

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНОГО МНОЖИННОЗНАЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ У ПРОСТОРИ $\text{conv}(\mathbb{R}^2)$

Тетяна Комлева, Андрій Плотніков

*Одеська державна академія будівництва та архітектури
вул. Дидрихсона, 4, Одеса, 65029, Україна
e-mail: t-komleva@ukr.net,
a-plotnikov@ukr.net*

Наталія Скрипник

*Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
вул. Дворянська, 2, Одеса, 65082, Україна
e-mail: natalia.skripnik@gmail.com*

A linear set-valued differential equation with a generalized derivative and a variable matrix is considered. Conditions for the existence of solutions are given and the form of their cross sections at each instant of time is obtained in the analytical form. The results are illustrated by model examples.

Розглянуто лінійне множиннозначне диференціальне рівняння із узагальненою похідною та змінною матрицею. Наведено умови існування розв'язків і отримано в аналітичному вигляді форму їхніх перерізів у кожний момент часу. Результати проілюстровано модельними прикладами.

1. Вступ. У 1969 р. F. S. de Blasi та F. Iervolino вперше розглянули множиннозначні диференціальні рівняння з похідною Хукухарі [1]. Потім багато математиків вивчали умови існування розв'язків і досліджували їхні властивості для множиннозначних диференціальних рівнянь [2 – 13], множиннозначних інтегро-диференціальних та інтегральних рівнянь [14 – 17], множиннозначних імпульсних рівнянь [18 – 20], множиннозначних дискретних систем [21 – 23], а також множиннозначних диференціальних включень [2, 20, 24]. Такі рівняння мають широке застосування при дослідженні звичайних диференціальних (інтегральних, імпульсних та ін.) включень [2, 6, 7, 18] і нечітких диференціальних (інтегральних, імпульсних та ін.) рівнянь і включень [3, 25 – 28], а також систем керування в умовах невизначеності та нечітких систем керування [29 – 36]. Відомо, що такі рівняння зовні є схожими з відповідними звичайними рівняннями, але при їх дослідженні й розв'язанні необхідно враховувати, що вони є множиннозначними. Тому традиційні методи та підходи, які використовуються при дослідженні та розв'язанні однозначних систем, не завжди можуть бути застосовані для множиннозначних систем, які потребують нових або інших методів і підходів до вивчення. Також треба відзначити, що завдяки множинозначності виникають нові властивості, які необхідно дослідити.

У статті розглянуто лінійне множиннозначне диференціальне рівняння із узагальненою похідною у випадку змінної матриці другого порядку. Наведено умови існування розв'язків й отримано форму перерезів у кожний момент часу в аналітичному вигляді для випадку, коли система задовольняє умову Лаппо – Данілевського. Результати проілюстровано модельними прикладами.

2. Основні означення і позначення. Нехай $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$, — простір непустих опуклих компактних підмножин простору $\mathbb{R}^n$ з метрикою Гаусдорфа

$$h(X, Y) = \min\{r \geq 0 : X \subset Y + B_r(0), Y \subset X + B_r(0)\},$$

де $X, Y \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$, $B_r(c) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - c\| \leq r\}$.

Крім звичайних теоретико-множинних операцій розглянемо у просторі $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$ такі операції: суму множин і добуток скаляра на множину

$$X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\} \quad \text{і} \quad \lambda X = \{\lambda x : x \in X, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Справедливі наступні основні властивості [2, 3, 6]:

- 1) $(\text{conv}(\mathbb{R}^n), h)$ — повний метричний простір;
- 2) $h(X + Z, Y + Z) = h(X, Y)$;
- 3) $h(\lambda X, \lambda Y) = |\lambda| h(X, Y)$ для всіх $X, Y, Z \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ і $\lambda \in \mathbb{R}$.

Відомо, що простір $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$ не є лінійним простором щодо наведених операцій, оскільки в загальному випадку не існує протилежного елемента для $X \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$, тобто такої множини $-X$, що $X + (-X) = \{0\}$, лише у випадку $X \in \mathbb{R}^n$ протилежний елемент існує. Відсутність протилежного елемента у просторі $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$ призводить до неоднозначного введення поняття різниці множин і умов її існування.

У цій статті ми будемо використовувати різницю Хукухари [37].

Означення 1 [37]. Нехай $X, Y \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$. Множина $Z \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ така, що $X = Y + Z$, називається різницею Хукухари множин X і Y та позначається $X \stackrel{H}{=} Y$.

Наведемо основні властивості різниці Хукухари [2, 3, 6, 18]:

- 1) якщо різниця Хукухари двох множин $X \stackrel{H}{=} Y$ існує, то вона єдина;
- 2) $X \stackrel{H}{=} X = \{0\}$ для всіх $X \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$;
- 3) $(X + Y) \stackrel{H}{=} Y = X$ для всіх $X, Y \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$.

Лема 1 [14]. Якщо $X + Y = B_1(0)$, то $X = B_\mu(z_1)$ і $Y = B_\lambda(z_2)$, де $\mu + \lambda = 1$ і $z_1 + z_2 = 0$.

Зауваження 1. Якщо з кулі $B_R(a)$ в сенсі Хукухари віднімається множина X і різниця $B_R(a) \stackrel{H}{=} X$ існує, то множина X також є кулею $B_r(b)$, радіус r якої не перевищує R .

Також додамо ще одну операцію: добуток матриці на множину

$$AX = \{Ax : x \in X\},$$

де $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — дійсна $(n \times n)$ -вимірна матриця, $X \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 1 [38, 39]. Для будь-якої матриці $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ існують дві ортогональні $(n \times n)$ -вимірні матриці U та V такі, що $U^T A V = \Sigma$, де Σ є діагональною матрицею. Також можна обрати матриці U та V таким чином, щоб діагональні елементи матриці Σ задовольняли умову $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_n = 0$, де r є рангом матриці A . Тобто, якщо A є невідродженою матрицею, то $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$.

Відповідно матриця A можна записати у вигляді $A = U\Sigma V^T$. Ця декомпозиція називається сингулярною декомпозицією. Стовпці $u_1, \dots, u_n$ матриці U називають лівими сингулярними векторами, стовпці $v_1, \dots, v_n$ матриці V — правими сингулярними векторами, а числа $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ — сингулярними числами матриці A .

Згідно з [38] множина $Y = \{Ax : x \in B_1(0), A \in \mathbb{R}^{n \times n}\}$ є r -вимірним еліпсоїдом і його півосі дорівнюють відповідним сингулярним числам матриці A , де $r = \text{rank}(A)$.

Зауваження 2. Очевидно, що якщо матриця $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ є ортогональною матрицею, то $AB_1(0) \equiv B_1(0)$.

Означення 2 [11]. Нехай $X : [0, T] \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$. Будемо казати, що $X(\cdot)$ має узагальнену похідну $DX(t) \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ у точці $t \in (0, T)$, якщо для всіх достатньо малих $\Delta > 0$ відповідні різниці Хукхари існують і виконується принаймні одна з наступних рівностей:

- 1) $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta^{-1}(X(t + \Delta) \overset{H}{X}(t)) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta^{-1}(X(t) \overset{H}{X}(t - \Delta)) = DX(t)$;
- 2) $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta^{-1}(X(t) \overset{H}{X}(t + \Delta)) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta^{-1}(X(t - \Delta) \overset{H}{X}(t)) = DX(t)$;
- 3) $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta^{-1}(X(t + \Delta) \overset{H}{X}(t)) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta^{-1}(X(t - \Delta) \overset{H}{X}(t)) = DX(t)$;
- 4) $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta^{-1}(X(t) \overset{H}{X}(t + \Delta)) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta^{-1}(X(t) \overset{H}{X}(t - \Delta)) = DX(t)$.

Теорема 2 [9, 11, 12]. Нехай множиннозначне відображення $X : [0, T] \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ є узагальнено диференційовним на $[0, T]$. Тоді для всіх $t \in [0, T]$:

- 1) якщо функція $\text{diam}(X(t))$ є неспадною на $[0, T]$, то $X(t) = X(0) + \int_0^t DX(s) ds$;
- 2) якщо функція $\text{diam}(X(t))$ є спадною на $[0, T]$, то $X(t) = X(0) \overset{H}{\int_0^t} DX(s) ds$,

де

$$\text{diam}(X) = \max_{\psi \in S_1(0)} |c(X, \psi) + c(X, -\psi)|,$$

$$c(X, \psi) = \max_{x \in X} \{x_1 \psi_1 + \dots + x_n \psi_n\},$$

$$S_1(0) = \{\psi \in \mathbb{R}^n : \|\psi\| = 1\},$$

а інтеграл розуміємо у сенсі інтеграла Хукхари [37].

