

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ З КЕРУВАННЯМ ДЛЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ФРЕДГОЛЬМА З ВИРОДЖЕНИМ ЯДРОМ У БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

Валерій Журавльов, Наталія Гонгало, Ірина Слюсаренко

*Поліський національний університет
Старий 6-р, 7, Житомир, 10008, Україна
email: vfz2008@ukr.net
nataliahonhalo@gmail.com
islusarenko62@gmail.com*

By using the theory of generalized inversion of operators and integral operators, we obtain the solvability criterion for solutions and the general form of solutions of boundary-value problems for Fredholm integro-differential equations with degenerate kernel with control in Banach spaces. We establish the general form of the control for which these solutions exist.

З використанням теорії узагальненого обернення операторів і узагальненого обернення інтегральних операторів отримано критерій розв'язності та загальний вигляд розв'язків крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром із керуванням у банахових просторах. Одержано зображення загального вигляду керування, при якому ці розв'язки існують.

Ця робота є продовженням статті [1], у якій встановлено умови розв'язності та вигляд загальних розв'язків інтегро-диференціальних рівнянь із виродженим ядром із керуванням у банаховому просторі, а також отримано зображення загального вигляду керування, при якому ці розв'язки існують.

Дослідження умов розв'язності крайових задач для не всюди розв'язних [2] лінійних операторних рівнянь є достатньо складною проблемою. Проблема нерозв'язності цих задач можна вирішити за допомогою введення керування у рівняння та крайові умови.

Загальний підхід до дослідження крайових задач із керуванням для не всюди розв'язних операторних рівнянь у банахових просторах розроблено в [3], але при розгляді крайових задач для конкретних рівнянь виникають специфічні проблеми, які необхідно вирішувати.

Крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь у банахових просторах належать саме до такого типу задач, оскільки інтегро-диференціальний оператор не є всюди розв'язним, тобто не має оберненого [4].

До розв'язання проблеми встановлення умов розв'язності та побудови загальних розв'язків крайових задач для не всюди розв'язних лінійних операторних рівнянь існують різні підходи: слабе збурення правої частини цього рівняння та крайової умови з подальшим застосуванням методу Вішика – Люстерника [5, 6], введення в крайову задачу імпульсної дії [7–9] або сталого керування [10].

Крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром і керуванням у банахових просторах не досліджувалися, тому актуальною є задача про встановлення умов керованості, побудови в аналітичному вигляді загальних розв'язків і відповідних загальних керувань цих задач.

Для встановлення умов керованості крайових задач із керуванням для не всюди розв'язних інтегро-диференціальних рівнянь у банахових просторах буде застосовуватися загальна теорія дослідження не всюди розв'язних інтегральних [11], інтегро-диференціальних [12] рівнянь, з використанням проєкторів, узагальненого обернення операторів у банахових просторах, яку розроблено в [13, 14].

1. Постановка задачі. Нехай $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}_i$, $i = \overline{1,3}$, — банахові простори, $\mathcal{I} = [a, b]$ — скінченний проміжок. Позначимо через $\mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_i)$, $i = \overline{1,3}$, банахові простори неперервних вектор-функцій.

Розглянемо крайову задачу з керуванням для інтегро-диференціального рівняння

$$\dot{z}(t) - \int_a^b \left[\sum_{i=1}^n P_i(t) W_i(s) z(s) + \sum_{i=1}^n Q_i(t) V_i(s) \dot{z}(s) \right] ds = f(t) + \int_a^b K(t, s) u(s) ds, \quad (1)$$

$$\ell z(\cdot) = \alpha + Gu(\cdot). \quad (2)$$

Після позначень операторних матриць

$$\begin{aligned} P(t) &= [P_1(t), \dots, P_n(t)], & Q(s) &= [Q_1(s), \dots, Q_n(s)], \\ W(t) &= \text{col} [W_1(t), \dots, W_n(t)], & V(s) &= \text{col} [V_1(s), \dots, V_n(s)] \end{aligned}$$

крайова задача (1), (2) набуде вигляду

$$(Lz)(t) := \dot{z}(t) - \int_a^b [P(t)W(s)z(s) + Q(t)V(s)\dot{z}(s)] ds = f(t) + \int_a^b K(t, s)u(s) ds, \quad (3)$$

$$\ell z(\cdot) = \alpha + Gu(\cdot), \quad (4)$$

де оператор-функції $P(t)$ і $Q(t)$ діють із $\mathbf{B}_1$ у $\mathbf{B}_2$, сильно неперервні з нормами $\|P\| = \sup_{t \in \mathcal{I}} \|P(t)\|_{\mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_2} < \infty$ і $\|Q\| = \sup_{t \in \mathcal{I}} \|Q(t)\|_{\mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_2} < \infty$, а оператор-функції $W(t)$ і $V(t)$ діють із $\mathbf{B}_2$ у $\mathbf{B}_1$, сильно неперервні з нормами $\|W\| = \sup_{t \in \mathcal{I}} \|W(t)\|_{\mathbf{B}_2 \rightarrow \mathbf{B}_1} < \infty$ і $\|V\| = \sup_{t \in \mathcal{I}} \|V(t)\|_{\mathbf{B}_2 \rightarrow \mathbf{B}_1} < \infty$, оператор-функція $K(t, s)$ визначена у квадраті $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$ та діє з банахового простору $\mathbf{B}_2$ у $\mathbf{B}_2$ за змінною t і з банахового простору $\mathbf{B}_3$ у $\mathbf{B}_3$ — за змінною s , сильно неперервна по t, s , з нормою $\|K\| = \sup_{t, s \in \mathcal{I}} \|K(t, s)\|_{\mathbf{B}_2 \times \mathbf{B}_3} < \infty$, вектор-функції $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, $u(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3)$ визначені на тому ж проміжку $\mathcal{I}$ зі значеннями у банахових просторах $\mathbf{B}_2$ і $\mathbf{B}_3$ із нормами $\|f\| = \sup_{t \in \mathcal{I}} \|f(t)\|_{\mathbf{B}_2}$ і $\|u\| = \sup_{t \in \mathcal{I}} \|u(t)\|_{\mathbf{B}_3}$, $\ell: \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \rightarrow \mathbf{B}$ і $G: \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3) \rightarrow \mathbf{B}$ — лінійні обмежені вектор-функціонали, $\alpha \in \mathbf{B}$.

Розв'язком $z(t)$ крайової задачі (3), (4) для інтегро-диференціального рівняння з керуванням будемо називати таку пару вектор-функцій $z(t)$ і $u(s)$, які задовольняють рівняння (3) і крайову умову (4). При цьому $z(t) \in \mathbf{C}^1(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, $\dot{z}(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, де $\mathbf{C}^1(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ — банаховий простір неперервно-диференційовних вектор-функцій із нормою $\|z\| =$

$\sum_{k=0}^1 \sup_{t \in \mathcal{I}} \|z^{(k)}(t)\|$, де $z^{(k)}(t)$ — k -та похідна від $z(t)$. Похідну $\dot{z}(t)$ будемо розуміти в сенсі [15, с. 140].

