

ЗОБРАЖЕННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ РЯДАМИ ПЕРРОНА, ЇХНЯ ГЕОМЕТРІЯ ТА ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ

Микола Мороз

Інститут математики НАН України

вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна

e-mail: moroznik22@gmail.com

The representation of real numbers from $(0; 1]$ by Perron series (P -representation of numbers) is considered. We find sufficient conditions for the existence and uniqueness of the expansion of a number in the Perron series, reveal the geometric interpretation of the digits of the $\bar{P}$ -representation of numbers in standard and difference forms, describe the topological-metric properties of cylindrical sets, and analyze the differential properties of continuous monotonic functions (projectors of a $\bar{P}$ -representation into another $\bar{P}$ -representation). Sufficient conditions for singularity of these functions are found.

Розглянуто подання та зображення дійсних чисел з $(0; 1]$ рядами Перрона (P -зображення чисел). Знайдено достатні умови існування та єдиності розкладу числа в ряд, з'ясовано геометричний зміст цифр зображення числа у стандартній і різницевій ($\bar{P}$ -зображення) формах, описано топологометричні властивості циліндричних множин. Досліджено диференціальні властивості неперервних монотонних функцій (проекторів одного $\bar{P}$ -зображення в інше). Знайдено достатні умови їхньої сингулярності.

1. Вступ. Різні моделі дійсного числа у формі числового ряду, що дозволяють ототожнювати число з нескінченною послідовністю натуральних чисел, є ефективним засобом розвитку метричної та ймовірнісної теорії дійсних чисел, теорії функцій зі складною локальною структурою, теорії сингулярних розподілів випадкових величин, теорії динамічних систем, фрактальної геометрії та фрактального аналізу. Прикладами таких моделей є s -кові ряди, Q_s , Q_∞ і Q_∞^* -зображення [1–3], ряди Енгеля [4–11], ряди Люрота (додатні та знакозмінні) [12–15], ряди Сильвестера [10, 16], ряди Остроградського – Серпінського – Пірса [4, 6, 17, 18] тощо.

Оскар Перрон у [19] наводить приклад ряду, що є узагальненням згаданих вище рядів Енгеля, Люрота та Сильвестера:

$$\frac{1}{p_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_1 r_2 \dots r_n}{(p_1 - 1)p_1 (p_2 - 1)p_2 \dots (p_n - 1)p_n p_{n+1}}, \quad (1)$$

де $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ — довільна послідовність натуральних чисел, $p_n \in \mathbb{N}$, $p_1 \geq 2$, $p_{n+1} \geq r_n + 1$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Ряд (1) буде:

- рядом Енгеля при $r_n = p_n - 1$;
- модифікованим рядом Енгеля при $r_n = p_n$;
- рядом Люрота при $r_n \equiv 1$;
- рядом Сильвестера при $r_n = (p_n - 1)p_n$.

У роботі [19] Перрон доводить, що ряд (1) є збіжним, його сума є числом з $(0; 1]$ і кожне число з $(0; 1]$ можна подати як суму ряду (1). Проте для кожного $x \in (0; 1]$ таких рядів існує континуальна кількість.

У цій роботі ми запропонували модифікацію ряду (1) та умови, що гарантують єдиність розкладу числа у модифікований ряд (1). Ці умови визначають два класи зображень чисел, що мають “просту” геометрію (метричні й топологічні властивості): P -зображення та його різницеву форму ($\bar{P}$ -зображення). Описано метричні властивості циліндричних множин, породжених цими зображеннями, а також вивчено диференціальні властивості функції, що є проєктором одного $\bar{P}$ -зображення у інше. Знайдено умови, при яких проєктор є сингулярною функцією.

2. Ряди Перрона.

Означення 1. Рядом Перрона будемо називати числовий ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0 r_1 \dots r_n}{(p_1 - 1)p_1(p_2 - 1)p_2 \dots (p_n - 1)p_n p_{n+1}}, \quad (2)$$

де $(r_n)_{n=0}^{\infty}$ — довільна послідовність натуральних чисел, $p_n \in \mathbb{N}$, $p_n \geq r_{n-1} + 1$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Зауваження 1. Далі під дробом $\frac{r_0 r_1 \dots r_n}{(p_1 - 1)p_1(p_2 - 1)p_2 \dots (p_n - 1)p_n p_{n+1}}$ при умові $n = 0$ будемо розуміти дріб $\frac{r_0}{p_1}$.

Лема 1. Для кожної послідовності натуральних чисел $(r_n)_{n=0}^{\infty}$ справджується рівність

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_n}{(r_0 + 1) \dots (r_n + 1)} = 1.$$

Доведення. За допомогою методу математичної індукції можна показати, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ справджується рівність

$$\sum_{n=0}^k \frac{r_n}{(r_0 + 1) \dots (r_n + 1)} = 1 - \frac{1}{(r_0 + 1) \dots (r_k + 1)}.$$

Звідси випливає, що

$$1 - \frac{1}{2^{k+1}} \leq \sum_{n=0}^k \frac{r_n}{(r_0 + 1) \dots (r_n + 1)} < 1.$$

Твердження леми 1 слідує безпосередньо з останньої нерівності.

Лема 2. Ряд Перрона (2) є збіжним, причому його сума є числом з $(0; 1]$.

Доведення. Враховуючи лему 1, маємо

$$\begin{aligned} 0 &< \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0 r_1 \dots r_n}{(p_1 - 1)p_1(p_2 - 1)p_2 \dots (p_n - 1)p_n p_{n+1}} \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0 r_1 \dots r_n}{r_0(r_0 + 1)r_1(r_1 + 1) \dots r_{n-1}(r_{n-1} + 1)(r_n + 1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_n}{(r_0 + 1) \dots (r_n + 1)} = 1. \end{aligned}$$

3. Зображення дійсних чисел рядами Перрона (P -зображення). Циліндричні множини.

Нехай функції $\varphi_n(x_1, \dots, x_n) : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_0 = \text{const} \in \mathbb{N}$. Через P позначатимемо фіксовану послідовність функцій $(\varphi_n)_{n=0}^\infty$.

Означення 2. Нехай число $x \in (0; 1]$ є сумою ряду (2), причому $r_0 = \varphi_0$ і $r_n = \varphi_n(p_1, \dots, p_n)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тоді розклад числа x у ряд (2) будемо називати його P -поданням, а скорочений запис $\Delta_{p_1 p_2 \dots p_n \dots}^P$ — його P -зображенням. Число p_i будемо називати i -ю цифрою P -зображення числа x .