Інші властивості цієї похідної отримано в [9–12].

Зауваження 3. Також зазначимо, що в [40] розглянуто інше означення узагальненої похідної, а в роботах [9, 10] вивчено властивості та проведено порівняльний аналіз цієї узагальненої похідної й узагальненої похідної з означення 2.

3. Основний результат. Розглянемо лінійне множиннозначне диференціальне рівняння із узагальненою похідною

$$DX(t) = A(t)X(t), \quad X(0) = B_1(0), \quad (1)$$

де $X : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ — невідоме множиннозначне відображення, $A(t) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ — невідроджена матриця для всіх $t \geq 0$.

Означення 3. Множиннозначне відображення $X : \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ називається розв'язком диференціального рівняння (1), якщо воно неперервне та задовольняє диференціальне рівняння (1) для всіх $t \geq 0$.

У роботах [9, 10, 14] розглянуто випадок, коли $A(t) \equiv A$, та отримано такі результати:

1) диференціальне рівняння (1) має безліч розв'язків, деякі (один чи два) з яких називають базовими (їхні діаметри є монотонними функціями), а інші є змішаними (їхні діаметри не є монотонними функціями). Також відзначимо, що першим базовим розв'язком $X_1(\cdot)$ називають розв'язок рівняння (1), який задовольняє умову про те, що $\text{diam}(X_1(t))$ є неспадною функцією. Другим базовим розв'язком $X_2(\cdot)$ називають розв'язок рівняння (1), який задовольняє умову про те, що $\text{diam}(X_2(t))$ є спадною функцією;

2) якщо сингулярні числа матриці A такі, що $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, то диференціальне рівняння (1) має два базові розв'язки $X_1(t)$ і $X_2(t)$, перерізи яких у кожен момент часу t є колами $B_{e^{\sigma t}}(0)$ і $B_{e^{-\sigma t}}(0)$, а якщо сингулярні числа матриці A такі, що $\sigma_1 \neq \sigma_2$, то диференціальне рівняння (1) має тільки перший базовий розв'язок $X_1(t)$, переріз якого у кожен момент часу t є еліпсом, півосі якого дорівнюють $e^{\sigma_1 t}$ і $e^{\sigma_2 t}$.

Також зауважимо, що в [11, 12] розглянуто інший тип диференціальних рівнянь із узагальненою похідною, в яких може існувати не більше одного розв'язку, і цей розв'язок буде співпадати з одним із розв'язків системи (1) або не існувати (коли другого базового розв'язку рівняння (1) не існує).

Нехай

$$A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix},$$

де $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ — неперервні функції такі, що $a(t)d(t) - b(t)c(t) \neq 0$ для всіх $t \geq 0$.

Неважко отримати, що в будь-який момент часу $t \geq 0$ сингулярні числа матриці $A(t)$ мають вигляд

$$\sigma_1(t) = \sqrt{\frac{a^2(t) + b^2(t) + c^2(t) + d^2(t) + \sqrt{\delta(t)}}{2}},$$

$$\sigma_2(t) = \sqrt{\frac{a^2(t) + b^2(t) + c^2(t) + d^2(t) - \sqrt{\delta(t)}}{2}},$$

де $\delta(t) = (a^2(t) + b^2(t) + c^2(t) + d^2(t))^2 - 4(a(t)d(t) - b(t)c(t))^2$. Очевидно, що

$$\begin{aligned} \delta(t) &= (a^2(t) + b^2(t) + c^2(t) + d^2(t))^2 - 4(a(t)d(t) - b(t)c(t))^2 \\ &= (a^2(t) - d^2(t))^2 + (b^2(t) - c^2(t))^2 + 2(a(t)b(t) + c(t)d(t))^2 + 2(a(t)c(t) + b(t)d(t))^2, \end{aligned}$$

тобто $\delta(t) \geq 0$ для всіх $t \geq 0$.

Відповідно, якщо $a(t) = d(t)$ і $c(t) = -b(t)$ або $d(t) = -a(t)$ і $b(t) = c(t)$, то $\delta(t) = 0$, а в інших випадках $\delta(t) \neq 0$, тобто, якщо

$$A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ -b(t) & a(t) \end{pmatrix} \quad \text{або} \quad A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ b(t) & -a(t) \end{pmatrix},$$

то $\delta(t) \equiv 0$ і $\sigma_1(t) = \sigma_2(t) = \sigma(t) = \sqrt{a^2(t) + b^2(t)}$.

Теорема 3. Якщо матриця $A(t)$ така, що

$$A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ -b(t) & a(t) \end{pmatrix} \quad \text{або} \quad A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ b(t) & -a(t) \end{pmatrix},$$

то диференціальне рівняння (1) має два базові розв'язки $X_1(\cdot)$ і $X_2(\cdot)$ такі, що

$$X_1(t) = e^{\int_0^t \sigma(s) ds} B_1(0) \quad \text{і} \quad X_2(t) = e^{-\int_0^t \sigma(s) ds} B_1(0),$$

де $t \geq 0$, $\sigma(t) = \sqrt{a^2(t) + b^2(t)}$.

Доведення. Доведення того, що $X_2(\cdot)$ є розв'язком диференціального рівняння (1), проведемо безпосередньою підстановкою множиннозначного відображення

$$X_2(t) = e^{-\int_0^t \sigma(s) ds} B_1(0)$$

у диференціальне рівняння (1) і перевіркою виконання тотожності

$$D\left(e^{-\int_0^t \sigma(s) ds} B_1(0)\right) \equiv A(t) e^{-\int_0^t \sigma(s) ds} B_1(0).$$

Оскільки $\sigma(t) > 0$ для всіх $t \geq 0$, то $e^{-\int_0^t \sigma(s) ds}$ є спадною функцією, і тому що

$$e^{-\int_0^t \sigma(s) ds} B_1(0) = B_{e^{-\int_0^t \sigma(s) ds}}(0),$$

то відповідно $\text{diam}(X_2(\cdot))$ є спадною функцією. Тоді згідно з означенням 2, п. 2, і тим, що $B_1(0)$ є центрально-симетричним тілом і відповідно $(-1)B_1(0) = B_1(0)$, маємо

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta \rightarrow 0+} \Delta^{-1} \left(X_2(t) \frac{H}{\Delta} X_2(t + \Delta) \right) \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0+} \Delta^{-1} \left(e^{-\int_0^t \sigma(s) ds} B_1(0) \frac{H}{\Delta} e^{-\int_0^{t+\Delta} \sigma(s) ds} B_1(0) \right) \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0+} \Delta^{-1} \left(e^{-\int_0^t \sigma(s) ds} - e^{-\int_0^{t+\Delta} \sigma(s) ds} \right) B_1(0) \\ &= -\sigma(t) e^{-\int_0^t \sigma(s) ds} B_1(0) = \sigma(t) e^{-\int_0^t \sigma(s) ds} B_1(0) \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta \rightarrow 0+} \Delta^{-1} \left(X_2(t - \Delta) \frac{H}{\Delta} X_2(t) \right) \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0+} \Delta^{-1} \left(e^{-\int_0^{t-\Delta} \sigma(s) ds} B_1(0) \frac{H}{\Delta} e^{-\int_0^t \sigma(s) ds} B_1(0) \right) \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0+} \Delta^{-1} \left(e^{-\int_0^{t-\Delta} \sigma(s) ds} - e^{-\int_0^t \sigma(s) ds} \right) B_1(0) \\ &= -\sigma(t) e^{-\int_0^t \sigma(s) ds} B_1(0) = \sigma(t) e^{-\int_0^t \sigma(s) ds} B_1(0). \end{aligned}$$

Тобто

$$DX_2(t) = D\left(e^{-\int_0^t \sigma(s) ds} B_1(0)\right) = \sigma(t) e^{-\int_0^t \sigma(s) ds} B_1(0).$$

Оскільки матриця $A(t)$ така, що сингулярні числа $\sigma_1(t) = \sigma_2(t) = \sigma(t)$, то сингулярна декомпозиція матриці $A(t)$ у кожен момент часу $t \geq 0$ має вигляд $A(t) = U(t)\Sigma(t)V^T(t)$,

де $U(t)$, $V(t)$ є ортогональними матрицями і $\Sigma(t) = \sigma(t)E$, E — одинична матриця. Також відомо, що $V^T(t)B_r(0) = B_r(0)$ і $U(t)B_r(0) = B_r(0)$ для всіх $t \geq 0$ і $r > 0$. Тоді

$$\begin{aligned} A(t)e^{-\int_0^t \sigma(s) ds} B_1(0) &= U(t)\Sigma(t)V^T(t)e^{-\int_0^t \sigma(s) ds} B_1(0) \\ &= U(t)\sigma(t)EV^T(t)e^{-\int_0^t \sigma(s) ds} B_1(0) = \sigma(t)U(t)EV^T(t)e^{-\int_0^t \sigma(s) ds} B_1(0) \\ &= \sigma(t)e^{-\int_0^t \sigma(s) ds} U(t)EV^T(t)B_1(0) = \sigma(t)e^{-\int_0^t \sigma(s) ds} B_1(0). \end{aligned}$$

Звідси маємо

$$\sigma(t)e^{-\int_0^t \sigma(s) ds} B_1(0) \equiv \sigma(t)e^{-\int_0^t \sigma(s) ds} B_1(0),$$

тобто $X_2(\cdot)$ є другим базовим розв'язком диференціального рівняння (1).

