \right) \right. \\
& \quad \left. \left. + \varepsilon A_2(\tau)x(\tau, \varepsilon) + R(x(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) \right] d\tau \right. \\
& \quad \left. - l \sum_{i=1}^P \bar{K}(\cdot, \tau_i) \left[A_{1i} \left(\varepsilon G_1(\tau_i - 0)P_{B_0}c^{(1)} + x^{(2)} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \varepsilon A_{2i}x(\tau_i - 0, \varepsilon) + R_i(x(\tau_i - 0, \varepsilon), \varepsilon) \right] \right\}, \\
& \varepsilon c^{(1)} = -B_1^+ P_{B_0^*} P_{Q_d^*} \left\{ l_1 x^{(2)}(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon l_2 x(\cdot, \varepsilon) \right. \\
& \quad + R_0(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - l \int_a^b K(\cdot, \tau) \left[A_1(\tau)x^{(2)}(\tau, \varepsilon) \right. \\
& \quad \left. \left. + \varepsilon A_2(\tau)x(\tau, \varepsilon) + R(x(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) \right] d\tau \right. \\
& \quad \left. - l \sum_{i=1}^P \bar{K}(\cdot, \tau_i) \left[A_{1i}x^{(2)}(\tau_i - 0, \varepsilon) + \varepsilon A_{2i}x(\tau_i - 0, \varepsilon) + R_i(x(\tau_i - 0, \varepsilon), \varepsilon) \right] \right\}, \\
& x^{(2)}(t, \varepsilon) = \varepsilon \left(G \begin{bmatrix} Z(z_0, \tau, 0) + [A_1(\tau) + \varepsilon A_2(\tau)](X_r(\tau)(I_r - P_{B_0})c^{(0)} \\ + \varepsilon G_1(\tau)P_{B_0}c^{(1)} + x^{(2)}(\tau, \varepsilon)) + R(x, \tau, \varepsilon) \\ J_i(z_0, 0) + [A_{1i} + \varepsilon A_{2i}](X_r(\tau_i - 0)(I_r - P_{B_0})c^{(0)} \\ + \varepsilon G_1(\tau_i - 0)P_{B_0}c^{(1)}x^{(2)}(\tau_i - 0, \varepsilon)) + R_i(x(\tau_i - 0, \varepsilon), \varepsilon) \end{bmatrix} \right) (t) \\
& \quad + \varepsilon X(t)Q^+ \left[J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + [l_1 + \varepsilon l_2] \right. \\
& \quad \left. \times (X_r(\cdot)(I_r - P_{B_0})c^{(0)} + \varepsilon G_1(\cdot)P_{B_0}c^{(1)} + x^{(2)}(\cdot, \varepsilon)) + R_0(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right].
\end{aligned} \right. \quad (19)$$

Система (19) належить до класу операторних систем, для яких застосовується метод простих ітерацій [2, 6, 7]. Схема дослідження й розв'язання (19) аналогічна схемі дослідження та розв'язання (12).

Ітераційний процес для (19) розглянуто на прикладі системи (12), тобто за умов (3).

За допомогою методу простих ітерацій для операторної системи (12) побудовано ітераційний процес відшукування розв'язку $x(t, \varepsilon) : x(\cdot, \varepsilon) \in C^1([a, b]/\{\tau_i\}_I)$, $x(t, \cdot) \in C[\varepsilon]$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $x(t, 0) = 0$ крайової задачі з імпульсною дією (2):