Означення 3. Циліндром рангу k з основою $c_1 c_2 \dots c_k$ P -зображення будемо називати непорожню множину $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_k}^P$ всіх чисел з $(0; 1]$, для яких існує P -зображення вигляду $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_k p_{k+1} p_{k+2} \dots}^P$, тобто

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_k}^P = \left\{ x : x \in (0; 1], x = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_k p_{k+1} p_{k+2} \dots}^P \right\}.$$

Лема 3. Для циліндра $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_k}^P$ рангу k справджуються рівності

$$\inf \Delta_{c_1 c_2 \dots c_k}^P = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{r_0 \dots r_n}{(c_1 - 1)c_1 \dots (c_n - 1)c_n c_{n+1}}, \quad (3)$$

$$\sup \Delta_{c_1 c_2 \dots c_k}^P = \inf \Delta_{c_1 c_2 \dots c_k}^P + \frac{r_0 \dots r_{k-1}}{(c_1 - 1)c_1 \dots (c_k - 1)c_k}, \quad (4)$$

$$|\Delta_{c_1 \dots c_k}^P| = \sup(\Delta_{c_1 \dots c_k}^P) - \inf(\Delta_{c_1 \dots c_k}^P) = \frac{r_0 \dots r_{k-1}}{(c_1 - 1)c_1 \dots (c_k - 1)c_k}, \quad (5)$$

де $r_0 = \varphi_0$ і $r_i = \varphi_i(c_1, \dots, c_i)$ для кожного $i = 1, \dots, k-1$.

Доведення. Доведемо рівність (3) для $k = 1$. Розглянемо циліндр першого рангу $\Delta_{c_1}^P$. Зрозуміло, що число $\frac{r_0}{c_1}$ є нижньою межею циліндра $\Delta_{c_1}^P$. Покажемо, що число $\frac{r_0}{c_1}$ є точною нижньою межею циліндра $\Delta_{c_1}^P$. Для цього достатньо довести, що в циліндрі $\Delta_{c_1}^P$ містяться числа, як завгодно близькі до числа $\frac{r_0}{c_1}$.

Розглянемо ряд Перрона (2), у якому послідовності $(r_n)_{n=0}^\infty$ і $(p_n)_{n=1}^\infty$ визначені рекурентно таким чином: $r_0 = \varphi_0$, $p_1 = c_1$, $r_n = \varphi_n(p_1, \dots, p_n)$, $p_{n+1} = r_n q + 1$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, де $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$. Позначимо суму такого ряду через x_q . Очевидно, що $x_q \in \Delta_{c_1}^P$, причому

$$\begin{aligned} x_q &= \frac{r_0}{c_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_0 r_1 \dots r_n}{(c_1 - 1)c_1 \cdot r_1 q \cdot (r_1 q + 1) \dots r_{n-1} q \cdot (r_{n-1} q + 1)(r_n q + 1)} \\ &\leq \frac{r_0}{c_1} + \frac{r_0}{(c_1 - 1)c_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_1 \dots r_n}{r_1^2 q^2 \dots r_{n-1}^2 q^2 \cdot r_n q} \\ &= \frac{r_0}{c_1} + \frac{r_0}{(c_1 - 1)c_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_1 \dots r_n q^{2n-1}} \leq \frac{r_0}{c_1} + \frac{r_0}{(c_1 - 1)c_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^{2n-1}} \\ &= \frac{r_0}{c_1} + \frac{r_0}{(c_1 - 1)c_1} \frac{q}{q^2 - 1} \leq \frac{r_0}{c_1} + \frac{r_0}{(c_1 - 1)c_1} \frac{1}{q - 1}. \end{aligned}$$

Оскільки $\frac{r_0}{c_1} + \frac{r_0}{(c_1-1)c_1} \frac{1}{q-1} \rightarrow \frac{r_0}{c_1}$ при $q \rightarrow \infty$, то $x_q \rightarrow \frac{r_0}{c_1}$ при $q \rightarrow \infty$. Отже, $\inf \Delta_{c_1}^P = \frac{r_0}{c_1}$. Таким чином, рівність (3) доведено для випадку $k = 1$.

Доведемо рівність (4) для $k = 1$. Враховуючи, що $p_n \geq r_{n-1} + 1$, а також лему 1, отримаємо

$$\begin{aligned} \Delta_{c_1 p_2 p_3 \dots}^P &= \frac{r_0}{c_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_0 r_1 \dots r_n}{(c_1-1)c_1(p_2-1)p_2 \dots (p_n-1)p_n p_{n+1}} \\ &\leq \frac{r_0}{c_1} + \frac{r_0}{(c_1-1)c_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_1 \dots r_n}{r_1(r_1+1) \dots r_{n-1}(r_{n-1}+1)(r_n+1)} \\ &= \frac{r_0}{c_1} + \frac{r_0}{(c_1-1)c_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{(r_1+1) \dots (r_n+1)} = \inf \Delta_{c_1}^P + \frac{r_0}{(c_1-1)c_1}. \end{aligned}$$

При цьому верхня оцінка завжди досягається й дорівнює сумі ряду, в якому послідовності $(r_n)_{n=0}^{\infty}$ і $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ визначено рекурентно у такий спосіб: $r_0 = \varphi_0$, $p_1 = c_1$, $r_n = \varphi_n(p_1, \dots, p_n)$, $p_{n+1} = r_n + 1$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Отже, $\sup \Delta_{c_1}^P = \inf \Delta_{c_1}^P + \frac{r_0}{(c_1-1)c_1}$. Таким чином, рівність (4) доведено для випадку $k = 1$.

Доведення рівностей (3) і (4) для $k \geq 2$ аналогічні до доведень цих рівностей при $k = 1$. Рівність (5) випливає з рівностей (3) і (4).

Зауваження 2. З доведення лему 3 випливає, що точна нижня межа циліндра йому не належить, а точна верхня межа — належить.

Наслідок 1. Для циліндра $\Delta_{c_1 \dots c_k}^P$ рангу $k \geq 2$ справджуються рівності

$$\inf \Delta_{c_1 \dots c_k}^P = \inf \Delta_{c_1 \dots c_{k-1}}^P + \frac{r_0 r_1 \dots r_{k-1}}{(c_1-1)c_1 \dots (c_{k-1}-1)c_{k-1}c_k}, \quad (6)$$

$$\sup \Delta_{c_1 \dots c_k}^P = \inf \Delta_{c_1 \dots c_{k-1}}^P + \frac{r_0 r_1 \dots r_{k-1}}{(c_1-1)c_1 \dots (c_{k-1}-1)c_{k-1}(c_k-1)}, \quad (7)$$

де $r_0 = \varphi_0$ і $r_i = \varphi_i(c_1, \dots, c_i)$ для кожного $i = 1, \dots, k-1$.

Наслідок 2. Для циліндрів рангу n і кожного $k \geq r_{n-1} + 1$ виконується співвідношення $\inf \Delta_{c_1 \dots c_{n-1}k}^P = \sup \Delta_{c_1 \dots c_{n-1}[k+1]}^P$.