Мета цієї роботи: отримати умови існування та зображення загальних розв'язків $z(t)$ крайової задачі з керуванням (3), (4) і знайти зображення загального керування $u(t)$, при якому такі розв'язки існують.

Для зручності викладення отриманих результатів наведемо необхідні відомості та позначення.

Попередні відомості. У [16] одержано умови розв'язності та загальний вигляд розв'язків рівняння (3) без керування ($u(s) = 0$).

Заміною $\dot{z}(t) = y(t)$ або

$$z(t) = \int_a^t y(s) ds + c_2, \quad c_2 \in \mathbf{B}_2, \quad (5)$$

рівняння (3) без керування ($u(s) = 0$) зводимо до інтегрального рівняння [11]

$$(L_1 y)(t) := y(t) - M(t) \int_s^b N(s) y(s) ds = g(t), \quad (6)$$

де

$$\begin{aligned} M(t) &= [P(t), Q(t)], \quad N(s) = \text{col}[\widetilde{W}(s), V(s)], \\ g(t) &= f(t) + P(t)Wc_2, \quad \widetilde{W}(s) = \int_s^b W(\tau) d\tau, \quad W = \widetilde{W}(a). \end{aligned} \quad (7)$$

Нехай $D = I_{\mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1} - \int_a^b N(s)M(s) ds$, $D: \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1$ — узагальнено оборотний оператор. Тоді існують обмежені проєктори [17] $\mathcal{P}_{N(D)}: \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1 \rightarrow N(D)$ на нуль-простір $N(D)$ і $\mathcal{P}_{Y_D}: \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1 \rightarrow Y_D$ на підпростір $Y_D = \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1 \ominus R(D)$ оператора D ; D^- — обмежений узагальнено обернений оператор до оператора D [14].

Оскільки оператор D — це (2×2) -вимірний операторна матриця, то проєктори $\mathcal{P}_{N(D)}$, $\mathcal{P}_{Y_D}$ — це теж (2×2) -вимірні операторні матриці, які мають структуру

$$\mathcal{P}_{N(D)} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{P}_{Y_D} = \begin{bmatrix} \tilde{p}_{11} & \tilde{p}_{12} \\ \tilde{p}_{21} & \tilde{p}_{22} \end{bmatrix}.$$

Надалі клас обмежених узагальнено оборотних операторів, які діють із банахового простору $\mathbf{X}$ у банаховий простір $\mathbf{Y}$, будемо позначати $\mathbf{GI}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ (*generalized inverse*).

Інтегральне рівняння (6) розв'язне для тих і лише тих правих частин, для яких виконується умова [11]

$$\mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s)g(s) ds = \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s)[f(s) + P(s)Wc_2] ds = 0. \quad (8)$$

При цьому воно має сім'ю розв'язків

$$y(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)} \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_1 \end{bmatrix} + (L_1^- g)(t), \quad (9)$$

де $\hat{c}_1$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{B}_1$, L_1^- — узагальнено обернений оператор до інтегрального оператора L_1 [11],

$$(L_1^- f)(t) = f(t) + M(t)D^- \int_a^b N(s)f(s) ds.$$

З (8) отримаємо операторне рівняння

$$Sc_2 = f_0, \quad (10)$$

з якого знайдемо значення $c_2 \in \mathbf{B}_2$, при якому інтегральне рівняння (6) буде розв'язним. Тут

$$S = \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s)P(s)W ds, \quad S: \mathbf{B}_2 \rightarrow \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1, \quad (11)$$

$$f_0 = -\mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s)f(s) ds, \quad f_0 \in \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1.$$

Нехай оператор S — узагальнено оборотний, а отже, нормально розв'язний [18]. Тоді існують обмежені проєктори $P_{N(S)}: \mathbf{B}_2 \rightarrow N(S)$, $\mathcal{P}_{Y_S}: \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1 \rightarrow Y_S$ і обмежений узагальнено обернений оператор $S^-: \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_2$ до оператора S .

Операторне рівняння (10) розв'язне тоді й лише тоді, коли виконується умова [14]

$$\mathcal{P}_{Y_S} \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s)f(s) ds = 0, \quad (12)$$

при виконанні якої воно має сім'ю розв'язків

$$c_2 = P_{N(S)}\hat{c}_2 + S^- f_0,$$

де $\hat{c}_2$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{B}_2$.

Підставивши $g(s)$ із (7) у розв'язок (9) інтегрального рівняння (6) і врахувавши заміну (5), отримаємо розв'язок інтегро-диференціального рівняння без керування (3) ($u(s) = 0$) [16]:

$$z(t) = [X_1(t), X_2(t)] \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix} + (\tilde{L}_1^- f)(t) + (\tilde{L}_1^- P)(t)W S^- f_0 + S^- f_0,$$

де

$$(\tilde{L}_1^- f)(t) = \int_a^t (L_1^- f)(s) ds, \quad (\tilde{L}_1^- P)(t) = \int_a^t (L_1^- P)(s) ds,$$

$$X_1(t) = \int_a^t \bar{X}_1(s) ds, \quad X_2(t) = (\tilde{L}_1^- P)(t) W P_{N(S)} + P_{N(S)}, \quad (13)$$

$$\bar{X}_1(t) = P(t)(p_{11} + p_{12}) + Q(t)(p_{21} + p_{22}).$$

За аналогією з [12] можна показати, що оператор

$$(L^- f)(t) = (\tilde{L}_1^- f)(t) - [(\tilde{L}_1^- P)(t) W + I_{\mathbf{B}_2}] S^- \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) f(s) ds$$

є узагальнено оберненим оператором до інтегро-диференціального оператора L . Тоді загальний розв'язок інтегро-диференціального рівняння (3) без керування ($u(s) = 0$) буде мати вигляд

$$z(t) = [X_1(t), X_2(t)] \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix} + (L^- f)(t), \quad (14)$$

де $\hat{c}_i$ — довільні елементи банахових просторів $\mathbf{B}_i$, $i = 1, 2$.

Нехай умова розв'язності (12) інтегро-диференціального рівняння (3) без керування не виконується. Знайдемо умови, за яких рівняння (3) з керуванням стане розв'язним.

З рівності (12) маємо, що інтегро-диференціальне рівняння з керуванням (3) має розв'язок для тих і лише тих правих частин, які задовольняють умову [11, 14]

$$\mathcal{P}_{Y_S} \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) \left[f(s) + \int_a^b K(s, \tau) u(\tau) d\tau \right] ds = 0. \quad (15)$$

З рівняння (15) отримаємо операторне рівняння

$$\int_a^b T(s) u(s) ds = \mathcal{P}_{Y_S} f_0, \quad (16)$$

де

$$T(s) = \mathcal{P}_{Y_S} \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(\tau) K(\tau, s) d\tau,$$

а елемент f_0 визначено рівністю (11).

Розв'язок рівняння (16) будемо шукати у вигляді

$$u(s) = \Phi(s) u, \quad (17)$$

де $\Phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t), \dots, \varphi_i(t), \dots)$ — оператор-функція, утворена з базисних векторів банахового простору $\mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3)$, $u \in \mathbf{B}_3$ — сталий вектор.