$$\left\{ \begin{aligned}
& \varepsilon c_{k-1}^{(1)} = -B_1^+ P_{B_0}^* P_{Q_d}^* \left\{ l_1 x_k^{(2)}(\cdot, \varepsilon) + R_0(x_k(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right. \\
& \quad - l \int_a^b K(\cdot, \tau) \left[A_1(\tau) x_k^{(2)}(\tau, \varepsilon) + R(x_k(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) \right] d\tau \\
& \quad \left. - l \sum_{i=1}^P \bar{K}(\cdot, \tau_i) \left[A_{1i} x_k^{(2)}(\tau_i - 0, \varepsilon) + R_i(x_k(\tau_i - 0, \varepsilon), \varepsilon) \right] \right\}, \\
& c_k^{(0)} = -B_0^+ P_{Q_d}^* \left\{ l_1 \left(\varepsilon G_1(\cdot) P_{B_0} c_{k-1}^{(1)} + x_k^{(2)}(\cdot, \varepsilon) \right) + R_0(x_k(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right. \\
& \quad - l \int_a^b K(\cdot, \tau) \left[A_1(\tau) \left(\varepsilon G_1(\tau) P_{B_0} c_{k-1}^{(1)} + x_k^{(2)}(\tau, \varepsilon) \right) + R(x_k(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) \right] d\tau \\
& \quad \left. - l \sum_{i=1}^P \bar{K}(\cdot, \tau_i) \left[A_{1i} \left(\varepsilon G_1(\tau_i - 0) P_{B_0} c_{k-1}^{(1)} + x_k^{(2)}(\tau_i - 0, \varepsilon) \right) + R_i(x_k(\tau_i - 0, \varepsilon), \varepsilon) \right] \right\}, \\
& x_{k+1}^{(2)}(t, \varepsilon) = \varepsilon \left(G \begin{bmatrix} Z(z_0, \tau, 0) + A_1(\tau) \left[X_r(\tau)(I_r - P_{B_0})c_k^{(0)} \right. \right. \\ \quad \left. \left. + \varepsilon G_1(\tau) P_{B_0} c_{k-1}^{(1)} + x_k^{(2)} \right] + R(x_k, \tau, \varepsilon) \\ J_i(z_0, 0) + A_{1i} \left[X_r(\tau_i - 0)(I_r - P_{B_0})c_k^{(0)} \right. \right. \\ \quad \left. \left. + \varepsilon G_1(\tau_i - 0) P_{B_0} c_{k-1}^{(1)} + x_k^{(2)} \right] + R_i(x_k, \varepsilon) \end{bmatrix} (t) + \varepsilon X(t) Q^+ \right. \\
& \quad \times \left[J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + l_1 \left(X_r(\cdot)(I_r - P_{B_0})c_k^{(0)} + \varepsilon G_1(\cdot) P_{B_0} c_{k-1}^{(1)} + x_k^{(2)}(\cdot, \varepsilon) \right) \right. \\
& \quad \left. \left. + R_0(x_k(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right] \right), \\
& x_{k+1}(t, \varepsilon) = X_r(t)(I_r - P_{B_0})c_k^{(0)} + \varepsilon G_1(t) P_{B_0} c_{k-1}^{(1)} + x_{k+1}^{(2)}(t, \varepsilon), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\
& x_0(t, \varepsilon) = x_0^{(2)}(t, \varepsilon) = 0.
\end{aligned} \right. \tag{20}$$

Збіжність ітераційного процесу (20) встановлюється методом мажорантних рівнянь Ляпунова, схему якого описано в [3].

Таким чином, довели таку теорему.

Теорема. Нехай крайова задача з імпульсною дією (I) задовольняє вказаним вище умовам таким чином, що має місце критичний випадок ($\text{rank } Q = n_1 < n$), і відповідна породжувача крайова задача з імпульсною дією

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= A(t)z + f(t), \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta z|_{t=\tau_i} = S_i z + a_i, \quad \tau_i \in [a, b], \quad i \in \mathbb{Z}, \\
lz &= \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m, \quad t \in [a, b],
\end{aligned}$$

при умові

$$P_{Q_d^*} \left\{ \alpha - l \int_a^b K(\cdot, \tau) f(\tau) d\tau - l \sum_{i=1}^p \bar{K}(\cdot, \tau_i) a_i \right\} = 0, \quad d = m - n_1,$$

і тільки при ній має r -параметричну сім'ю ($r = n - n_1$) породжуючих розв'язків

$$z_0(t, c_r) = X_r(t) c_r + \left(G \begin{bmatrix} f \\ a_i \end{bmatrix} \right) (t) + X(t) Q^+ \alpha. \quad (**)$$