Тепер доведемо, що $X_1(\cdot)$ є розв'язком диференціального рівняння (1). Доведення також проведемо безпосередньою підстановкою множиннозначного відображення $X_1(\cdot)$ у диференціальне рівняння (1) і перевіркою виконання тотожності

$$D\left(e^{\int_0^t \sigma(s) ds} B_1(0)\right) \equiv A(t)e^{\int_0^t \sigma(s) ds} B_1(0).$$

Оскільки $\sigma(t) > 0$ для всіх $t \geq 0$, то $e^{\int_0^t \sigma(s) ds}$ є зростаючою функцією і відповідно $\text{diam}(X_1(\cdot))$ — зростаючою функцією. Тоді згідно з означенням 2, п. 1, маємо

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \rightarrow 0_+} \Delta^{-1} \left(X_1(t+\Delta) \overset{H}{-} X_1(t) \right) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0_+} \Delta^{-1} \left(e^{\int_0^{t+\Delta} \sigma(s) ds} B_1(0) \overset{H}{-} e^{\int_0^t \sigma(s) ds} B_1(0) \right) \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0_+} \Delta^{-1} \left(e^{\int_0^{t+\Delta} \sigma(s) ds} - e^{\int_0^t \sigma(s) ds} \right) B_1(0) \\ &= \sigma(t) e^{\int_0^t \sigma(s) ds} B_1(0) \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \rightarrow 0_+} \Delta^{-1} \left(X_1(t) \overset{H}{-} X_1(t-\Delta) \right) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0_+} \Delta^{-1} \left(e^{\int_0^t \sigma(s) ds} B_1(0) \overset{H}{-} e^{\int_0^{t-\Delta} \sigma(s) ds} B_1(0) \right) \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0_+} \Delta^{-1} \left(e^{\int_0^t \sigma(s) ds} - e^{\int_0^{t-\Delta} \sigma(s) ds} \right) B_1(0) \\ &= \sigma(t) e^{\int_0^t \sigma(s) ds} B_1(0). \end{aligned}$$

Тобто

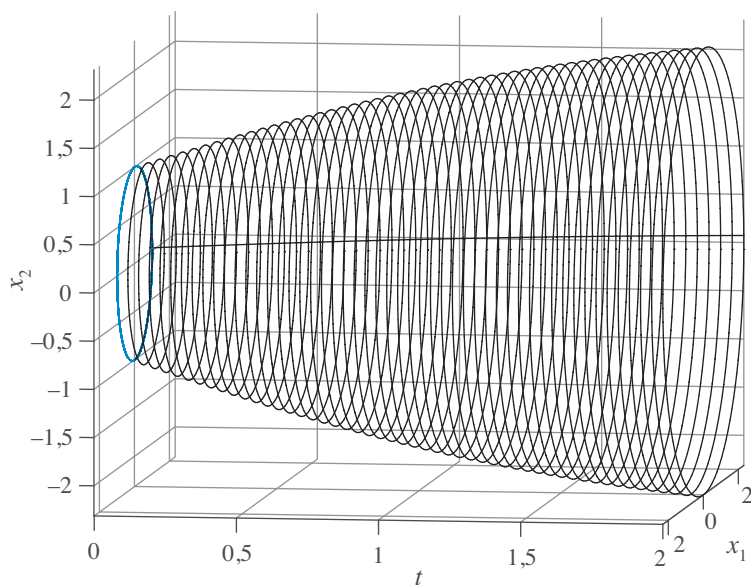
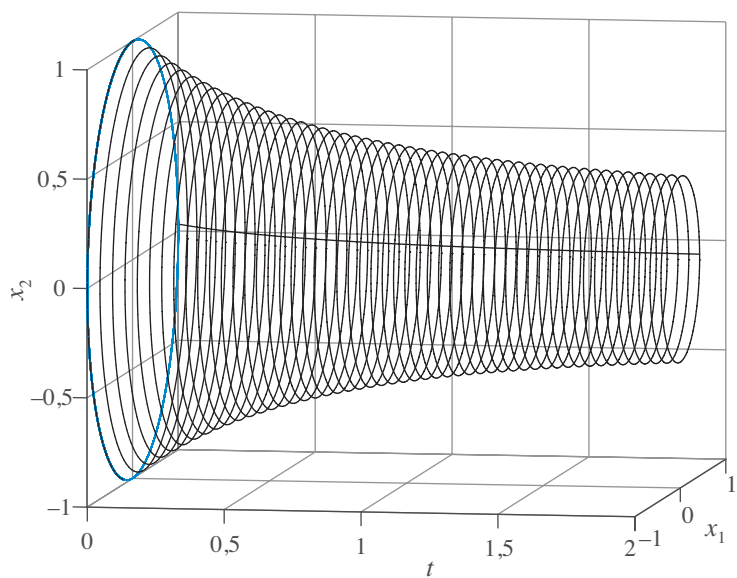
$$DX_1(t) = D\left(e^{\int_0^t \sigma(s) ds} B_1(0)\right) = \sigma(t) e^{\int_0^t \sigma(s) ds} B_1(0).$$

Далі доведення проводиться так само, як і для другого базового розв'язку $X_2(t)$.

Теорему 3 доведено.

Приклад 1. Нехай

$$A(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \cos(t) & e^{-t} \sin(t) \\ e^{-t} \sin(t) & -e^{-t} \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Рис. 1. Розв'язок $X_1(t)$, $t \in [0, 2]$.Рис. 2. Розв'язок $X_2(t)$, $t \in [0, 2]$.

Тоді сингулярні числа $\sigma_1(t)$ і $\sigma_2(t)$ матриці $A(t)$ тотожні та

$$\sigma_1(t) \equiv \sigma_2(t) = \sigma(t) = \sqrt{(e^{-t} \cos(t))^2 + (e^{-t} \sin(t))^2} = e^{-t}.$$

Відповідно диференціальне рівняння (1) має два базові розв'язки $X_1(t) = e^{1-e^{-t}} B_1(0)$ (рис. 1) і $X_2(t) = e^{e^{-t}-1} B_1(0)$ (рис. 2).

Далі розглянемо випадок, коли матриця $A(t)$ така, що $\delta(t) \neq 0$.

Теорема 4. Якщо матриця $A(t)$ така, що

$$A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$$

та існує $t' > 0$ таке, що $\delta(t') \neq 0$, то диференціальне рівняння (1) має тільки перший базовий розв'язок $X_1(t)$.

Доведення. Спочатку розглянемо питання існування першого базового розв'язку $X_1(\cdot)$ диференціального рівняння (1). Оскільки перший базовий розв'язок диференціального рівняння (1) завжди співпадає з розв'язком відповідного диференціального рівняння з похідною Хукухари [9, 10, 14], то згідно з [18] перший базовий розв'язок диференціального рівняння (1) існує для всіх $t \geq 0$.

Неможливість існування другого базового розв'язку $X_2(\cdot)$ диференціального рівняння (1) будемо доводити від супротивного. Нехай диференціальне рівняння (1) має другий базовий розв'язок $X_2(\cdot)$.

Оскільки існує $t' > 0$ таке, що $\delta(t') \neq 0$ і функція $\delta(t)$ є неперервною на $\mathbb{R}_+$, то існує проміжок (t_1, t_2) такий, що

- 1) $t_1 > 0$ і $\delta(t_1) = 0$ або $t_1 = 0$;
- 2) $t' \in (t_1, t_2)$;
- 3) $\delta(t) > 0$ для всіх $t \in (t_1, t_2)$.