Лема 4. Для довільної послідовності $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ такої, що $p_n \geq r_{n-1} + 1$, де $r_{n-1} = \varphi_{n-1}(p_1, \dots, p_{n-1})$,

$$|\Delta_{p_1 \dots p_n}^P| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Доведення. Нехай послідовність $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ задовольняє умови цієї лему. Тоді згідно з формулою (5) маємо

$$\begin{aligned} 0 < |\Delta_{p_1 \dots p_n}^P| &= \frac{r_0 \dots r_{n-1}}{(p_1-1)p_1 \dots (p_n-1)p_n} \\ &\leq \frac{r_0 \dots r_{n-1}}{r_0(r_0+1) \dots r_{n-1}(r_{n-1}+1)} = \frac{1}{(r_0+1) \dots (r_{n-1}+1)} \leq \frac{1}{2^n} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Тому $|\Delta_{p_1 \dots p_n}^P| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Лема 5. Для довільної послідовності P функцій φ_i , довільних $x \in (0; 1]$ і $n \in \mathbb{N}$ існує єдиний циліндр $\Delta_{p_1 \dots p_n}^P$ рангу n такий, що

$$\inf \Delta_{p_1 \dots p_n}^P < x \leq \sup \Delta_{p_1 \dots p_n}^P. \quad (8)$$

Доведення. Скористаємося методом математичної індукції. Зафіксуємо послідовність P функцій φ_i і число $x \in (0; 1]$.

База індукції. Нехай $n = 1$. Нерівність $\inf \Delta_{p_1}^P < x \leq \sup \Delta_{p_1}^P$ з урахуванням рівностей (3) і (4) рівносильна нерівності

$$p_1 > \frac{r_0}{x} \geq p_1 - 1, \quad r_0 = \varphi_0.$$

Очевидно, що існує єдине число $p_1 \geq r_0 + 1$ таке, що виконується остання нерівність. Позначимо це число як p'_1 . Тоді $\Delta_{p'_1}^P$ — єдиний циліндр першого рангу, що задовольняє нерівність (8).

Можемо записати, що $x = \inf \Delta_{p'_1}^P + x_1 = \frac{r_0}{p'_1} + x_1$. При цьому

$$0 < x_1 \leq \sup \Delta_{p'_1}^P - \inf \Delta_{p'_1}^P = \frac{r_0}{(p'_1 - 1)p'_1}.$$

Перевіримо твердження для $n = 2$. Нехай $\Delta_{p_1 p_2}^P$ — деякий циліндр другого рангу. Оскільки циліндр $\Delta_{p_1 p_2}^P$ є підмножиною циліндра $\Delta_{p'_1}^P$, то

$$\inf \Delta_{p_1}^P \leq \inf \Delta_{p_1 p_2}^P \quad \text{і} \quad \sup \Delta_{p_1}^P \geq \sup \Delta_{p_1 p_2}^P.$$

Тому з нерівності $\inf \Delta_{p_1 p_2}^P < x \leq \sup \Delta_{p_1 p_2}^P$ випливає нерівність $\inf \Delta_{p'_1}^P < x \leq \sup \Delta_{p'_1}^P$. Тоді завдяки доведеному вище $p_1 = p'_1$, а отже, $r_1 = \varphi_1(p'_1)$.

Згідно з рівностями (3) і (4), а також попередніми домовленостями нерівність

$$\inf \Delta_{p'_1 p_2}^P < x \leq \sup \Delta_{p'_1 p_2}^P$$

рівносильна таким нерівностям:

$$\begin{aligned} \frac{r_0}{p'_1} + \frac{r_0 r_1}{(p'_1 - 1)p'_1 p_2} &< \frac{r_0}{p'_1} + x_1 \leq \frac{r_0}{p'_1} + \frac{r_0 r_1}{(p'_1 - 1)p'_1 p_2} + \frac{r_0 r_1}{(p'_1 - 1)p'_1 (p_2 - 1)p_2}, \\ \frac{r_0 r_1}{(p'_1 - 1)p'_1 p_2} &< x_1 \leq \frac{r_0 r_1}{(p'_1 - 1)p'_1 (p_2 - 1)}, \\ p_2 &> \frac{r_0 r_1}{(p'_1 - 1)p'_1 x_1} \geq p_2 - 1. \end{aligned}$$

Для того щоб стверджувати існування та єдиність значення $p_2 \geq r_1 + 1$, при якому виконується остання нерівність, достатньо показати, що $\frac{r_0 r_1}{(p'_1 - 1)p'_1 x_1} \geq r_1$. А ця умова рівносильна нерівності $x_1 \leq \frac{r_0}{(p'_1 - 1)p'_1}$, істинність якої встановлено вище. Тому таке натуральне

число p_2 існує та єдине. Позначимо його як p'_2 . Тоді $\Delta_{p'_1 p'_2}^P$ — єдиний циліндр другого рангу, що задовольняє нерівність (8).

Припущення індукції. Припустимо, що при $n = k$ існує єдиний циліндр $\Delta_{p'_1 \dots p'_k}^P$ рангу k такий, що

$$\inf \Delta_{p'_1 \dots p'_k}^P < x \leq \sup \Delta_{p'_1 \dots p'_k}^P.$$

Нехай $x_k = x - \inf \Delta_{p'_1 \dots p'_k}^P$. Тоді з припущення індукції випливає, що

$$0 < x_k \leq \sup \Delta_{p'_1 \dots p'_k}^P - \inf \Delta_{p'_1 \dots p'_k}^P = \frac{r_0 r_1 \dots r_{k-1}}{(p'_1 - 1) p'_1 \dots (p'_k - 1) p'_k},$$

де $r_0 = \varphi_0$ і $r_i = \varphi_i(p'_1, \dots, p'_i)$ для всіх $i = 1, \dots, k-1$.

Крок індукції. Нехай $n = k+1$ і $\Delta_{p'_1 \dots p'_k p'_{k+1}}^P$ — деякий циліндр $(k+1)$ -го рангу. Тоді, аналогічно до випадку при $n = 2$, з нерівності $\inf \Delta_{p'_1 \dots p'_k p'_{k+1}}^P < x \leq \sup \Delta_{p'_1 \dots p'_k p'_{k+1}}^P$ випливає нерівність $\inf \Delta_{p'_1 \dots p'_k}^P < x \leq \sup \Delta_{p'_1 \dots p'_k}^P$. Звідси маємо, що $p_1 = p'_1, \dots, p_k = p'_k$, а отже, $r_0 = \varphi_0$ і $r_i = \varphi_i(p'_1, \dots, p'_i)$ для всіх $i = 1, \dots, k$.