Розглянемо випадок

$$P_{B_0} \neq 0, \quad P_{B_0} P_{B_1} = 0.$$

Тоді для кожного значення вектора $c_r = c_r^* \in \mathbb{R}^r$, який задовольняє рівняння для породжуючих амплітуд (*), за умов

$$P_{B_1^*} P_{B_0^*} P_{Q_d^*} = 0,$$

$$\begin{aligned} P_{B_0^*} P_{Q_d^*} \left\{ l_1 x_1^{(2)}(\cdot, \varepsilon) + R_0 \left(x_1^{(2)}(\cdot, \varepsilon), \varepsilon \right) \right. \\ \left. - l \int_a^b K(\cdot, \tau) \left[A_1(\tau) x_1^{(2)}(\tau, \varepsilon) + R \left(x_1^{(2)}(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon \right) \right] d\tau \right. \\ \left. - l \sum_{i=1}^p \bar{K}(\cdot, \tau_i) \left[A_{1i} x_1^{(2)}(\tau_i - 0, \varepsilon) + R_i \left(x_1^{(2)}(\tau_i - 0, \varepsilon), \varepsilon \right) \right] \right\} = 0 \end{aligned}$$

крайова задача з імпульсною дією (2) має єдиний розв'язок $x(t, \varepsilon) : x(\cdot, \varepsilon) \in C^1([a, b]/\{\tau_i\}_I)$, $x(t, \cdot) \in C[\varepsilon]$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, який обертається в нуль при $\varepsilon = 0$. Цей розв'язок можна знайти за допомогою збіжного на $[0, \varepsilon_*]$ ітераційного процесу (20). Крайова задача з імпульсною дією (1) має при цьому єдиний розв'язок $z(t, \varepsilon) : z(\cdot, \varepsilon) \in C^1([a, b]/\{\tau_i\}_I)$, $z(t, \cdot) \in C[\varepsilon]$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]$, який обертається при $\varepsilon = 0$ у породжуючий розв'язок $z_0(t, c_r^*)$ (**). Цей розв'язок можна визначити за допомогою ітераційного процесу (20) і формули

$$z_{k+1}(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r^*) + x_{k+1}(t, \varepsilon), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Таким чином, у цій роботі досліджено питання розв'язності слабконелінійної крайової задачі для диференціальних рівнянь із імпульсною дією (1) у випадку $P_{B_0} \neq 0$, $\text{rank } B_0 < r$, який будемо називати критичним випадком другого порядку. Для таких задач отримано ефективні достатні умови існування та запропоновано збіжний ітераційний процес побудови розв'язків. Показано, що існування розв'язку залежить від умови, визначеної за допомогою нелінійності й першого наближення до шуканого розв'язку. Сформульовано й доведено теорему, яка дозволяє розв'язати поставлену задачу.

Автори висловлюють подяку проф. О. А. Бойчуку за увагу до роботи.

Література

1. А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк, *Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием*, Вища шк., Киев (1987).
2. А. А. Бойчук, Н. А. Перестюк, А. М. Самойленко, *Периодические решения импульсных дифференциальных систем в критических случаях*, Дифференц. уравнения, № 9, 1516–1521 (1991).
3. А. А. Бойчук, *Конструктивные методы анализа краевых задач*, Наук. думка, Киев (1990).
4. А. А. Бойчук, Р. Ф. Хращевская, *Слабонелинейные краевые задачи для дифференциальных систем с импульсным воздействием*, Укр. мат. журн., **45**, № 2, 221–225 (1993).
5. З. П. Ординська, Р. Ф. Овчар, *Крайові задачі для диференціальних систем з імпульсною дією*, Нелін. коливання, **24**, № 3, 373–377 (2021).
6. І. А. Бондар, Р. Ф. Овчар, *Біфуркація розв'язків крайової задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь із виродженим ядром*, Нелін. коливання, **20**, № 4, 465–476 (2017).
7. І. А. Бондар, *Слабконелінійні крайові задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь із імпульсним впливом. Критичний випадок другого порядку*, Нелін. коливання, **22**, № 2, 147–164 (2019); **English translation:** *J. Math. Sci. (N.Y.)*, **249**, № 4, 553–572 (2020); <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04958-z>.

Одержано 22.04.23,
після доопрацювання — 03.06.23