Якщо $t_1 > 0$, то будемо вважати, що $\delta(t) = 0$ для всіх $t \in [0, t_1]$. (Зауважимо, що коли це не так, тоді існує $t'' \in (0, t_1)$ таке, що $\delta(t'') > 0$. Тому змінимо t' на t'' і повторимо наші міркування.) І тому що $\delta(t) = 0$ для всіх $t \in [0, t_1]$, то $\sigma_1(t) = \sigma_2(t) = \sigma(t)$ і згідно з теоремою 3 $X_2(t_1) = e^{-\int_0^{t_1} \sigma(t) dt} B_1(0)$, тобто $X_2(t_1)$ є колом радіуса $\omega = e^{-\int_0^{t_1} \sigma(t) dt} < 1$.

Якщо $t_1 = 0$, то $X_2(t_1) = B_1(0)$, тобто також є колом радіуса 1.

Далі будемо вважати, що $t_1 > 0$ (якщо $t_1 = 0$, то $\omega = 1$).

Тоді завдяки означенню 1 і теоремі 2 для всіх $t \in [t_1, t_2]$

$$X_2(t) + \int_{t_1}^t A(s)X_2(s) ds = X_2(t_1). \quad (2)$$

Оберемо та зафіксуємо деяке довільне $T \in (t_1, t_2]$. Тоді $X_2(T) + \int_{t_1}^T A(s)X_2(s) ds = X_2(t_1)$. Звідси

$$X_2(t_1) \overset{H}{-} X_2(T) = \int_{t_1}^T A(s)X_2(s) ds.$$

Згідно з лемою 1 і зауваженням 1, оскільки $X_2(t_1)$ — коло й різниця Хукухари $X_2(t_1) \overset{H}{-} X_2(T)$ існує, то $X_2(T)$ також є колом, тобто $X_2(T) = B_{r(T)}(0)$, де $0 \leq r(T) \leq \omega$. Того що T є довільним, то $X_2(t) = B_{r(t)}(0)$ для всіх $t \in [t_1, t_2]$.

Оскільки матриця $A(t)$ така, що $\delta(t) \neq 0$ для всіх $t \in (t_1, t_2]$, то відповідно матриця $A(t)$ у кожен момент часу $t \in (t_1, t_2]$ має два різних сингулярних числа

$$\tilde{\sigma}_1(t) = \sqrt{\frac{a^2(t) + b^2(t) + c^2(t) + d^2(t) + \sqrt{\delta(t)}}{2}}$$

і

$$\tilde{\sigma}_2(t) = \sqrt{\frac{a^2(t) + b^2(t) + c^2(t) + d^2(t) - \sqrt{\delta(t)}}{2}}.$$

Отже, $A(t)B_{r(t)}(0)$ є еліпсом у кожен момент часу $t \in (t_1, t_2]$. Відповідно

$$\int_{t_1}^T A(s)X_2(s) ds = \int_{t_1}^T A(s)B_{r(s)}(0) ds$$

не може бути колом. Тобто, $B_{r(T)}(0) + \int_{t_1}^T A(s)X_2(s)ds$ не є колом і рівність (2) не виконується; ми отримали суперечність.

Тоді

1) якщо $\delta(t) > 0$ для всіх $t \in (0, t_2)$, то другого базового розв'язку диференціального рівняння (1) не існує для всіх $t \geq 0$;

2) якщо $\delta(t) = 0$ для всіх $t \in [0, t_1]$ і $\delta(t) > 0$ для всіх $t \in (t_1, t_2)$, то другий базовий розв'язок диференціального рівняння (1) існує для всіх $t \in [0, t_1]$ і не існує для всіх $t > t_1$.

Тобто згідно з означенням 3 другого базового розв'язку диференціального рівняння (1) не існує.

Теорему 4 доведено.

Далі отримаємо аналітичний вигляд першого базового розв'язку диференціального рівняння (1), коли матриця $A(t)$ є симетричною, має різні сингулярні числа та задовольняє умову Лаппо – Данілевського.

Теорема 5 [41, с. 24]. Матриця $A(t)$ задовольняє умову Лаппо – Данілевського

$$A(t) \int_0^t A(s) ds = \int_0^t A(s) ds A(t)$$

для всіх $t \geq 0$ тоді й тільки тоді, коли вона має такий вигляд (виключаючи випадок $c(t) \equiv b(t) \equiv 0$):

$$A(t) = \begin{pmatrix} p(t) + \gamma q(t) & q(t) \\ \mu q(t) & p(t) \end{pmatrix},$$

де $p(t), q(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервними функціями і $\mu, \gamma \in \mathbb{R}$ — сталі.

Теорема 6. Якщо матриця $A(t)$ така, що

$$A(t) = \begin{pmatrix} p(t) + \gamma q(t) & q(t) \\ q(t) & p(t) \end{pmatrix},$$

де $p(t), q(t)$ і $\gamma \in \mathbb{R}$ такі, що $q(t) \neq 0$ і $p(t) + \gamma q(t) \neq -p(t)$ для всіх $t \geq 0$, то диференціальне рівняння (1) має лише перший базовий розв'язок $X_1(t)$, переріз якого у кожен момент часу t є еліпсом, півосі якого дорівнюють $e^{\sigma_1(t)}$ і $e^{\sigma_2(t)}$, де $\sigma_{1,2}(t)$ — сингулярні числа матриці $\int_0^t A(s) ds$.

Доведення. Оскільки $p(t)$, $q(t)$ і γ такі, що $q(t) \neq 0$ і $p(t) + \gamma q(t) \neq -p(t)$ для всіх $t \geq 0$, то $\delta(t) \neq 0$ і згідно з теоремою 4 диференціальне рівняння (1) має лише перший базовий розв'язок $X_1(\cdot)$.

Згідно з теоремою 5 матриця $A(t)$ задовольняє умову Лаппо–Данілевського для всіх $t \geq 0$.

Матрицант диференціального рівняння $\dot{\Phi} = A(t)\Phi$, $\Phi(0) = E$ можна записати у вигляді

$$\Phi(t) = e^{\int_0^t A(s) ds} = e^{C(t)},$$

де

$$C(t) = \begin{pmatrix} \int_0^t (p(s) + \gamma q(s)) ds & \int_0^t q(s) ds \\ \int_0^t q(s) ds & \int_0^t p(s) ds \end{pmatrix}.$$

Тобто, перший базовий розв'язок можна записати у вигляді $X_1(t) = e^{C(t)} B_1(0)$.

Оскільки матриця $C(t)$ є симетричною для всіх $t \geq 0$, то в кожен момент часу $t \geq 0$ її можна записати у вигляді спектрального розкладу $C(t) = U(t)\Lambda(t)U^T(t)$, де $U(t)$ є ортогональною матрицею у кожен момент часу $t \geq 0$, $\Lambda(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) \end{pmatrix}$, $\lambda_i(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, $|\lambda_1(t)| > |\lambda_2(t)|$,

$$\lambda_{1,2}(t) = \frac{1}{2} \left(\int_0^t (2p(s) + \gamma q(s)) ds \pm \sqrt{(4 + \gamma^2)} \left| \int_0^t q(s) ds \right| \right).$$

Тому що $q(t) \neq 0$ для всіх $t \geq 0$, то $q(t) > 0$ для всіх $t \geq 0$ або $q(t) < 0$ для всіх $t \geq 0$. Отже, матриця

$U(t)$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4} \operatorname{sgn}\left(\int_0^t q(s) ds\right)}{\sqrt{\left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4} \operatorname{sgn}\left(\int_0^t q(s) ds\right)\right)^2 + 4}} & \frac{2}{\sqrt{\left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4} \operatorname{sgn}\left(\int_0^t q(s) ds\right)\right)^2 + 4}} \\ \frac{2}{\sqrt{\left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4} \operatorname{sgn}\left(\int_0^t q(s) ds\right)\right)^2 + 4}} & -\frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4} \operatorname{sgn}\left(\int_0^t q(s) ds\right)}{\sqrt{\left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4} \operatorname{sgn}\left(\int_0^t q(s) ds\right)\right)^2 + 4}} \end{pmatrix} \quad (3)$$

не залежить від t , де $\operatorname{sgn}(\phi) = \begin{cases} 1, & \phi \geq 0, \\ -1, & \phi < 0. \end{cases}$ Відповідно $U(t) \equiv U$ для всіх $t \geq 0$.