Тепер залишилося довести, що існує єдине значення $p_{k+1} \geq r_k + 1$ таке, що

$$\inf \Delta_{p'_1 \dots p'_k p'_{k+1}}^P < x \leq \sup \Delta_{p'_1 \dots p'_k p'_{k+1}}^P.$$

З урахуванням припущення індукції, а також рівностей (6) і (7) остання нерівність рівносильна нерівностям

$$\begin{aligned} \inf \Delta_{p'_1 \dots p'_k}^P + \frac{r_0 r_1 \dots r_k}{(p'_1 - 1) p'_1 \dots (p'_k - 1) p'_k p_{k+1}} \\ < x \leq \inf \Delta_{p'_1 \dots p'_k}^P + \frac{r_0 r_1 \dots r_k}{(p'_1 - 1) p'_1 \dots (p'_k - 1) p'_k (p_{k+1} - 1)}, \\ \frac{r_0 r_1 \dots r_k}{(p'_1 - 1) p'_1 \dots (p'_k - 1) p'_k p_{k+1}} < x_k \leq \frac{r_0 r_1 \dots r_k}{(p'_1 - 1) p'_1 \dots (p'_k - 1) p'_k (p_{k+1} - 1)}, \\ p_{k+1} > \frac{r_0 r_1 \dots r_k}{(p'_1 - 1) p'_1 \dots (p'_k - 1) p'_k x_k} \geq p_{k+1} - 1. \end{aligned}$$

Щоб стверджувати існування та єдиність значення $p_{k+1} \geq r_k + 1$, при якому виконується остання нерівність, достатньо показати, що

$$\frac{r_0 r_1 \dots r_k}{(p'_1 - 1) p'_1 \dots (p'_k - 1) p'_k x_k} \geq r_k.$$

А ця умова рівносильна нерівності $x_k \leq \frac{r_0 r_1 \dots r_{k-1}}{(p'_1 - 1) p'_1 \dots (p'_k - 1) p'_k}$, яка вище випливала з припущення індукції. Тому таке натуральне число p_{k+1} існує та єдине. Позначимо його як p'_{k+1} . Тоді $\Delta_{p'_1 \dots p'_k p'_{k+1}}^P$ — єдиний циліндр $(k+1)$ -го рангу, що задовольняє нерівність (8).

Тому згідно з принципом математичної індукції для кожного $n \in \mathbb{N}$ і довільного $x \in (0; 1]$ існує єдиний циліндр $\Delta_{p'_1 \dots p'_n}^P$ рангу n такий, що

$$\inf \Delta_{p'_1 \dots p'_n}^P < x \leq \sup \Delta_{p'_1 \dots p'_n}^P.$$

Теорема 1. При довільній послідовності P функцій φ_i кожен $x \in (0; 1]$ має єдине P -подання, тобто існує єдина послідовність натуральних чисел $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ така, що

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0 r_1 \dots r_n}{(p_1 - 1)p_1 \dots (p_n - 1)p_n p_{n+1}} \equiv \Delta_{p_1 \dots p_n \dots}^P,$$

де $r_0 = \varphi_0$, $r_n = \varphi_n(p_1, \dots, p_n)$ і $p_n \geq r_{n-1} + 1$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Доведення. Існування. З міркувань, наведених у доведенні лемі 5, слідує, що для довільного набору P функцій φ_i , довільних фіксованих $n \in \mathbb{N}$ і $x \in (0; 1]$ число p_n в основах циліндрів $\Delta_{p_1 \dots p_k}^P$ рангу $k \geq n$, що задовольняють нерівність (8), є одним і тим же. Таким чином, маємо, що послідовність функцій P і число x породжують деяку послідовність $(p_n)_{n=1}^{\infty}$. Покажемо, що $\Delta_{p_1 \dots p_n \dots}^P = x$.

Припустимо, що $\Delta_{p_1 \dots p_n \dots}^P \neq x$. Тоді для довільного $k \in \mathbb{N}$ маємо $\Delta_{p_1 \dots p_n \dots}^P \in \Delta_{p_1 \dots p_k}^P$, а отже, $\inf \Delta_{p_1 \dots p_k}^P < \Delta_{p_1 \dots p_n \dots}^P \leq \sup \Delta_{p_1 \dots p_k}^P$. Враховуючи цю нерівність і нерівність $\inf \Delta_{p_1 \dots p_k}^P < x \leq \sup \Delta_{p_1 \dots p_k}^P$, маємо, що при кожному $k \in \mathbb{N}$:

$$0 < |x - \Delta_{p_1 \dots p_n \dots}^P| < \sup \Delta_{p_1 \dots p_k}^P - \inf \Delta_{p_1 \dots p_k}^P = |\Delta_{p_1 \dots p_k}^P|.$$

Але згідно з лемою 4 при достатньо великих k значення $|\Delta_{p_1 \dots p_k}^P|$ може бути як завгодно близьким до нуля, а $|x - \Delta_{p_1 \dots p_n \dots}^P|$ є фіксованою додатною величиною. Отримали суперечність, а тому припущення хибне.

Отже, $\Delta_{p_1 \dots p_n \dots}^P = x$. Звідси слідує, що для кожного числа $x \in (0; 1]$ існує своє P -подання при довільній послідовності функцій P .

Єдиність. Припустимо, що для деякої послідовності функцій P та деякого x існує два різних P -подання. Тоді нехай $x = \Delta_{p_1 \dots p_n \dots}^P = \Delta_{p'_1 \dots p'_n \dots}^P$.

Нехай натуральне число k таке, що $p_i = p'_i$ для всіх $i < k$ і $p_k \neq p'_k$. Тоді маємо, що $x \in \Delta_{p_1 \dots p_{k-1} p_k}^P$ й одночасно з цим $x \in \Delta_{p_1 \dots p_{k-1} p'_k}^P$, а отже,

$$\inf \Delta_{p_1 \dots p_{k-1} p_k}^P < x \leq \sup \Delta_{p_1 \dots p_{k-1} p_k}^P,$$

$$\inf \Delta_{p_1 \dots p_{k-1} p'_k}^P < x \leq \sup \Delta_{p_1 \dots p_{k-1} p'_k}^P.$$

Але це суперечить лемі 5. Отримали суперечність, а тому припущення хибне. Отже, кожне число $x \in (0; 1]$ має єдине P -подання для кожної послідовності функцій P .

Наслідок 3. Циліндр $\Delta_{p_1 \dots p_n}^P$ є проміжком вигляду $(a; b]$. При цьому довжина цього проміжку (міра Лебега циліндра $\Delta_{p_1 \dots p_n}^P$) дорівнює $|\Delta_{p_1 \dots p_n}^P|$.

Наслідок 4. Нехай $x = \Delta_{p_1 \dots p_n \dots}^P$. Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \Delta_{p_1 \dots p_n}^P = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \Delta_{p_1 \dots p_n}^P = x.$$

Наслідок 5. Якщо $\Delta_{b_1 \dots b_n}^P$ і $\Delta_{c_1 \dots c_m}^P$ — два різні циліндри, то можливі тільки два такі випадки:

- $\Delta_{b_1 \dots b_n}^P \cap \Delta_{c_1 \dots c_m}^P = \emptyset$, якщо існує натуральне $k \leq \min\{n, m\}$ таке, що $b_i = c_i$ для всіх $i < k$ і $b_k \neq c_k$;
- $\Delta_{b_1 \dots b_n}^P \subset \Delta_{c_1 \dots c_m}^P$, якщо $n > m$ і $b_i = c_i$ для всіх $i \leq m$.