Нехай оператор $U = \int_a^b T(s) \Phi(s) ds$ узагальнено оборотний, а отже, нормально розв'язний. Тоді при виконанні умови

$$\mathcal{P}_{Y_U} \mathcal{P}_{Y_S} f_0 = -\mathcal{P}_{Y_U} \mathcal{P}_{Y_S} \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) f(s) ds = 0 \quad (18)$$

і лише при ній операторне рівняння

$$Uu = \mathcal{P}_{Y_S} f_0$$

розв'язне стосовно сталого вектора u і при цьому має сім'ю розв'язків

$$u = \mathcal{P}_{N(U)} \hat{u} + U^- \mathcal{P}_{Y_S} f_0, \quad (19)$$

де $\mathcal{P}_{N(U)} : \mathbf{B}_3 \rightarrow N(U)$, $\mathcal{P}_{Y_U} : \mathbf{B}_2 \rightarrow Y_U$ — обмежені проєктори, $U^- : \mathbf{B}_2 \rightarrow \mathbf{B}_3$ — обмежений узагальнено-обернений оператор [14], $\hat{u}$ — довільний вектор банахового простору $\mathbf{B}_3$.

Підставивши (19) у (17), отримаємо сім'ю керувань

$$u(s) = \Phi(s) \mathcal{P}_{N(U)} \hat{u} + \Phi(s) U^- \mathcal{P}_{Y_S} f_0,$$

при яких за формулою (14) рівняння з керуванням (3) буде мати сім'ю розв'язків

$$\begin{aligned} z(t) = [X_1(t), X_2(t)] \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix} + (L^- f)(t) \\ + \left(L^- \int_a^b K(\cdot, s) [\Phi(s) \mathcal{P}_{N(U)} \hat{u} + \Phi(s) U^- \mathcal{P}_{Y_S} f_0] ds \right) (t). \end{aligned}$$

Таким чином, для інтегро-диференціального рівняння (3) з керуванням справедлива така теорема.

Теорема 1 [1]. Нехай $D \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1)$, $S \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1)$ і $U \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_3, \mathbf{B}_2)$ — узагальнено оборотні оператори.

Тоді при виконанні умови (18) і лише при ній інтегро-диференціальне рівняння (3) з керуванням має сім'ю розв'язків

$$z(t) = [X_1(t), X_2(t), U(t)] \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \\ \hat{u} \end{bmatrix} + (L^- f)(t) + (L^- [K\Phi])(t) U^- \mathcal{P}_{Y_S} f_0, \quad (20)$$

де $X_1(t)$, $X_2(t)$ визначено рівностями (13),

$$[K\Phi](t) = \int_a^b K(t, s) \Phi(s) ds,$$

$$U(t) = (L^- [K\Phi])(t) \mathcal{P}_{N(U)}, \quad \hat{c}_i \in \mathbf{B}_i, \quad i = 1, 2, \quad \hat{u} \in \mathbf{B}_3$$

— довільні сталі. При цьому воно має сім'ю допустимих керувань

$$u(s) = \Phi(s) \mathcal{P}_{N(U)} \hat{u} + \Phi(s) U^- \mathcal{P}_{Y_S} f_0. \quad (21)$$

Проміжний результат. Для вирішення поставленої проблеми необхідно розв'язати задачу про умови розв'язності та вигляд загального розв'язку лінійного рівняння з операторною матрицею-рядком

$$\mathcal{Q} \begin{bmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \\ \bar{c}_3 \end{bmatrix} = \alpha, \quad (22)$$

де $\mathcal{Q} = [Q_1, Q_2, Q_3]$, Q_i , $i = \overline{1, 3}$, — лінійні обмежені оператори, $\mathcal{Q}: \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2 \times \mathbf{B}_3 \in \mathbf{B}$.

Зобразимо операторну матрицю $\mathcal{Q}$ у вигляді $\mathcal{Q} = [Q, Q_3]$, де $Q = [Q_1, Q_2]$.

Нехай оператори $Q_1 \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B})$ і $\hat{Q}_2 = \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} Q_2 \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_3, \mathbf{B})$ узагальнено оборотні. Тоді існують обмежені проєктори $\mathcal{P}_{N(Q_1)}: \mathbf{B}_1 \rightarrow N(Q_1)$, $\mathcal{P}_{Y_{Q_1}}: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B} \ominus R(Q_1)$ і $\mathcal{P}_{N(\hat{Q}_2)}: \mathbf{B}_3 \rightarrow N(\hat{Q}_2)$, $\mathcal{P}_{Y_{\hat{Q}_2}}: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B} \ominus R(\hat{Q}_2)$ [17], а також обмежені узагальнено обернені оператори Q_1^- , $\hat{Q}_2^-$ [14]. У цьому випадку операторна матриця $Q = [Q_1, Q_2]$ узагальнено оборотна [19, с. 545] і для неї існує обмежена узагальнено обернена операторна матриця

$$Q^- = \begin{bmatrix} Q_1^- (I_{\mathbf{B}} - Q_2 \hat{Q}_2^- \mathcal{P}_{Y_{Q_1}}) \\ \hat{Q}_2^- \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

При цьому обмежені проєктори $\mathcal{P}_{Y_Q}$ і $\mathcal{P}_{N(Q)}$ мають вигляд

$$\mathcal{P}_{Y_Q} = \mathcal{P}_{Y_{\hat{Q}_2}} \mathcal{P}_{Y_{Q_1}}, \quad \mathcal{P}_{N(Q)} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{N(Q_1)} & -Q_1^- Q_2 \mathcal{P}_{N(\hat{Q}_2)} \\ 0 & \mathcal{P}_{N(\hat{Q}_2)} \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Застосуємо ці формули до узагальненого обернення матриці $\mathcal{Q}$.

За теоремою 3 [19, с. 545] при виконанні умов $Q \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2, \mathbf{B})$ і $\hat{Q}_3 = \mathcal{P}_{Y_Q} Q_3 \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_3, \mathbf{B})$ оператора матриця $\mathcal{Q}$ буде мати обмежену узагальнено обернену

$$\mathcal{Q}^- = \begin{bmatrix} Q^- (I_{\mathbf{B}} - Q_3 \hat{Q}_3^- \mathcal{P}_{Y_Q}) \\ \hat{Q}_3^- \mathcal{P}_{Y_Q} \end{bmatrix} \quad (25)$$

і проєктори

$$\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{Q}}} = \mathcal{P}_{Y_{\hat{Q}_3}} \mathcal{P}_{Y_Q}, \quad \mathcal{P}_{N(\mathcal{Q})} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{N(Q)} & -Q^- Q_3 \mathcal{P}_{N(\hat{Q}_3)} \\ 0 & \mathcal{P}_{N(\hat{Q}_3)} \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Підставивши (23) у (25), отримаємо операторну матрицю

$$\mathcal{Q}^- = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^- (I_{\mathbf{B}} - Q_2 \hat{Q}_2^- \mathcal{P}_{Y_{Q_1}}) \\ \hat{Q}_2^- \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \end{bmatrix} (I_{\mathbf{B}} - Q_3 \hat{Q}_3^- \mathcal{P}_{Y_{\hat{Q}_2}} \mathcal{P}_{Y_{Q_1}}) \\ \hat{Q}_3^- \mathcal{P}_{Y_{\hat{Q}_2}} \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \end{bmatrix}$$

або після перетворень

$$\mathcal{Q}^- = \begin{bmatrix} Q_1^- \left(I_{\mathbf{B}} - Q_2 \hat{Q}_2^- \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \right) \left(I_{\mathbf{B}} - Q_3 \hat{Q}_3^- \mathcal{P}_{Y_{\hat{Q}_2}} \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \right) \\ \hat{Q}_2^- \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \left(I_{\mathbf{B}} - Q_3 \hat{Q}_3^- \mathcal{P}_{Y_{\hat{Q}_2}} \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \right) \\ \hat{Q}_3^- \mathcal{P}_{Y_{\hat{Q}_2}} \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \end{bmatrix}, \quad (27)$$

де $\hat{Q}_3 = \mathcal{P}_{Y_{\hat{Q}_2}} \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} Q_3$.