Запишемо розв'язок $X_1(\cdot)$ диференціального рівняння (1) у вигляді

$$X_1(t) = B_1(0) + C(t)B_1(0) + \frac{(C(t))^2}{2!} B_1(0) + \dots + \frac{(C(t))^k}{k!} B_1(0) + \dots$$

Оскільки

$$\begin{aligned}\frac{(C(t))^k}{k!} B_1(0) &= \frac{1}{k!} U \Lambda^k(t) U^T B_1(0) \\ &= \frac{1}{k!} U \Lambda^k(t) B_1(0) = \frac{1}{k!} U |\Lambda(t)|^k P^k(t) B_1(0) \\ &= \frac{1}{k!} U |\Lambda(t)|^k B_1(0) = \frac{1}{k!} U \Sigma^k(t) B_1(0),\end{aligned}$$

то

$$X_1(t) = U \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{i!} \Sigma^i(t) \right) B_1(0) = U e^{\Sigma(t)} B_1(0),$$

де

$$\Sigma(t) = |\Lambda(t)| = \Lambda(t) P(t), \quad P(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}(\lambda_1(t)) & 0 \\ 0 & \operatorname{sgn}(\lambda_2(t)) \end{pmatrix}.$$

Тоді у кожен момент часу $t > 0$ множина $e^{\Sigma(t)} B_1(0)$ є еліпсом, півосі якого дорівнюють $e^{\sigma_i(t)}$, $i = 1, 2$, а матриця U визначає поворот еліпса щодо осей координат [38].

Теорему 6 доведено.

Приклад 2. Нехай

$$A(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} + 0,5e^{-t}(1,5 - \sin(t)) & e^{-t}(1,5 - \sin(t)) \\ e^{-t}(1,5 - \sin(t)) & e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Неважко перевірити, що матриця $A(t)$ є симетричною, $\delta(t) \neq 0$ і вона задовольняє умову Лаппо–Данілевського $p(t) = e^{-2t}$, $q(t) = e^{-t}(1,5 - \sin(t))$, $\gamma = 0,5$.

Оскільки матриця $\int_0^t A(s) ds$ має власні числа

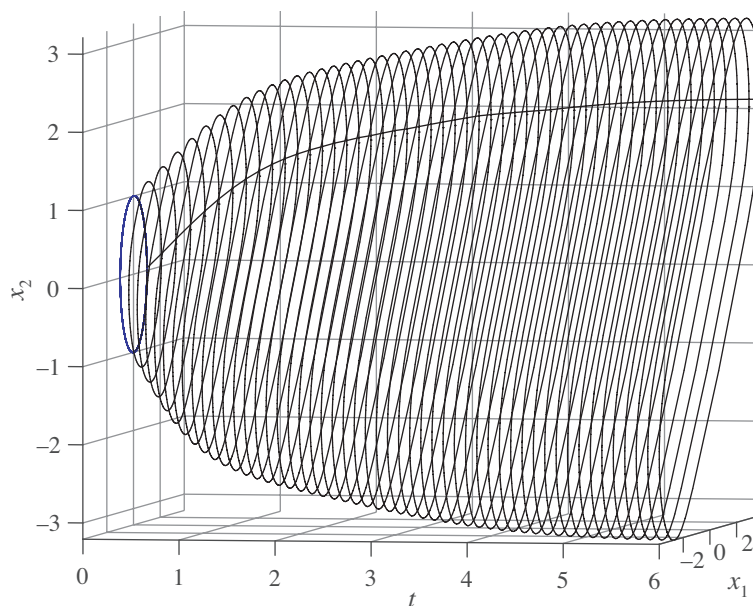
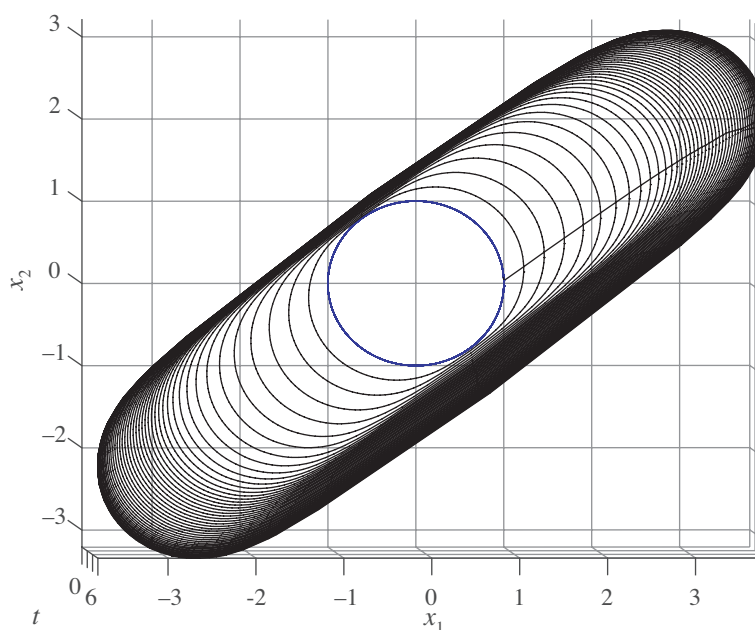
$$\begin{aligned}\lambda_{1,2}(t) &= \frac{1}{2} \left(\int_0^t (2e^{-2s} + 0,5e^{-s}(1,5 - \sin(s))) ds \pm \sqrt{4 + 0,5^2} \left| \int_0^t e^{-s}(1,5 - \sin(s)) ds \right| \right) \\ &= \frac{1}{8} \left(4(1 - e^{-2t}) + \left(1 \pm \sqrt{17} \right) \left(2 - 3e^{-t} + \sqrt{2} e^{-t} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \right) \right),\end{aligned}$$

то відповідно сингулярні числа

$$\sigma_{1,2}(t) = \frac{1}{8} \left| 4(1 - e^{-2t}) + \left(1 \pm \sqrt{17} \right) \left(2 - 3e^{-t} + \sqrt{2} e^{-t} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \right) \right|.$$

А тому диференціальне рівняння (1) має розв'язок $X_1(t) = U e^{\Sigma(t)} B_1(0)$ (рис. 3 і 4), переріз якого у кожен момент часу t — еліпс з півосями $e^{\sigma_1(t)}$ і $e^{\sigma_2(t)}$, повернутий на кут $\theta \approx 38^\circ$, який визначається матрицею U згідно з формулою (3), тобто

$$U = \begin{pmatrix} 0,7882 & 0,6154 \\ 0,6154 & -0,7882 \end{pmatrix}.$$

Рис. 3. Розв'язок $X_1(t)$, $t \in [0, 6]$.Рис. 4. Розв'язок $X_1(t)$, $t \in [0, 6]$.

Далі розглянемо змішані розв'язки рівняння (1) і деякі їхні властивості.

Теорема 7. Якщо сингулярні числа $\sigma_1(t)$ і $\sigma_2(t)$ матриці $A(t)$ такі, що $\sigma_1(t) = \sigma_2(t) = \sigma(t)$ для всіх $t \geq 0$, то на будь-якому проміжку $[t', t'']$ монотонності функції $\text{diam}(X(t))$ множиннозначне відображення $X(t)$, що має вигляд

$$X(t) = e^{-\int_{t'}^t \sigma(s) ds} X(t') \quad \text{або} \quad X(t) = e^{\int_{t'}^t \sigma(s) ds} X(t') \quad (4)$$

для всіх $t \in [t', t'']$, є змішаним розв'язком рівняння (1).

Доведення. Розглянемо довільне множиннозначне відображення $X(\cdot)$, яке задовольняє умову (4). Тоді:

1) якщо функція $\text{diam}(X(t))$ є монотонною для всіх $t \geq 0$, то згідно з теоремою 3 множиннозначне відображення $X(\cdot)$ має вигляд

$$X(t) = e^{-\int_0^t \sigma(s) ds} B_1(0) \quad \text{або} \quad X(t) = e^{\int_0^t \sigma(s) ds} B_1(0)$$

для всіх $t \geq 0$ і є базовим розв'язком рівняння (1);

2) нехай функція $\text{diam}(X(t))$ є монотонно зростаючою (спадаючою) на проміжку $[0, T_1]$, а на проміжку $[T_1, T_2]$ є монотонно спадаючою (зростаючою) і т. д.