Наслідок 6. Справджуються рівності

$$(0; 1] = \bigcup_{i=r_0+1}^{\infty} \Delta_i^P, \quad (9)$$

$$\Delta_{p_1 \dots p_n}^P = \bigcup_{i=r_n+1}^{\infty} \Delta_{p_1 \dots p_n i}^P, \quad (10)$$

де $r_0 = \varphi_0$ і $r_n = \varphi_n(p_1, \dots, p_n)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Наслідок 7. Справджуються рівності

$$\sum_{i=r_0+1}^{\infty} |\Delta_i^P| = 1, \quad (11)$$

$$|\Delta_{p_1 \dots p_n}^P| = \sum_{i=r_n+1}^{\infty} |\Delta_{p_1 \dots p_n i}^P|, \quad (12)$$

де $r_0 = \varphi_0$ і $r_n = \varphi_n(p_1, \dots, p_n)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Наслідок 8 (основне метричне співвідношення). Для всіх $i \geq r_n + 1$

$$\frac{|\Delta_{p_1 \dots p_n i}^P|}{|\Delta_{p_1 \dots p_n}^P|} = \frac{r_n}{(i-1)i},$$

де $r_n = \varphi_n(p_1, \dots, p_n)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 2. Нехай $x = \Delta_{p_1 \dots p_n \dots}^P$ і $x' = \Delta_{p'_1 \dots p'_n \dots}^P$, а $k \in \mathbb{N}$ таке, що $p_i = p'_i$ при всіх $i < k$ і $p_k \neq p'_k$. Тоді, для того щоб $x > x'$, необхідно й достатньо, щоб $p_k < p'_k$.

Доведення. Достатність. Нехай $k \in \mathbb{N}$ таке, що $p_i = p'_i$ при всіх $i < k$ і $p_k < p'_k$.

При $k = 1$ маємо

$$x = \Delta_{p_1 p_2 \dots}^P > \inf \Delta_{p_1}^P = \frac{r_0}{p_1}, \quad x' = \Delta_{p'_1 p'_2 \dots}^P \leq \sup \Delta_{p'_1}^P = \frac{r_0}{p'_1 - 1}.$$

Звідси одержуємо

$$x > \frac{r_0}{p_1} \geq \frac{r_0}{p'_1 - 1} \geq x'.$$

Якщо $k \geq 2$, то згідно з рівностями (6), (7) отримуємо

$$\begin{aligned} x &= \Delta_{p_1 \dots p_{k-1} p_k \dots}^P > \inf \Delta_{p_1 \dots p_{k-1} p_k}^P \\ &= \inf \Delta_{p_1 \dots p_{k-1}}^P + \frac{r_0 r_1 \dots r_{k-1}}{(p_1 - 1) p_1 \dots (p_{k-1} - 1) p_{k-1} p_k}, \\ x' &= \Delta_{p_1 \dots p_{k-1} p'_k \dots}^P \leq \sup \Delta_{p_1 \dots p_{k-1} p'_k}^P \\ &= \inf \Delta_{p_1 \dots p_{k-1}}^P + \frac{r_0 r_1 \dots r_{k-1}}{(p_1 - 1) p_1 \dots (p_{k-1} - 1) p_{k-1} (p'_k - 1)}. \end{aligned}$$

Оскільки $p_i = p'_i$ при всіх $i < k$, то значення $r_1, \dots, r_{k-1}$ для чисел x і x' однакові.

Звідси маємо, що

$$\begin{aligned} x &> \inf \Delta_{p_1 \dots p_{k-1}}^P + \frac{r_0 r_1 \dots r_{k-1}}{(p_1 - 1) p_1 \dots (p_{k-1} - 1) p_{k-1} p_k} \\ &\geq \inf \Delta_{p_1 \dots p_{k-1}}^P + \frac{r_0 r_1 \dots r_{k-1}}{(p_1 - 1) p_1 \dots (p_{k-1} - 1) p_{k-1} (p'_k - 1)} \geq x'. \end{aligned}$$

Достатність доведено.

Необхідність. Нехай $x > x'$, тобто $\Delta_{p_1 \dots p_{k-1} p_k}^P > \Delta_{p_1 \dots p_{k-1} p'_k}^P$. Припустимо, що при цьому $p_k > p'_k$. Але згідно з доведеним вище (достатність) слідує, що $x < x'$. Одержали суперечність, а тому припущення хибне. Отже, з нерівності $x > x'$ слідує, що $p_k < p'_k$.

4. Різницева форма P -зображення ($\bar{P}$ -зображення).

Означення 4. Різницеvim поданням ряду Перрона будемо називати запис ряду (2) у вигляді

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0 r_1 \dots r_n}{(r_0 + g_1 - 1)(r_0 + g_1) \dots (r_{n-1} + g_n - 1)(r_{n-1} + g_n)(r_n + g_{n+1})}, \quad (13)$$

де $g_n = p_n - r_{n-1}$ і $g_n \geq 1$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Різницева форма запису (13) ряду Перрона (2) є лише перепозначенням його елементів. Проте вона має одну важливу перевагу. У формі запису (2) на цифри p_n накладено умови, що залежать від числа r_{n-1} . Натомість у різницеvій формі запису (13) жодних умов на цифри g_n не накладають і вони можуть бути довільними натуральними числами.

Нехай P — послідовність функцій $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$. Розглянемо функції $\bar{\varphi}_n$ такі, що $\bar{\varphi}_0 = \varphi_0 = \text{const}$ і

$$\bar{\varphi}_n(g_1, \dots, g_n) = \varphi_n(p_1, \dots, p_n),$$

де $r_0 = \varphi_0$, $p_n = r_{n-1} + g_n$, $r_n = \varphi_n(p_1, \dots, p_n)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Послідовність функцій $(\bar{\varphi}_n)_{n=0}^{\infty}$ позначимо як $\bar{P}$.

Означення 5. Нехай число $x \in (0; 1]$ є сумою ряду (13), причому $r_0 = \bar{\varphi}_0$ і $r_n = \bar{\varphi}_n(g_1, \dots, g_n)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тоді розклад числа x у ряд (13) будемо називати його $\bar{P}$ -поданням, а скорочений запис $\Delta_{g_1 g_2 \dots g_n \dots}^{\bar{P}}$ ряду (13) будемо називати $\bar{P}$ -зображенням числа x . Число g_i називатимемо i -ю цифрою $\bar{P}$ -зображення числа x .

Зауваження 3. Якщо послідовність $\bar{P}$ функцій $\bar{\varphi}_n$ породжена послідовністю P функцій φ_n , то $\bar{P}$ -зображення $\Delta_{g_1 g_2 \dots g_n \dots}^{\bar{P}}$ і P -зображення $\Delta_{p_1 p_2 \dots p_n \dots}^P$ числа x є перекодуваннями один одного, що пов'язані формулами $p_n = r_{n-1} + g_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, де $r_0 = \varphi_0 = \bar{\varphi}_0$ і $r_n = \bar{\varphi}_n(g_1, \dots, g_n) = \varphi_n(p_1, \dots, p_n)$.