Аналогічно, підставивши (24) у (26), одержимо

$$\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{Q}}} = \mathcal{P}_{Y_{\hat{Q}_3}} \mathcal{P}_{Y_{\mathcal{Q}}} = \mathcal{P}_{Y_{\hat{Q}_3}} \mathcal{P}_{Y_{\hat{Q}_2}} \mathcal{P}_{Y_{Q_1}}, \quad (28)$$

$$\mathcal{P}_{N(\mathcal{Q})} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{N(Q_1)} & -Q_1^- Q_2 \mathcal{P}_{N(\hat{Q}_2)} \\ 0 & \mathcal{P}_{N(\hat{Q}_2)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -Q_1^- \left(I_{\mathbf{B}} - Q_2 \hat{Q}_2^- \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \right) \\ -\hat{Q}_2^- \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \end{bmatrix} \\ 0 & \begin{bmatrix} Q_3 \mathcal{P}_{N(\hat{Q}_3)} \\ \mathcal{P}_{N(\hat{Q}_3)} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

або після перетворень

$$\mathcal{P}_{N(\mathcal{Q})} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{N(Q_1)} & -Q_1^- Q_2 \mathcal{P}_{N(\hat{Q}_2)} & -Q_1^- \left(I_{\mathbf{B}} - Q_2 \hat{Q}_2^- \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \right) Q_3 \mathcal{P}_{N(\hat{Q}_3)} \\ 0 & \mathcal{P}_{N(\hat{Q}_2)} & -\hat{Q}_2^- \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} Q_3 \mathcal{P}_{N(\hat{Q}_3)} \\ 0 & 0 & \mathcal{P}_{N(\hat{Q}_3)} \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Теорема 2. Нехай $Q_1 \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B})$, $\hat{Q}_2 \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_2, \mathbf{B})$ і $\hat{Q}_3 \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_3, \mathbf{B})$ — узагальнено оборотні оператори. Тоді операторне рівняння (22) має розв'язки для тих і тільки тих α , які задовольняють умову

$$\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{Q}}} \alpha = \mathcal{P}_{Y_{\hat{Q}_3}} \mathcal{P}_{Y_{\hat{Q}_2}} \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \alpha = 0,$$

при виконанні якої воно має сім'ю розв'язків

$$\begin{bmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \\ \bar{c}_3 \end{bmatrix} = \mathcal{P}_{N(\mathcal{Q})} \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \\ \hat{c}_3 \end{bmatrix} + \mathcal{Q}^- \alpha, \quad (30)$$

де $\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{Q}}}$ — проектор (28) на підпростір $Y_{\mathcal{Q}} = \mathbf{B} \ominus R(\mathcal{Q})$, $\mathcal{P}_{N(\mathcal{Q})}$ — проектор (29) на нуль-простір $N(\mathcal{Q})$ оператора $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}^-$ — узагальнено обернена операторна матриця (27) до операторної матриці $\mathcal{Q}$, $\hat{c}_i \in \mathbf{B}_i$, $i = \overline{1, 3}$, — довільні елементи.

Спочатку покажемо, що оператор (27) є обмеженим узагальнено оберненим до оператора $\mathcal{Q}$. Для цього необхідно й достатньо показати, що $\mathcal{Q}^-$ задовольняє умови [13, 18]

$$1) \mathcal{Q} \mathcal{Q}^- \mathcal{Q} = \mathcal{Q}, \quad 2) \mathcal{Q}^- \mathcal{Q} \mathcal{Q}^- = \mathcal{Q}^-. \quad (31)$$

Перевіримо умову 1):

$$\mathcal{Q} \mathcal{Q}^- = [Q_1, Q_2, Q_3] \begin{bmatrix} Q_1^- \left(I_{\mathbf{B}} - Q_2 \hat{Q}_2^- \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \right) \left(I_{\mathbf{B}} - Q_3 \hat{Q}_3^- \mathcal{P}_{Y_{\hat{Q}_2}} \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \right) \\ \hat{Q}_2^- \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \left(I_{\mathbf{B}} - Q_3 \hat{Q}_3^- \mathcal{P}_{Y_{\hat{Q}_2}} \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \right) \\ \hat{Q}_3^- \mathcal{P}_{Y_{\hat{Q}_2}} \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= Q_1 Q_1^- \left(I_B - Q_2 \hat{Q}_2^- P_{Y_{Q_1}} \right) \left(I_B - Q_3 \hat{Q}_3^- P_{Y_{\hat{Q}_2}} P_{Y_{Q_1}} \right) \\
&\quad + Q_2 \hat{Q}_2^- P_{Y_{Q_1}} \left(I_B - Q_3 \hat{Q}_3^- P_{Y_{\hat{Q}_2}} P_{Y_{Q_1}} \right) + Q_3 \hat{Q}_3^- P_{Y_{\hat{Q}_2}} P_{Y_{Q_1}}.
\end{aligned}$$

Після перетворень отримаємо

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}\mathcal{Q}^- &= I_B - P_{Y_{\hat{Q}_2}} P_{Y_{Q_1}} + \left(I_B - P_{Y_{\hat{Q}_3}} \right) P_{Y_{\hat{Q}_2}} P_{Y_{Q_1}} \\
&= I_B - P_{Y_{\hat{Q}_3}} P_{Y_{\hat{Q}_2}} P_{Y_{Q_1}}.
\end{aligned} \tag{32}$$

Далі обчислимо

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}\mathcal{Q}^- \mathcal{Q} &= \left(I_B - P_{Y_{\hat{Q}_3}} P_{Y_{\hat{Q}_2}} P_{Y_{Q_1}} \right) [Q_1, Q_2, Q_3] \\
&= [Q_1, Q_2, Q_3] - \left(P_{Y_{\hat{Q}_3}} P_{Y_{\hat{Q}_2}} P_{Y_{Q_1}} \right) [Q_1, Q_2, Q_3] \\
&= \mathcal{Q} - \left[P_{Y_{\hat{Q}_3}} P_{Y_{\hat{Q}_2}} P_{Y_{Q_1}} Q_1, P_{Y_{\hat{Q}_3}} P_{Y_{\hat{Q}_2}} P_{Y_{Q_1}} Q_2, P_{Y_{\hat{Q}_3}} P_{Y_{\hat{Q}_2}} P_{Y_{Q_1}} Q_3 \right] = \mathcal{Q},
\end{aligned} \tag{33}$$

оскільки $P_{Y_{Q_1}} Q_1 = 0$, $P_{Y_{\hat{Q}_2}} P_{Y_{Q_1}} Q_2 = P_{Y_{\hat{Q}_2}} \hat{Q}_2 = 0$, $P_{Y_{\hat{Q}_3}} P_{Y_{\hat{Q}_2}} P_{Y_{Q_1}} Q_3 = P_{Y_{\hat{Q}_3}} \hat{Q}_3 = 0$.