Тоді на проміжку $[0, T_1]$ множиннозначне відображення співпадає з першим (другим) базовим розв'язком рівняння (1) і має вигляд

$$X(t) = e^{\int_0^t \sigma(s) ds} B_1(0) \quad \left(X(t) = e^{-\int_0^t \sigma(s) ds} B_1(0) \right)$$

для всіх $t \in [0, T_1]$ і відповідно $X(T_1) = B_{R_1}(0)$ ($X(T_1) = B_{r_1}(0)$), де $R_1 = e^{\zeta(T_1)}$, $r_1 = e^{-\zeta(T_1)}$, $\zeta(T_1) = \int_0^{T_1} \sigma(s) ds$.

Далі на проміжку $[T_1, T_2]$ множиннозначне відображення $X(\cdot)$ відповідно набуває вигляду

$$X(t) = e^{-\int_{T_1}^t \sigma(s) ds} X(T_1) \quad \left(X(t) = e^{\int_{T_1}^t \sigma(s) ds} X(T_1) \right)$$

для всіх $t \in [T_1, T_2]$.

Неважко перевірити, що $X(\cdot)$ є неперервним на проміжку $[0, T_2]$ і має узагальнену похідну

$$DX(t) = \begin{cases} \sigma(t) e^{\int_0^t \sigma(s) ds} B_1(0), & t \in [0, T_1], \\ \sigma(t) e^{-\int_0^t \sigma(s) ds} X(T_1), & t \in [T_1, T_2] \end{cases}$$

$$\left(DX(t) = \begin{cases} \sigma(t) e^{-\int_0^t \sigma(s) ds} B_1(0), & t \in [0, T_1], \\ \sigma(t) e^{\int_0^t \sigma(s) ds} X(T_1), & t \in [T_1, T_2] \end{cases} \right),$$

яка є неперервною на проміжку $[0, T_2]$.

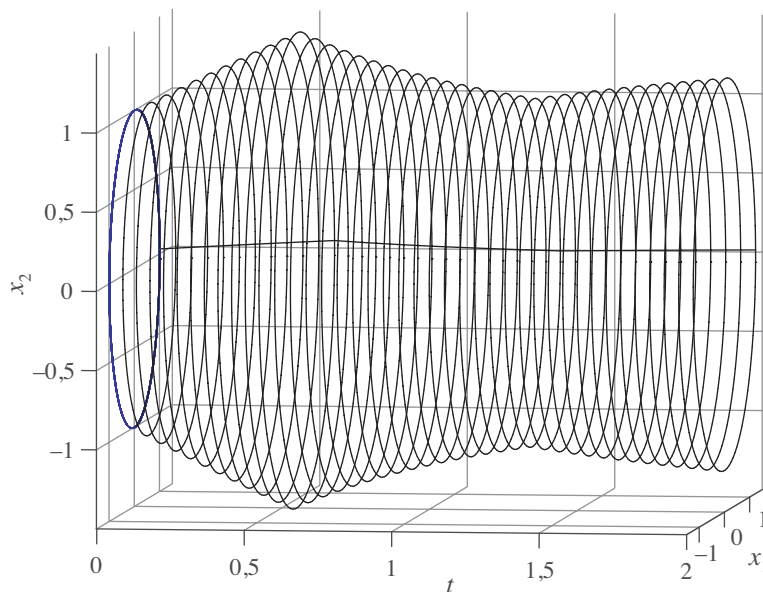
Далі можна перейти до наступного проміжку монотонності і записати, аналогічно, аналітичний вигляд відображення $X(\cdot)$ і його загальної похідної $DX(\cdot)$.

І на останок, як це було доведено в теоремі 3, можна довести, що відображення $X(\cdot)$ задовольняє рівняння (1) для всіх $t \geq 0$.

Теорему 7 доведено.

Зауваження 4. Очевидно, що диференціальне рівняння (1) має нескінченну кількість змішаних розв'язків.

Приклад 3. Розглянемо рівняння з прикладу 1. Як раніше було зазначено, диференціальне рівняння (1) має два базові розв'язки $X_1(t) = e^{1-e^{-t}} B_1(0)$ (рис. 1) та $X_2(t) =$

Рис. 5. Розв'язок $Y_1(t)$, $t \in [0, 2]$.

$e^{e^{-t}-1}B_1(0)$ (рис. 2). Завдяки цим розв'язкам можна легко побудувати змішані розв'язки. Наприклад,

$$Y_1(t) = \begin{cases} e^{\int_0^t \sigma(s) ds} B_1(0), & t \in [0, T_1^1], \\ e^{-\int_{T_1^1}^t \sigma(s) ds} X(T_1^1), & t \in [T_1^1, T_2^1], \\ e^{\int_{T_2^1}^t \sigma(s) ds} X(T_2^1), & t \in [T_2^1, 2], \end{cases} \quad Y_2(t) = \begin{cases} e^{-\int_0^t \sigma(s) ds} B_1(0), & t \in [0, T_1^2], \\ e^{\int_{T_1^2}^t \sigma(s) ds} X(T_1^2), & t \in [T_1^2, T_2^2], \\ e^{-\int_{T_2^2}^t \sigma(s) ds} X(T_2^2), & t \in [T_2^2, T_3^2], \\ e^{\int_{T_3^2}^t \sigma(s) ds} X(T_3^2), & t \in [T_3^2, 2], \end{cases}$$

де $\sigma(t) = e^{-t}$, $T_1^1 = 0,6$, $T_2^1 = 1,4$, $T_1^2 = 0,4$, $T_2^2 = 1$, $T_3^2 = 1,6$, $X(T_1^1) = B_{1,57}(0)$, $X(T_2^1) = B_{1,16}(0)$, $X(T_1^2) = B_{0,72}(0)$, $X(T_2^2) = B_{0,97}(0)$, $X(T_3^2) = B_{0,82}(0)$ (рис. 5, 6).

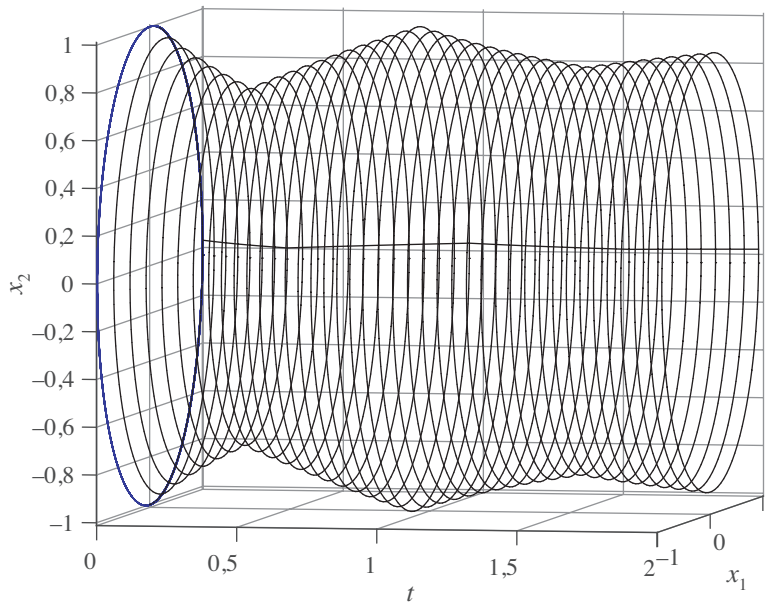
Теорема 8. Нехай рівняння (1) задовольняє умови теореми 6. Тоді рівняння (1) має безліч змішаних розв'язків.

Доведення. Згідно з теоремою 6 диференціальне рівняння (1) має лише перший базовий розв'язок $X(t)$, переріз якого у кожен момент часу t є еліпсом з півосями $e^{\sigma_1(t)}$ і $e^{\sigma_2(t)}$, де $\sigma_{1,2}(t)$ — сингулярні числа матриці $\int_0^t A(s) ds$, і функція $\text{diam}(X(t))$ є зростаючою для всіх $t \geq 0$.

Оберемо точки на числовій осі $0 < T_1 < T_2 < T_3 < \dots$ (поки що довільні, далі отримаємо умову, яку вони мають задовольняти) і побудуємо розв'язок $X(\cdot)$ диференціального рівняння (1) такий, що функція $\text{diam}(X(t))$ є монотонно зростаючою на проміжку $[0, T_1]$, а на проміжку $[T_1, T_2]$ — монотонно спадаючою і т. д.

Очевидно, що на проміжку $[0, T_1]$ множиннозначне відображення $X(\cdot)$ буде співпадати з першим базовим розв'язком рівняння (1) і мати вигляд

$$X(t) = e^{C(t)} B_1(0) = U e^{\Sigma(t)} B_1(0)$$

Рис. 6. Розв'язок $Y_2(t)$, $t \in [0, 2]$.