Означення циліндра для $\bar{P}$ -зображення аналогічне до означення циліндра P -зображення. Всі властивості $\bar{P}$ -зображення та циліндрів аналогічні до відповідних властивостей P -зображення, а всі рівності лише змінюють свою форму запису завдяки підстановці $p_n = r_{n-1} + g_n$.

Наслідок 9. Нехай $x = \Delta_{g_1 \dots g_n \dots}^{\bar{P}}$ і $x' = \Delta_{g'_1 \dots g'_n \dots}^{\bar{P}}$, а $k \in \mathbb{N}$ таке, що $g_i = g'_i$ при всіх $i < k$ і $g_k \neq g'_k$. Тоді, для того щоб $x > x'$, необхідно й достатньо, щоб $g_k < g'_k$.

Твердження впливає безпосередньо з теореми 2.

5. Проектор між $\bar{P}$ -зображеннями.

Означення 6. Нехай $\bar{P}_1$ і $\bar{P}_2$ — дві різні послідовності функцій $\bar{\varphi}_n^{(1)}$ і $\bar{\varphi}_n^{(2)}$ відповідно, $x = \Delta_{g_1 g_2 \dots g_n \dots}^{\bar{P}_1} \in (0; 1]$. Функцію $f = f[\bar{P}_1; \bar{P}_2] : (0; 1] \rightarrow (0; 1]$ таку, що

$$f(x) = f\left(\Delta_{g_1 g_2 \dots g_n \dots}^{\bar{P}_1}\right) = \Delta_{g_1 g_2 \dots g_n \dots}^{\bar{P}_2},$$

називатимемо проектором з $\bar{P}_1$ -зображення у $\bar{P}_2$ -зображення.

Лема 6. Для довільних послідовностей функцій $\bar{P}_1$ і $\bar{P}_2$ проектор $f[\bar{P}_1; \bar{P}_2]$ є зростаючою на $(0; 1]$ функцією.

Доведення. Нехай $x_1 = \Delta_{g_1 g_2 \dots g_n \dots}^{\bar{P}_1}$, $x_2 = \Delta_{g'_1 g'_2 \dots g'_n \dots}^{\bar{P}_1}$, $x_1 > x_2$ і $k \in \mathbb{N}$ таке, що $g_i = g'_i$ при всіх $i < k$ і $g_k \neq g'_k$. Тоді згідно з наслідком 9 $g_k < g'_k$. Але завдяки цьому ж наслідку

$$f(x_1) = \Delta_{g_1 g_2 \dots g_n \dots}^{\bar{P}_2} > \Delta_{g'_1 g'_2 \dots g'_n \dots}^{\bar{P}_2} = f(x_2).$$

Отже, проектор $f[\bar{P}_1; \bar{P}_2]$ є зростаючою на $(0; 1]$ функцією.

Лема 7. Для довільних послідовностей функцій $\bar{P}_1$ і $\bar{P}_2$: $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0$.

Доведення. Нехай $(x_n)_{n=1}^\infty$ — деяка довільна послідовність така, що $x_n = \Delta_{g_1^{(n)} \dots g_k^{(n)} \dots}^{\bar{P}_1}$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Оскільки

$$x_n = \Delta_{g_1^{(n)} \dots g_k^{(n)} \dots}^{\bar{P}_1} > \inf \Delta_{g_1^{(n)}}^{\bar{P}_1} = \frac{r_0}{r_0 + g_1^{(n)}} > 0,$$

то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_0}{r_0 + g_1^{(n)}} = 0$, а тому $\lim_{n \rightarrow \infty} g_1^{(n)} = \infty$.

Нехай послідовність $(y_n)_{n=1}^\infty$ така, що $y_n = f(x_n)$. Тоді

$$0 < y_n = \Delta_{g_1^{(n)} \dots g_k^{(n)} \dots}^{\bar{P}_2} < \sup \Delta_{g_1^{(n)}}^{\bar{P}_2} = \frac{r_0}{r_0 + g_1^{(n)} - 1} \rightarrow 0.$$

Отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, а отже, $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0$.

Теорема 3. Для довільних послідовностей функцій $\bar{P}_1$ і $\bar{P}_2$ проектор $f[\bar{P}_1; \bar{P}_2]$ є неперервною функцією на всій області визначення.

Доведення. Зрозуміло, що проектор f є монотонним сюр'єктивним відображенням проміжку $(0; 1]$ на себе. Відомо, що монотонна функція може мати розриви тільки першого роду. Проте наявність такого розриву у проектора f суперечить його сюр'єктивності. Звідси слідує, що проектор f є неперервною на $(0; 1]$ функцією.

6. Умови сингулярності проектора.

Лема 8. Для довільних послідовностей функцій $\bar{P}_1$ і $\bar{P}_2$ проектор $f[\bar{P}_1; \bar{P}_2]$ має скінченну похідну майже скрізь на $(0; 1)$ (у розумінні міри Лебега).

Доведення. Покладемо $f(0) = 0$. Тоді з урахуванням лем 6, 7 і теореми 3 доведена на такий спосіб функція буде зростаючою та неперервною на відрізку $[0; 1]$. Тому ця функція, а отже, й проектор f , матимуть скінченну похідну майже скрізь всередині відрізка $[0; 1]$.

Означення 7. Циліндричною $\bar{P}$ -похідною $\mathfrak{C}_{\bar{P}} f(x_0)$ деякої функції f у точці $x_0 = \Delta_{g_1 \dots g_n \dots}^{\bar{P}}$ називається границя

$$\mathfrak{C}_{\bar{P}} f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\sup \Delta_{g_1 \dots g_n}^{\bar{P}}\right) - f\left(\inf \Delta_{g_1 \dots g_n}^{\bar{P}}\right)}{\left|\Delta_{g_1 \dots g_n}^{\bar{P}}\right|}.$$

Лема 9. Якщо деяка функція f у точці $x_0 \in (0; 1)$ має класичну похідну $f'(x_0)$, то у точці x_0 існує циліндрична $\overline{P}$ -похідна $\mathfrak{E}_{\overline{P}}f(x_0)$, причому $f'(x_0) = \mathfrak{E}_{\overline{P}}f(x_0)$.

Доведення. Не складно показати, що коли у точці x_0 існує класична похідна функції f , тобто існує границя $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$, тоді існують також односторонні похідні у точці x_0 і границя $\lim_{\substack{x' > x_0 > x'' \\ x' - x'' \rightarrow 0}} \frac{f(x') - f(x'')}{x' - x''}$, причому всі вони рівні класичній похідній функції f у точці x_0 .

Нехай $x = \Delta_{g_1 \dots g_n}^{\overline{P}} \in (0; 1)$. Згідно з лемою 4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup \Delta_{g_1 \dots g_n}^{\overline{P}} - \inf \Delta_{g_1 \dots g_n}^{\overline{P}} \right) = 0.$$

Тоді якщо x_0 є кінцем циліндра, то $\mathfrak{E}_{\overline{P}}f(x_0)$ є односторонньою похідною. Якщо ж x_0 не є кінцем жодного з циліндрів, то $\mathfrak{E}_{\overline{P}}f(x_0)$ є границею типу $\lim_{\substack{x' > x_0 > x'' \\ x' - x'' \rightarrow 0}} \frac{f(x') - f(x'')}{x' - x''}$ при $x' = \sup \Delta_{g_1 g_2 \dots g_n}^{\overline{P}}$ і $x'' = \inf \Delta_{g_1 g_2 \dots g_n}^{\overline{P}}$.