Умова 2) з (31) є наслідком умови 1) [18], але її можна перевірити безпосередньо.

Далі покажемо, що $P_{Y_{\mathcal{Q}}} = P_{Y_{\hat{Q}_3}} P_{Y_{\hat{Q}_2}} P_{Y_{Q_1}}$ є проєктором на підпростір $Y_{\mathcal{Q}}$, тобто задовольняє умови

$$1) \mathcal{P}_{Y_{\mathcal{Q}}}^2 = P_{Y_{\mathcal{Q}}}, \quad 2) P_{Y_{\mathcal{Q}}} \mathcal{Q} = 0.$$

Очевидно, що

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{Q}}}^2 &= \left[P_{Y_{\hat{Q}_3}} P_{Y_{\hat{Q}_2}} P_{Y_{Q_1}} \right]^2 = [I_B - \mathcal{Q}\mathcal{Q}^-]^2 \\
&= I_B - 2\mathcal{Q}\mathcal{Q}^- + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^- \mathcal{Q}\mathcal{Q}^- = [I_B - \mathcal{Q}\mathcal{Q}^-] = P_{Y_{\hat{Q}_3}} P_{Y_{\hat{Q}_2}} P_{Y_{Q_1}},
\end{aligned}$$

оскільки, як було показано вище, $\mathcal{Q}\mathcal{Q}^- \mathcal{Q} = \mathcal{Q}$.

Другу умову $P_{Y_{\mathcal{Q}}} \mathcal{Q} = 0$ перевірено в (33).

Таким чином, $P_{Y_{\mathcal{Q}}}$ — проєктор на підпростір $Y_{\mathcal{Q}} = B \ominus R(\mathcal{Q})$. Його обмеженість є наслідком обмеженості операторів, із яких він складається.

Аналогічно можна перевірити, що оператор (29) $\mathcal{P}_{N(\mathcal{Q})}$ є обмеженим проєктором на нуль-простір $N(\mathcal{Q})$ оператора $\mathcal{Q}$, тобто задовольняє умови

$$1) \mathcal{P}_{N(\mathcal{Q})}^2 = \mathcal{P}_{N(\mathcal{Q})}, \quad 2) \mathcal{Q}\mathcal{P}_{N(\mathcal{Q})} = 0. \tag{34}$$

З (32) і (34) маємо, що (30) є розв'язком рівняння (22) при виконанні умови (28).

2. Основний результат. 2.1. Крайові задачі з керуванням для інтегро-диференціальних рівнянь у банахових просторах. Підставимо загальний розв'язок (20) інтегро-диференціального рівняння (3) і відповідне допустиме керування (21) у крайову умову (4). Отримаємо

$$\begin{aligned}
\ell z(\cdot) &= \begin{bmatrix} \ell X_1(\cdot), \ell X_2(\cdot), \ell X_3(\cdot) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \\ \hat{u} \end{bmatrix} + \ell(L^- f)(\cdot) + \ell(L^- [K\Phi])(\cdot) U^- P_{Y_S} f_0 \\
&= \alpha + G[\Phi(\cdot) \mathcal{P}_{N(U)} \hat{u} + \Phi(\cdot) U^- P_{Y_S} f_0].
\end{aligned}$$

Позначивши

$$\begin{aligned} Q_1 &= \ell X_1(\cdot), \quad Q_1: \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}, \quad Q_2 = \ell X_2(\cdot), \quad Q_2: \mathbf{B}_2 \rightarrow \mathbf{B}, \\ Q_3 &= \ell X_3(\cdot) - G\Phi(\cdot)\mathcal{P}_{N(U)}, \quad Q_3: \mathbf{B}_3 \rightarrow \mathbf{B}. \end{aligned}$$

після перетворень одержимо операторне рівняння

$$\mathcal{Q} \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \\ \hat{u} \end{bmatrix} = \alpha - \ell(L^-f)(\cdot) - [\ell(L^-[K\Phi])(\cdot) - G\Phi(\cdot)]U^- \mathcal{P}_{Y_S} f_0, \quad (35)$$

де $\mathcal{Q} = [Q_1, Q_2, Q_3]$.

Нехай виконуються умови теореми 2. Тоді оператор $\mathcal{Q}$ буде нормально розв'язним.

Нормально розв'язне рівняння (35) може бути: однозначно розв'язним ($\mathcal{P}_{N(\mathcal{Q})} \equiv 0$), всюди розв'язним ($\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{Q}}} \equiv 0$), неоднозначно і не всюди розв'язним ($\mathcal{P}_{N(\mathcal{Q})} \neq 0$, $\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{Q}}} \neq 0$) [2].

Розглянемо найбільш загальний випадок, коли рівняння (35) неоднозначно і не всюди розв'язне, тобто $\mathcal{P}_{N(\mathcal{Q})} \neq 0$, $\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{Q}}} \neq 0$. Оскільки оператор $\mathcal{Q}$ нормально розв'язний, то, використовуючи теорему 2, маємо, що рівняння (35) має розв'язок тоді й лише тоді, коли виконується умова [14]

$$\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{Q}}} \left\{ \alpha - \ell(L^-f)(\cdot) - [\ell(L^-[K\Phi])(\cdot) - G\Phi(\cdot)]U^- \mathcal{P}_{Y_S} f_0 \right\} = 0.$$

При виконанні цієї умови рівняння (35) має сім'ю розв'язків

$$\begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \\ \hat{u} \end{bmatrix} = \mathcal{P}_{N(\mathcal{Q})} \begin{bmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \\ \bar{u} \end{bmatrix} + \mathcal{Q}^- \left\{ \alpha - \ell(L^-f)(\cdot) - [\ell(L^-[K\Phi])(\cdot) - G\Phi(\cdot)]U^- \mathcal{P}_{Y_S} f_0 \right\}, \quad (36)$$

де $\hat{c}_i \in \mathbf{B}_i$, $i = 1, 2$, $\hat{u} \in \mathbf{B}_3$ — довільні елементи.