для всіх $t \in [0, T_1]$ і відповідно $X(T_1)$ буде еліпсом, півосі якого дорівнюють $e^{\sigma_i(T_1)}$, $i = 1, 2$, де

$$\sigma_{1,2}(T_1) = \frac{1}{2} \left| \int_0^{T_1} (2p(s) + \gamma q(s)) ds \pm \sqrt{(4 + \gamma^2)} \left| \int_0^{T_1} q(s) ds \right| \right|.$$

Далі на проміжку $[T_1, T_2]$ розглянемо множиннозначне відображення $X(\cdot)$, яке має вигляд

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{-C(t)} X(T_1) = e^{-C(t)} e^{C(T_1)} B_1(0) \\ &= U e^{-\Sigma(t, T_1)} P(t) U^T U e^{\Sigma(T_1)} P(T_1) U^T B_1(0) \\ &= U e^{-\Sigma(t, T_1)} e^{\Sigma(T_1)} B_1(0) = U e^{\tilde{\Sigma}(t, T_1)} B_1(0) \end{aligned}$$

для всіх $t \in [T_1, T_2]$, де

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}(t, T_1) &= \begin{pmatrix} \sigma_1(T_1) - \sigma_1(t, T_1) & 0 \\ 0 & \sigma_2(T_1) - \sigma_2(t, T_1) \end{pmatrix}; \\ \sigma_{1,2}(t, T_1) &= \frac{1}{2} \left| \int_{T_1}^t (2p(s) + \gamma q(s)) ds \pm \sqrt{(4 + \gamma^2)} \left| \int_{T_1}^t q(s) ds \right| \right| \end{aligned}$$

— сингулярні числа матриці $C(t, T_1) = \int_{T_1}^t A(s) ds$, а T_2 таке, що $\sigma_i(T_1) - \sigma_i(T_2, T_1) > 0$. Тобто,

$$X(t) = \begin{cases} e^{C(t)} B_1(0), & t \in [0, T_1], \\ e^{-C(t, T_1)} e^{C(T_1)} B_1(0), & t \in [T_1, T_2]. \end{cases} \quad (5)$$

Очевидно, що відображення $X(\cdot)$ є неперервним на проміжку $[0, T_2]$ і в кожній точці $t \in [0, T_2]$ має неперервну узагальнену похідну (враховуючи, що еліпс є центрально-симетричним тілом):

$$DX(t) = \begin{cases} A(t)e^{C(t)}B_1(0), & t \in [0, T_1], \\ A(t)e^{-C(t, T_1)}e^{C(T_1)}B_1(0), & t \in [T_1, T_2]. \end{cases} \quad (6)$$

Враховуючи (5) і (6), легко бачити, що $X(\cdot)$ є розв'язком рівняння (1) на проміжку $[0, T_2]$.

Далі переходимо до наступного проміжку монотонності і записуємо, аналогічно, аналітичний вигляд відображення $X(\cdot)$ і його узагальненої похідної.

Враховуючи спосіб обрання моментів часу $T_1, T_2, \dots$, очевидно, що таких розв'язків можна побудувати нескінченно багато.

Теорему 8 доведено.

Зауваження 5. Зазначимо, що всі змішані розв'язки мають однакову властивість:

- 1) на першому проміжку монотонності функція $\text{diam}(X(t))$ завжди зростає;
- 2) моменти часу $T_1, T_2, \dots$ обираються таким чином, щоб для будь-якого $k \geq 1$ виконувалася умова

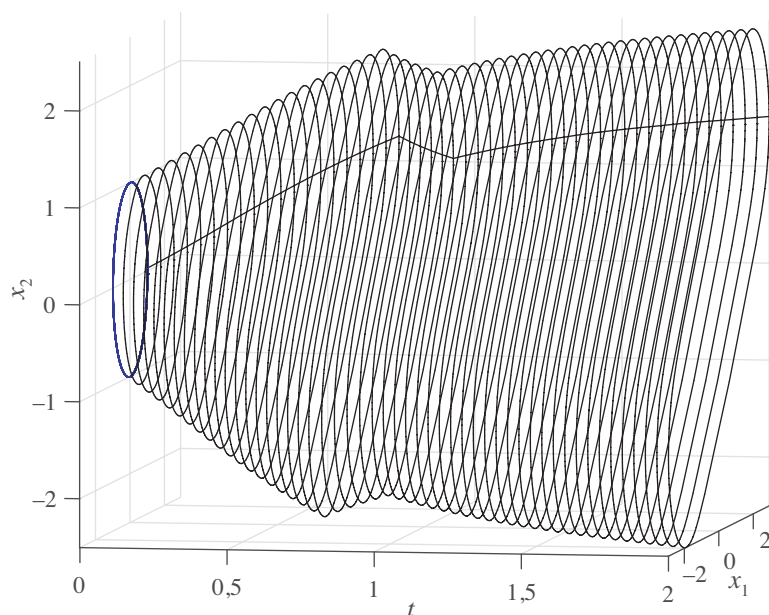
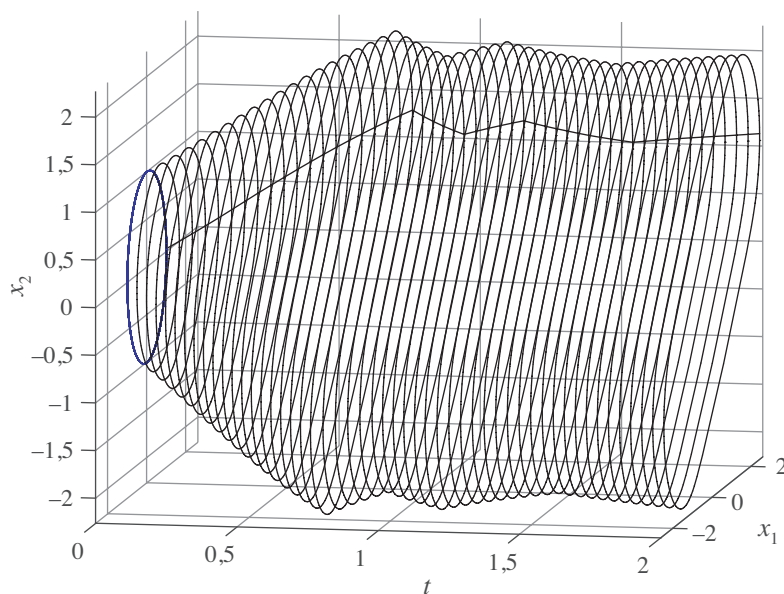
$$\sigma_i(T_1) + \sum_{j=1}^k (-1)^j \sigma_i(T_{j+1}, T_j) \geq 0, \quad i = 1, 2.$$

Приклад 4. Розглянемо рівняння з прикладу 2. Як раніше було вказано, диференціальне рівняння (1) має лише перший базовий розв'язок $X_1(t)$ (рис. 3), переріз якого у кожен момент часу t є еліпсом, півосі якого дорівнюють $e^{\sigma_1(t)}$ і $e^{\sigma_2(t)}$, де $\sigma_{1,2}(t)$ — сингулярні числа матриці $\int_0^t A(s) ds$. Завдяки цьому розв'язку можна побудувати змішані розв'язки диференціального рівняння (1). Наприклад,

$$Y_1(t) = \begin{cases} e^{\int_0^t A(s) ds} B_1(0), & t \in [0, T_1], \\ e^{-\int_{T_1}^t A(s) ds} X(T_1), & t \in [T_1, T_2], \\ e^{\int_{T_2}^t A(s) ds} X(T_2), & t \in [T_2, 2], \end{cases}$$

$$Y_2(t) = \begin{cases} e^{\int_0^t A(s) ds} B_1(0), & t \in [0, T_1], \\ e^{-\int_{T_1}^t A(s) ds} X(T_1), & t \in [T_1, T_2], \\ e^{\int_{T_2}^t A(s) ds} X(T_2), & t \in [T_2, T_3], \\ e^{-\int_{T_3}^t A(s) ds} X(T_3), & t \in [T_3, T_4], \\ e^{\int_{T_4}^t A(s) ds} X(T_4), & t \in [T_4, 2], \end{cases}$$

де $T_1 = 0,8$, $T_2 = 1$, $T_3 = 1,2$, $T_4 = 1,6$, $X(T_1) = U \text{ Ep}(3,39, 1,11)$, $X(T_2) = U \text{ Ep}(3,04, 1,09)$, $X(T_3) = U \text{ Ep}(3,29, 1,10)$, $X(T_4) = U \text{ Ep}(2,99, 1,08)$, $\text{Ep}(a, b)$ є еліпсом, півосі якого дорівнюють a і b , матриця $U = \begin{pmatrix} 0,7882 & 0,6154 \\ 0,6154 & -0,7882 \end{pmatrix}$ визначає кут $\theta \approx 38^\circ$ повороту еліпса (рис. 7, 8).