Отже, якщо функція f диференційовна у точці x_0 , то у точці x_0 існує циліндрична $\overline{P}$ -похідна $\mathfrak{E}_{\overline{P}}f(x_0)$, причому $f'(x_0) = \mathfrak{E}_{\overline{P}}f(x_0)$.

Лема 10. Циліндрична $\overline{P}_1$ -похідна $\mathfrak{E}_{\overline{P}_1}f(x)$ проєктора f у точці $x = \Delta_{g_1 \dots g_n}^{\overline{P}_1}$ має вигляд

$$\mathfrak{E}_{\overline{P}_1}f(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{r_{k-1}^{(2)} \left(r_{k-1}^{(1)} + g_k - 1 \right) \left(r_{k-1}^{(1)} + g_k \right)}{r_{k-1}^{(1)} \left(r_{k-1}^{(2)} + g_k - 1 \right) \left(r_{k-1}^{(2)} + g_k \right)}, \quad (14)$$

де $r_0^{(1)} = \overline{\varphi}_0^{(1)}$, $r_0^{(2)} = \overline{\varphi}_0^{(2)}$, $r_k^{(1)} = \overline{\varphi}_k^{(1)}(g_1, \dots, g_k)$ і $r_k^{(2)} = \overline{\varphi}_k^{(2)}(g_1, \dots, g_k)$.

Доведення. Нехай $f(\Delta_{g_1 \dots g_n}^{\overline{P}_1})$ — образ циліндра $\Delta_{g_1 \dots g_n}^{\overline{P}_1}$. Зрозуміло, що тоді

$$f(\Delta_{g_1 \dots g_n}^{\overline{P}_1}) = \Delta_{g_1 \dots g_n}^{\overline{P}_2}.$$

Оскільки проєктор є неперервною функцією, то

$$f\left(\sup \Delta_{g_1 \dots g_n}^{\overline{P}_1}\right) = \sup f\left(\Delta_{g_1 \dots g_n}^{\overline{P}_1}\right) = \sup \Delta_{g_1 \dots g_n}^{\overline{P}_2},$$

$$f\left(\inf \Delta_{g_1 \dots g_n}^{\overline{P}_1}\right) = \inf f\left(\Delta_{g_1 \dots g_n}^{\overline{P}_1}\right) = \inf \Delta_{g_1 \dots g_n}^{\overline{P}_2}.$$

А тому

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{\overline{P}_1}f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sup \Delta_{g_1 \dots g_n}^{\overline{P}_2} - \inf \Delta_{g_1 \dots g_n}^{\overline{P}_2}}{\left| \Delta_{g_1 \dots g_n}^{\overline{P}_1} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \Delta_{g_1 \dots g_n}^{\overline{P}_2} \right|}{\left| \Delta_{g_1 \dots g_n}^{\overline{P}_1} \right|} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_0^{(2)} \dots r_{n-1}^{(2)} \left(r_0^{(1)} + g_1 - 1 \right) \left(r_0^{(1)} + g_1 \right) \dots \left(r_{n-1}^{(1)} + g_n - 1 \right) \left(r_{n-1}^{(1)} + g_n \right)}{\left(r_0^{(2)} + g_1 - 1 \right) \left(r_0^{(2)} + g_1 \right) \dots \left(r_{n-1}^{(2)} + g_n - 1 \right) \left(r_{n-1}^{(2)} + g_n \right) r_0^{(1)} \dots r_{n-1}^{(1)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{r_{k-1}^{(2)} (r_{k-1}^{(1)} + g_k - 1) (r_{k-1}^{(1)} + g_k)}{r_{k-1}^{(1)} (r_{k-1}^{(2)} + g_k - 1) (r_{k-1}^{(2)} + g_k)} \\
&= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{r_{k-1}^{(2)} (r_{k-1}^{(1)} + g_k - 1) (r_{k-1}^{(1)} + g_k)}{r_{k-1}^{(1)} (r_{k-1}^{(2)} + g_k - 1) (r_{k-1}^{(2)} + g_k)}.
\end{aligned}$$

Наслідок 10. Якщо проєктор $f[\bar{P}_1; \bar{P}_2]$ має у точці $x_0 = \Delta_{g_1 \dots g_n \dots}^{\bar{P}_1} \in (0; 1)$ класичну похідну $f'(x_0)$, то або $f'(x_0) = 0$, або

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_{k-1}^{(2)} (r_{k-1}^{(1)} + g_k - 1) (r_{k-1}^{(1)} + g_k)}{r_{k-1}^{(1)} (r_{k-1}^{(2)} + g_k - 1) (r_{k-1}^{(2)} + g_k)} = 1. \quad (15)$$

Доведення. Нехай проєктор $f[\bar{P}_1; \bar{P}_2]$ має у точці x_0 класичну похідну $f'(x_0)$. Тоді $f'(x_0) = \mathfrak{E}_{\bar{P}_1} f(x_0)$.

Припустимо, що $f'(x_0) \neq 0$. Тоді $\mathfrak{E}_{\bar{P}_1} f(x_0) > 0$, оскільки проєктор $f[\bar{P}_1; \bar{P}_2]$ зростає на $(0; 1]$. Отже, нескінченний добуток (14) є збіжним, необхідною умовою чого є виконання рівності (15).

Теорема 4 (достатні умови сингулярності проєктора $f[\bar{P}_1; \bar{P}_2]$). Нехай для послідовностей функцій $\bar{P}_1$ і $\bar{P}_2$ існує $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що $\bar{\varphi}_i^{(1)} \equiv a = \text{const}$ і $\bar{\varphi}_i^{(2)} \equiv b = \text{const}$ для всіх $i \geq n_0$, $a \neq b$. Тоді проєктор $f[\bar{P}_1; \bar{P}_2]$ є сингулярною функцією, тобто має похідну, рівну нулю, майже скрізь (у розумінні міри Лебега).

Доведення. Нехай проєктор $f[\bar{P}_1; \bar{P}_2]$ має у точці $x_0 = \Delta_{g_1 \dots g_n \dots}^{\bar{P}_1}$ класичну похідну $f'(x_0)$. Покажемо, що за вказаних у теоремі умов рівність (15) виконується для не більш ніж зліченної множини точок.