Позначивши для скорочення записів

$$\tilde{Q}_1 = Q_1^- \left(I_{\mathbf{B}} - Q_2 \hat{Q}_2^- \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \right) \left(I_{\mathbf{B}} - Q_3 \hat{Q}_3^- \mathcal{P}_{Y_{\hat{Q}_2}} \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \right), \quad (37)$$

$$\tilde{Q}_2 = Q_2^- \hat{Q}_2^- \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \left(I_{\mathbf{B}} - Q_3 \hat{Q}_3^- \mathcal{P}_{Y_{\hat{Q}_2}} \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \right), \quad \tilde{Q}_3 = \hat{Q}_3^- \mathcal{P}_{Y_{\hat{Q}_2}} \mathcal{P}_{Y_{Q_1}},$$

$$\mathcal{P}_{N(\mathcal{Q})} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{N(Q_1)} & \tilde{\mathcal{P}}_{N(\hat{Q}_2)} & \tilde{\mathcal{P}}_{N(\hat{Q}_3)} \\ 0 & \mathcal{P}_{N(\hat{Q}_2)} & \hat{\mathcal{P}}_{N(\hat{Q}_3)} \\ 0 & 0 & \mathcal{P}_{N(\hat{Q}_3)} \end{bmatrix}, \quad (38)$$

де

$$\tilde{\mathcal{P}}_{N(\hat{Q}_2)} = -Q_1^- Q_2 \mathcal{P}_{N(\hat{Q}_2)},$$

$$\tilde{\mathcal{P}}_{N(\hat{Q}_3)} = -Q_1^- \left(I_{\mathbf{B}} - Q_2 \hat{Q}_2^- \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \right) Q_3 \mathcal{P}_{N(\hat{Q}_3)}, \quad (39)$$

$$\hat{\mathcal{P}}_{N(\hat{Q}_3)} = -\hat{Q}_2^- \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} Q_3 \mathcal{P}_{N(\hat{Q}_3)},$$

розв'язок (36) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \\ \hat{u} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{N(Q_1)} & \tilde{\mathcal{P}}_{N(\hat{Q}_2)} & \tilde{\mathcal{P}}_{N(\hat{Q}_3)} \\ 0 & \mathcal{P}_{N(\hat{Q}_2)} & \hat{\mathcal{P}}_{N(\hat{Q}_3)} \\ 0 & 0 & \mathcal{P}_{N(\hat{Q}_3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \\ \bar{u} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \tilde{Q}_1^- \\ \tilde{Q}_2^- \\ \tilde{Q}_3^- \end{bmatrix} \left\{ \alpha - \ell(L^- f)(\cdot) - [\ell(L^- [K\Phi])(\cdot) - G\Phi(\cdot)]U^- \mathcal{P}_{Y_S} f_0 \right\}, \end{aligned} \quad (40)$$

де $\hat{c}_i \in \mathbf{B}_i$, $i = 1, 2$, $\hat{u} \in \mathbf{B}_3$ — довільні елементи.

Підставимо (40) у (20)

$$\begin{aligned} z(t) &= [X_1(t), X_2(t), U(t)] \\ &\times \left\{ \mathcal{P}_{N(Q)} \begin{bmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \\ \bar{u} \end{bmatrix} + \mathcal{Q}^- [\alpha - \ell(L^- f)(\cdot) - (\ell(L^- [K\Phi])(\cdot) - G\Phi(\cdot))U^- \mathcal{P}_{Y_S} f_0] \right\} \\ &+ (L^- f)(t) + (L^- [K\Phi])(t)U^- \mathcal{P}_{Y_S} f_0. \end{aligned}$$

Позначивши $\mathcal{X}(t) = [X_1(t), X_2(t), U(t)]$, отримаємо

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(t)\mathcal{P}_{N(Q)} &= [X_1(t), X_2(t), U(t)] \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{N(Q_1)} & \tilde{\mathcal{P}}_{N(\hat{Q}_2)} & \tilde{\mathcal{P}}_{N(\hat{Q}_3)} \\ 0 & \mathcal{P}_{N(\hat{Q}_2)} & \hat{\mathcal{P}}_{N(\hat{Q}_3)} \\ 0 & 0 & \mathcal{P}_{N(\hat{Q}_3)} \end{bmatrix} \\ &= [X_1(t)\mathcal{P}_{N(Q_1)}, X_1(t)\tilde{\mathcal{P}}_{N(\hat{Q}_2)} + X_2(t)\mathcal{P}_{N(\hat{Q}_2)}, \\ &\quad X_1(t)\tilde{\mathcal{P}}_{N(\hat{Q}_3)} + X_2(t)\hat{\mathcal{P}}_{N(\hat{Q}_3)} + U(t)\mathcal{P}_{N(\hat{Q}_3)}], \\ \mathcal{X}(t)\mathcal{Q}^- &= [X_1(t), X_2(t), U(t)] \begin{bmatrix} \tilde{Q}_1^- \\ \tilde{Q}_2^- \\ \tilde{Q}_3^- \end{bmatrix} = X_1(t)\tilde{Q}_1^- + X_2(t)\tilde{Q}_2^- + U(t)\tilde{Q}_3^-. \end{aligned}$$

Тоді загальний розв'язок крайової задачі (3), (4) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} z(t) &= \mathcal{X}(t)\mathcal{P}_{N(Q)} \begin{bmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \\ \bar{u} \end{bmatrix} + \mathcal{X}(t)\mathcal{Q}^- \alpha + (L^- f)(t) - \mathcal{X}(t)\mathcal{Q}^- \ell(L^- f)(\cdot) \\ &+ (L^- [K\Phi])(t)U^- \mathcal{P}_{Y_S} f_0 - \mathcal{X}(t)\mathcal{Q}^- [\ell(L^- [K\Phi])(\cdot) - G\Phi(\cdot)]U^- \mathcal{P}_{Y_S} f_0. \end{aligned}$$

З урахуванням позначень (37) і (38) з рівняння (40) знайдемо

$$\hat{u}(t) = \mathcal{P}_{N(\hat{Q}_3)} \bar{u} + \tilde{Q}_3^- \left\{ \alpha - \ell(L^- f)(\cdot) - [\ell(L^- [K\Phi])(\cdot) - G\Phi(\cdot)] U^- \mathcal{P}_{Y_S} f_0 \right\}.$$

Підставивши $\hat{u}$ з (26) у (21), отримаємо сім'ю допустимих керувань для крайової задачі (3), (4):

$$\begin{aligned} u(s) &= \Phi(s) \mathcal{P}_{N(U)} \mathcal{P}_{N(\hat{Q}_3)} \hat{u} \\ &+ \Phi(s) \left[\tilde{Q}_3^- \left\{ \alpha - \ell(L^- f)(\cdot) - [\ell(L^- [K\Phi])(\cdot) - G\Phi(\cdot)] U^- \mathcal{P}_{Y_S} f_0 \right\} \right] \\ &+ \Phi(s) U^- \mathcal{P}_{Y_S} f_0. \end{aligned}$$

Таким чином, для крайової задачі (3), (4) справедлива така теорема.

Теорема 3. Нехай $D \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1)$, $S \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1)$ і $U \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_3, \mathbf{B}_2)$ — узагальнено оборотні оператори.