Рис. 7. Розв'язок $Y_1(t)$, $t \in [0, 2]$.Рис. 8. Розв'язок $Y_2(t)$, $t \in [0, 2]$.

Література

1. F. S. de Blasi, F. Iervolino, *Equazioni differenziali con soluzioni a valore compatto convesso*, Boll. Unione Mat. Ital., **4**, № 2-5, 491 – 501 (1969).
2. В. А. Плотников, А. В. Плотников, А. Н. Витюк, *Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы*, АстроПринт, Одесса (1999).
3. А. В. Плотников, Н. В. Скрипник, *Дифференциальные уравнения с четкой и нечеткой многозначной правой частью. Асимптотические методы*, АстроПринт, Одесса (2009).
4. V. Lakshmikantham, T. Granna Bhaskar, J. Vasundhara Devi, *Theory of set differential equations in metric spaces*, Cambridge Sci. Publ., Cambridge (2006).

5. A. A. Martynyuk, *Qualitative analysis of set-valued differential equations*, Birkhäuser/Springer, Cham (2019).
6. Е. С. Половинкин, *Многозначный анализ и дифференциальные включения*, URSS, Москва (2014).
7. A. Tolstonogov, *Differential inclusions in a Banach space*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (2000).
8. Е. В. Очеретнюк, В. И. Слынько, *Оценки площади решений псевдолинейных дифференциальных уравнений с производной Хукухары в пространстве $\text{conv}(R^2)$* , Укр. мат. журн., **69**, № 2, 189–214 (2017).
9. Т. О. Комлева, А. В. Плотников, Л. І. Плотникова, Н. В. Скрипник, *Умови існування базових розв'язків лінійних множиннозначних диференціальних рівнянь*, Укр. мат. журн., **73**, № 5, 651–673 (2021).
10. T. A. Komleva, L. I. Plotnikova, N. V. Skripnik, A. V. Plotnikov, *Some remarks on linear set-valued differential equations*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., **65**, № 3, 415–431 (2020).
11. A. V. Plotnikov, N. V. Skripnik, *An existence and uniqueness theorem to the Cauchy problem for generalised set differential equations*, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst., Ser. A: Math. Anal., **20**, № 4, 433–445 (2013).
12. А. В. Плотников, Н. В. Скрипник, *Многозначные дифференциальные уравнения с обобщенной производной*, Укр. мат. журн., **65**, № 10, 1350–1362 (2013).
13. A. V. Plotnikov, T. A. Komleva, L. I. Plotnikova, *Averaging of a system of set-valued differential equations with the Hukuhara derivative*, J. Uncertain Syst., **13**, № 1, 3–13 (2019).
14. Т. О. Комлева, А. В. Плотников, Н. В. Скрипник, *Існування розв'язків лінійних множиннозначних інтегральних рівнянь і їхні властивості*, Нелін. коливання, **25**, № 4, 349–360 (2022).
15. Н. В. Скрипник, *Усреднение многозначных интегральных уравнений*, Нелін. коливання, **16**, № 3, 408–415 (2013).
16. V. Babenko, *Calculus and nonlinear integral equations for functions with values in L -spaces*, Anal. Math., **45**, № 4, 727–755 (2019).
17. A. V. Plotnikov, T. A. Komleva, I. V. Molchanyuk, *Existence and uniqueness theorem for set-valued Volterra–Hammerstein integral equations*, Asian-Eur. J. Math., **11**, № 3, 1850036, 11 p. (2018).
18. N. A. Perestyuk, V. A. Plotnikov, A. M. Samoilenko, N. V. Skripnik, *Differential equations with impulse effects: Multivalued right-hand sides with discontinuities*, Walter De Gruyter GmbH & Co, Berlin (2011).
19. Н. А. Перестюк, Н. В. Скрипник, *Усреднение импульсных многозначных систем*, Укр. мат. журн., **65**, № 1, 126–142 (2013).
20. Н. В. Скрипник, *Усреднение импульсных дифференциальных включений с производной Хукухары*, Нелін. коливання, **10**, № 3, 416–432 (2007).
21. И. В. Атамась, В. И. Слынько, *Устойчивость неподвижных точек одного класса квазилинейных каскадов в пространстве $\text{conv}(R^n)$* , Укр. мат. журн., **69**, № 8, 1166–1179 (2017).
22. Т. А. Комлева, Л. І. Плотникова, А. В. Плотников, *Одна многозначная дискретная система и ее свойства*, Укр. мат. журн., **70**, № 11, 1519–1524 (2018).
23. T. A. Komleva, L. I. Plotnikova, A. V. Plotnikov, *Partial averaging of discrete-time set-valued systems*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., **63**, № 4, 539–548 (2018).
24. Т. А. Комлева, А. В. Плотников, *Дифференциальные включения с производной Хукухары*, Нелін. коливання, **10**, № 2, 229–246 (2007).
25. V. Lakshmikantham, R. N. Mohapatra, *Theory of fuzzy differential equations and inclusions*, Taylor Francis Group, London (2003).
26. Н. А. Перестюк, Н. В. Скрипник, *Усреднение нечетких систем*, Укр. мат. журн., **70**, № 3, 412–428 (2018).
27. Т. А. Комлева, А. В. Плотников, Н. В. Скрипник, *Дифференциальные уравнения с многозначными решениями*, Укр. мат. журн., **60**, № 10, 1326–1337 (2008).
28. А. В. Плотников, Т. А. Комлева, *Усреднение нечетких дифференциальных уравнений на конечном промежутке*, Нелін. коливання, **14**, № 4, 516–527 (2011).
29. А. В. Арсирій, А. В. Плотников, *Системы управления многозначными траекториями с многозначным критерием качества*, Укр. мат. журн., **61**, № 8, 1142–1147 (2009).
30. Т. О. Комлева, А. В. Плотников, *Одна задача оптимальної швидкодії для лінійної керованої багатозначної системи*, Укр. мат. журн., **72**, № 8, 1082–1094 (2020).
31. Т. А. Комлева, Л. І. Плотникова, А. В. Плотников, Н. В. Скрипник, *Усреднение нечетких управляемых систем*, Нелін. коливання, **14**, № 3, 325–332 (2011).

32. R. Liu, M. Fečkan, D. O'Regan, J. Wang, *Controllability results for first order linear fuzzy differential systems*, Mathematics, **10**, 1193, 1 – 11 (2022).
33. R. Jafari, S. Razvarz, A. Gegov, W. Yu, *Fuzzy control of uncertain nonlinear systems with numerical techniques: A survey*, Adv. Intell. Syst. Comput., Springer, Cham, **1043**, 3 – 14 (2020).
34. S. Melliani, A. El Allaoui, L. S. Chadli, *Controlled fuzzy evolution equations*, Studies in Fuzziness and Soft Computing, Springer, Cham, **372** (2019), pp. 113 – 126.
35. A. V. Plotnikov, T. A. Komleva, *The averaging of control linear fuzzy 2π -periodic differential equations*, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst., Ser. B: Appl. Algorithms, **18**, № 6, 833 – 847 (2011).
36. L. T. Quang, N. D. Phu, N. V. Hoa, H. Vu, *On maximal and minimal solutions for set integro-differential equations with feedback control*, Nonlinear Stud., **20**, № 1, 39 – 56 (2013).
37. M. Hukuhara, *Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe*, Funkcial. Ekvac., № 10, 205 – 223 (1967).
38. G. E. Forsythe, C. B. Moler, *Computer solution of linear algebraic systems*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. (1967).
39. R. A. Horn, Ch. R. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2013).
40. Ş. E. Amrahov, A. Khastan, N. Gasilov, A. G. Fatullayev, *Relationship between Bede–Gal differentiable set-valued functions and their associated support functions*, Fuzzy Sets and Systems, **295**, 57 – 72 (2016).
41. Н. П. Еругин, *Приводимые системы*, Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, **13**, 3 – 96 (1946).

Одержано 19.01.23