Припустимо, що для деякої точки $x_0 = \Delta_{g_1 \dots g_n \dots}^{\bar{P}_1}$ виконується рівність (15). Позначимо

$$\frac{r_{k-1}^{(2)} (r_{k-1}^{(1)} + g_k - 1) (r_{k-1}^{(1)} + g_k)}{r_{k-1}^{(1)} (r_{k-1}^{(2)} + g_k - 1) (r_{k-1}^{(2)} + g_k)} = s_k.$$

Тоді $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = 1$. Нехай $k \geq n_0 + 1$. Тому, враховуючи припущення у твердженні теореми, отримуємо

$$\frac{b(a + g_k - 1)(a + g_k)}{a(b + g_k - 1)(b + g_k)} = s_k.$$

Виразимо g_k через a , b і s_k :

$$b(a + g_k - 1)(a + g_k) = s_k a(b + g_k - 1)(b + g_k),$$

$$g_k^2 b + g_k(2ab - b) + a^2 b - ab = g_k^2 a s_k + g_k(2ab - a)s_k + b^2 a s_k - a b s_k,$$

$$g_k^2(b - a s_k) + g_k(2ab(1 - s_k) - b + a s_k) + ab(a - b s_k - 1 + s_k) = 0.$$

Отримали квадратне рівняння стосовно g_k . Позначимо через D_k його дискримінант. Тоді

$$D_k = (2ab(1 - s_k) - b + a s_k)^2 - 4(b - a s_k)ab(a - b s_k - 1 + s_k),$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} D_k = (b-a)^2 + 4(b-a)^2 ab = (b-a)^2(1+4ab) > 0,$$

$$g_k = \frac{-(2ab(1-s_k) - b + as_k) \pm \sqrt{D_k}}{2(b-as_k)},$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_k = \frac{b-a \pm \sqrt{(b-a)^2(1+4ab)}}{2(b-a)} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1+4ab}.$$

Зрозуміло, що можливим є лише варіант $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1+4ab}$.

Випадок 1: Число $1+4ab$ не є квадратом цілого числа. Тоді $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k$ є ірраціональним числом, що суперечить тому, що числа g_k є натуральними. Отже, припущення хибне і в цьому випадку рівність (15) не виконується. А тому згідно з наслідком 10 усюди, де існує класична похідна f' проєктора $f[\bar{P}_1; \bar{P}_2]$, ця похідна дорівнює нулю. Оскільки похідна проєктора $f[\bar{P}_1; \bar{P}_2]$ існує майже скрізь (у розумінні міри Лебега), то вона майже скрізь рівна нулю. Отже, у цьому випадку проєктор $f[\bar{P}_1; \bar{P}_2]$ є сингулярною функцією.

Випадок 2: Число $1+4ab$ є квадратом цілого числа. Зрозуміло, що тоді $1+4ab$ є квадратом непарного числа, а тому $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k$ є натуральним числом. Позначимо його через g^* . Оскільки послідовність $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ складається з натуральних чисел, то рівність $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k = g^*$ рівносильна тому, що існує число k_0 таке, що $g_k = g^*$ для всіх $k \geq k_0$.

Проте таких чисел $x = \Delta_{g_1 g_2 \dots g_n \dots}^{\bar{P}_1}$ — зліченна кількість. А тому майже скрізь класична похідна проєктора $f[\bar{P}_1; \bar{P}_2]$ буде рівною нулю.

Отже, у цьому випадку проєктор $f[\bar{P}_1; \bar{P}_2]$ також є сингулярною функцією.

Література

1. М. В. Працьовитий, О. Л. Лещинський, *Властивості випадкових величин, заданих розподілами елементів свого $\bar{Q}_\infty$ -зображення*, Теорія ймовірностей та мат. статистика, вип. 57, 134–139 (1997).
2. M. V. Pratsiovytyi, Ya. V. Goncharenko, N. V. Dyvliakh, S. P. Ratushniak, *Inversor of digits of Q_2^* -representation of numbers*, Mat. Stud., **55**, 37–43 (2021).
3. M. V. Pratsiovytyi, S. P. Ratushniak, *Properties and distributions of values of fractal functions related to Q_2 -representations of real numbers*, Theory Probab. Math. Statist., **99**, 211–228 (2019).
4. О. М. Барановський, М. В. Працьовитий, Б. І. Гетьман, *Порівняльний аналіз метричних теорій представлень чисел рядами Енгеля і Остроградського та ланцюговими дробами*, Наук. часоп. Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова, Сер. 1, Фіз.-мат. науки, № 12, 130–139 (2011).
5. Б. І. Гетьман *Метричні властивості множини чисел, визначених умовами на їх розклади в ряд Енгеля*, Наук. часоп. Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова, Сер. 1, Фіз.-мат. науки, № 10, 88–99 (2009).
6. М. П. Мороз, *Проектор Δ^O -зображення чисел в Δ^E -зображення*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **14**, № 4, 49–64 (2017).
7. М. В. Працьовитий, Б. І. Гетьман, *Ряди Енгеля та їх застосування*, Наук. часоп. Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова, Сер. 1, Фіз.-мат. науки, № 7, 105–116 (2006).
8. O. Baranovskyi, M. Pratsiovytyi, *One class of continuous functions with complicated local properties related to Engel series*, Funct. Approx. Comment. Math. Adv. Publ., 1–20 (2022).
9. F. Engel, *Entwicklung der Zahlen nach Stammbrüchen*, Verhandl. d. 52 Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner in Marburg **29**, September bis 3. Oktober (1913); Leipzig, 190–191 (1914).
10. P. Erdős, A. Rényi, P. Szűsz, *On Engel's and Sylvester's series*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math., **1**, 7–32 (1958).
11. A. Rényi, *A new approach to the theory of Engel's series*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math., **5**, 25–32 (1962).

12. J. Lüroth, *Über eine eindeutige Entwicklung von Zahlen in eine unendliche Reihe*, Math. Ann., **21**, 411–423 (1883).
13. M. Pratsiovytyi, Yu. Khvorostina, *Topological and metric properties of distributions of random variables represented by the alternating Lüroth series with independent elements*, Random Oper. Stoch. Equ, **21**, № 4, 385–401 (2013).
14. M. V. Pratsiovytyi, Yu. V. Khvorostina, *A random variable whose digits in the $\tilde{L}$ -representation have the Markovian dependence*, Theory Probab. Math. Statist., № 91, 157–168 (2015).
15. Yu. Zhykharyeva, M. Pratsiovytyi, *Expansions of numbers in positive Lüroth series and their applications to metric, probabilistic and fractal theories of numbers*, Algebra Discrete Math., **14**, № 1, 145–160 (2012).
16. J. J. Sylvester, *On a point in the theory of vulgar fractions*, American J. Math., **3**, № 4, 332–335 (1880).
17. О. М. Барановський, М. В. Працьовитий, Г. М. Торбін, *Ряди Остроградського – Серпінського – Пірса та їхні застосування*, Наук. думка, Київ (2013).
18. J. O. Shallit, *Metric theory of Pierce expansions*, Fibonacci Quart, **24**, № 1, 22–40 (1986).
19. Oskar Perron, *Irrationalzahlen*, Göschens Lehrbücherei, I. Gruppe, Bd. I, de Gruyter, Berlin, Berlin (1960).

Одержано 04.01.23