Тоді якщо оператори $Q_1 \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B})$, $\hat{Q}_2 \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_2, \mathbf{B})$ і $\hat{Q}_3 \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_3, \mathbf{B})$ узагальнено оборотні, то крайова задача з керуванням (3), (4) розв'язна для тих і лише тих $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ і $\alpha \in \mathbf{B}$, які задовольняють систему умов

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{Y_U} \mathcal{P}_{Y_S} \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) f(s) ds = 0, \\ \mathcal{P}_{Y_Q} \{ \alpha - \ell(L^- f)(\cdot) - [\ell(L^- [K\Phi])(\cdot) - G\Phi(\cdot)] U^- \mathcal{P}_{Y_S} f_0 \} = 0, \end{cases}$$

при виконанні яких вона має сім'ю розв'язків

$$\begin{aligned} z(t) &= \mathcal{X}(t) \mathcal{P}_{N(Q)} \begin{bmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \\ \bar{u} \end{bmatrix} + \mathcal{X}(t) Q^- \alpha + (L^- f)(t) - \mathcal{X}(t) Q^- \ell(L^- f)(\cdot) \\ &+ (L^- [K\Phi])(t) U^- \mathcal{P}_{Y_S} f_0 - \mathcal{X}(t) Q^- [\ell(L^- [K\Phi])(\cdot) - G\Phi(\cdot)] U^- \mathcal{P}_{Y_S} f_0, \end{aligned}$$

де $\hat{c}_i \in \mathbf{B}_i$, $i = 1, 2$, $\hat{u} \in \mathbf{B}_3$ — довільні елементи.

При цьому згадана задача має сім'ю допустимих керувань

$$\begin{aligned} u(s) &= \Phi(s) \mathcal{P}_{N(U)} \mathcal{P}_{N(\hat{Q}_3)} \hat{u} + \Phi(s) \tilde{Q}_3^- \alpha - \Phi(s) \tilde{Q}_3^- \ell(L^- f)(\cdot) \\ &- \Phi(s) \tilde{Q}_3^- \ell(L^- [K\Phi])(\cdot) - \Phi(s) [I_{\mathbf{B}_3} - \tilde{Q}_3^- G\Phi(\cdot)] U^- \mathcal{P}_{Y_S} f_0. \end{aligned}$$

2.2. Особливі випадки крайових задач із керуванням для інтегро-диференціальних рівнянь.

Далі розглянемо два особливі випадки: 1) інтегро-диференціальне рівняння (1) — всюди розв'язне ($\mathcal{P}_{Y_L} = \mathcal{P}_{Y_S} \mathcal{P}_{Y_D} = 0$) і 2) інтегральне рівняння (6) — однозначно розв'язне ($\mathcal{P}_{N(D)} = 0$).

2.2.1. Нехай інтегро-диференціальний оператор L узагальнено оборотний і $\mathcal{P}_{Y_L} = \mathcal{P}_{Y_S} \mathcal{P}_{Y_D} = 0$. Тоді операторне рівняння (3) d -нормальне ($\dim Y_L = 0$), тобто всюди розв'язне [2]. Тому умови (12) і (15) будуть завжди виконуватися.

Отже, оператор-функцію $K(t, s)$ можна покласти рівною нулю, оскільки керування u не впливає на розв'язність інтегро-диференціального рівняння (1). Але у крайовій умові (4) керування залишимо, оскільки воно може вплинути на розв'язність крайової задачі (3), (4). У результаті отримаємо крайову задачу

$$(Lz)(t) : \equiv \dot{z}(t) - \int_a^b [P(t)W(s)z(s) + Q(t)V(s)\dot{z}(s)] ds = f(t), \quad (41)$$

$$\ell z(\cdot) = \alpha + Gu(\cdot). \quad (42)$$

У цьому випадку рівняння (41) буде мати сім'ю розв'язків

$$z(t) = [X_1(t), X_2(t)] \begin{bmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \end{bmatrix} + (L_r^- f)(t), \quad (43)$$

де $X_1(t)$, $X_2(t)$ визначені рівностями (13), $\hat{c}_i$, $i = 1, 2$, — довільні елементи, L_r^- — правий обернений оператор до інтегро-диференціального оператора L [14, с. 139].

Як і раніше, керування $u(t)$ будемо шукати у вигляді

$$u(t) = \Phi(t)\bar{u}, \quad (44)$$

де $\bar{u}$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{B}_3$.

Підставивши розв'язок (43) і керування (44) у крайову умову (4), отримаємо операторне рівняння стосовно $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$ та $\bar{u}$:

$$\ell z(\cdot) = [\ell X_1(\cdot), \ell X_2(\cdot)] \begin{bmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \end{bmatrix} + \ell(L_r^- f)(\cdot) = \alpha + G\Phi(\cdot)\bar{u}.$$

Позначивши

$$Q_1 = \ell X_1(\cdot), \quad Q_1 : \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}, \quad Q_2 = \ell X_2(\cdot), \quad Q_2 : \mathbf{B}_2 \rightarrow \mathbf{B}, \\ Q_3 = -G\Phi(\cdot), \quad Q_3 : \mathbf{B}_3 \rightarrow \mathbf{B},$$

після перетворень отримаємо

$$Q_1 \begin{bmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \\ \bar{u} \end{bmatrix} = \alpha - \ell(L_r^{-1} f)(\cdot), \quad (45)$$

де $Q_1 = [Q_1, Q_2, Q_3]$.

Нехай оператор Q_1 задовольняє умови теореми 2. Тоді рівняння (45) нормально розв'язне і при виконанні умови [14]

$$\mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \{ \alpha - \ell(L_r^{-1} f)(\cdot) \} = 0$$

воно має сім'ю розв'язків

$$\begin{bmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \\ \bar{u} \end{bmatrix} = \mathcal{P}_{N(Q_1)} \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \\ \hat{u} \end{bmatrix} - Q_1^- \{ \alpha - \ell(L_r^{-1} f)(\cdot) \},$$

де $\mathcal{P}_{Y_Q}$, Q^- , $\mathcal{P}_{N(Q)}$ визначені рівностями, аналогічними (27)–(29).

Враховуючи позначення (37)–(39), з останньої рівності отримаємо

$$\begin{bmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{N(Q_1)} & \tilde{\mathcal{P}}_{N(\hat{Q}_2)} & \tilde{\mathcal{P}}_{N(\hat{Q}_3)} \\ 0 & \mathcal{P}_{N(\hat{Q}_2)} & \hat{\mathcal{P}}_{N(\hat{Q}_3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \\ \hat{u} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{Q}_1^- \\ \tilde{Q}_2^- \end{bmatrix} \{ \alpha - \ell(L_r^- f)(\cdot) \}, \quad (46)$$

$$\bar{u} = \mathcal{P}_{N(\hat{Q}_3)} \hat{u} + \tilde{Q}_3^- \{ \alpha - \ell(L_r^- f)(\cdot) \}, \quad (47)$$

де $\hat{c}_i \in \mathbf{B}_i$, $i = 1, 2$, $\hat{u} \in \mathbf{B}_3$ — довільні елементи.

Підставивши (46) у (43), отримаємо розв'язок крайової задачі (1), (2):

$$z(t) = [X_1(t), X_2(t)] \times \left\{ \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{N(Q_1)} & \tilde{\mathcal{P}}_{N(\hat{Q}_2)} & \tilde{\mathcal{P}}_{N(\hat{Q}_3)} \\ 0 & \mathcal{P}_{N(\hat{Q}_2)} & \hat{\mathcal{P}}_{N(\hat{Q}_3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \\ \hat{u} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{Q}_1^- \\ \tilde{Q}_2^- \end{bmatrix} (\alpha - \ell(L_r^- f)(\cdot)) \right\} + (L_r^- f)(t).$$

Позначивши $\mathcal{X}_1(t) = [X_1(t), X_2(t)]$, одержимо

$$\mathcal{X}_1(t) \mathcal{Q}_1^- = [X_1(t), X_2(t)] \begin{bmatrix} \tilde{Q}_1^- \\ \tilde{Q}_2^- \end{bmatrix} = X_1(t) \tilde{Q}_1^- + X_2(t) \tilde{Q}_2^-,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_1(t) \mathcal{P}_{N(Q_1)} &= [X_1(t), X_2(t)] \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{N(Q_1)} & \tilde{\mathcal{P}}_{N(\hat{Q}_2)} & \tilde{\mathcal{P}}_{N(\hat{Q}_3)} \\ 0 & \mathcal{P}_{N(\hat{Q}_2)} & \hat{\mathcal{P}}_{N(\hat{Q}_3)} \end{bmatrix} \\ &= [X_1(t) \mathcal{P}_{N(Q_1)}, X_1(t) \tilde{\mathcal{P}}_{N(\hat{Q}_2)} + X_2(t) \mathcal{P}_{N(\hat{Q}_2)}, X_1(t) \tilde{\mathcal{P}}_{N(\hat{Q}_3)} + X_2(t) \hat{\mathcal{P}}_{N(\hat{Q}_3)}]. \end{aligned}$$

Тоді загальний розв'язок крайової задачі (3), (4) запишемо у вигляді

$$z(t) = \mathcal{X}_1(t) \mathcal{P}_{N(Q_1)} \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \\ \hat{u} \end{bmatrix} + \mathcal{X}_1(t) \mathcal{Q}_1^- \alpha + (L_r^- f)(t) - \mathcal{X}_1(t) \mathcal{Q}_1^- \ell(L_r^- f)(\cdot). \quad (48)$$

Підставивши (47) у (44), здобудемо загальний вигляд керування $u(t)$, при якому крайова задача (1), (2) буде розв'язною:

$$u(t) = \Phi(t) \mathcal{P}_{N(\hat{Q}_3)} \hat{u} + \Phi(t) \tilde{Q}_3^- \{ \alpha - \ell(L_r^- f)(\cdot) \}, \quad (49)$$

де $\hat{u} \in \mathbf{B}_3$ — довільний елемент.

Теорема 4. Нехай $D \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1)$, $S \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1)$ — узагальнено оборотні оператори і $\mathcal{P}_{Y_L} = \mathcal{P}_{Y_S} \mathcal{P}_{Y_D} = 0$.

Тоді, якщо оператори $Q_1 \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B})$, $\hat{Q}_2 \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_2, \mathbf{B})$ і $\hat{Q}_3 \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_3, \mathbf{B})$ узагальнено оборотні, то крайова задача з керуванням (41), (42) розв'язна для тих і лише тих $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ і $\alpha \in \mathbf{B}$, які задовольняють умову

$$\mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \{ \alpha - \ell(L_r^{-1} f)(\cdot) \} = 0,$$

при виконанні якої вона має сім'ю розв'язків (48).

При цьому вона має сім'ю допустимих керувань (49).

2.2.2. Розглянемо питання про однозначну розв'язність інтегро-диференціального рівняння (3). З формул (13) маємо, що $X_1(t)$ і $X_2(t)$ будуть дорівнювати нулю, коли $\mathcal{P}_{N(D)} = 0$ і $\mathcal{P}_{N(S)} = 0$. Але рівність нулю проєктора $\mathcal{P}_{N(D)}$ обумовлює рівність нулю проєктора $\mathcal{P}_{Y_D}$, а це означає, що оператор S рівний нулю, а $\mathcal{P}_{N(S)} = I_{\mathbf{B}_2}$. Тобто $X_2(t)$ не може бути нульовим.

Тому розглянемо випадок, коли $\mathcal{P}_{N(D)} = 0$, тобто інтегральне рівняння (6) однозначно і всюди розв'язне, а оператор L_1 має обернений оператор L_1^{-1} .

Розв'язок рівняння (6) у цьому випадку має вигляд

$$y(t) = (L_1^{-1}g)(t),$$

де L_1^{-1} — обернений оператор до інтегрального оператора L_1 , дія якого на вектор-функцію $g(t)$ відбувається за правилом

$$(L_1^{-1}g)(t) = g(t) + M(t)D^{-1} \int_a^b N(s)g(s) ds.$$

Підставивши $g(t) = f(t) + P(t)Wc_2$, отримаємо загальний розв'язок інтегрального рівняння (6)

$$y(t) = (L_1^{-1}P)(t)Wc_2 + (L_1^{-1}f)(t),$$

де

$$(L_1^{-1}P)(t) = P(t) + M(t)D^{-1} \int_a^b N(s)P(s) ds,$$

$$(L_1^{-1}f)(t) = f(t) + M(t)D^{-1} \int_a^b N(s)f(s) ds.$$

Враховуючи заміну (5), знайдемо загальний розв'язок інтегро-диференціального рівняння (3) без керування

$$z(t) = X_2(t)\bar{c}_2 + (\tilde{L}_1^{-1}f)(t), \quad (50)$$

де $\bar{c}_2 = c_2 \in \mathbf{B}_2$ — довільний елемент,

$$X_2(t) = (\tilde{L}_1^{-1}P)(t)W + I_{\mathbf{B}_2},$$

$$(\tilde{L}_1^{-1}f)(t) = \int_a^t (L_1^{-1}f)(s) ds,$$

$$(\tilde{L}_1^{-1}P)(t) = \int_a^t (L_1^{-1}P)(s) ds.$$

Як і раніше, керування $u(t)$ будемо шукати у вигляді $u(t) = \Phi(t)\bar{u}$, де $\bar{u}$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{B}_3$.

Підставивши розв'язок (50) у крайову умову (2), отримаємо операторне рівняння стосовно $\bar{c}_2$ і $\bar{u}$:

$$\ell z(\cdot) = \ell X_2(\cdot)\bar{c}_2 + \ell\left(\tilde{L}_1^{-1}f\right)(\cdot) = \alpha + G\Phi(\cdot)\bar{u}.$$

Позначивши

$$Q_2 = \ell X_2(\cdot), \quad Q_2: \mathbf{B}_2 \rightarrow \mathbf{B}, \quad Q_3 = -G\Phi(\cdot), \quad Q_3: \mathbf{B}_3 \rightarrow \mathbf{B}.$$

після перетворень будемо мати

$$\mathcal{Q}_2 \begin{bmatrix} \bar{c}_2 \\ \bar{u} \end{bmatrix} = \alpha - \ell\left(\tilde{L}_1^{-1}f\right)(\cdot), \quad (51)$$

де $\mathcal{Q}_2 = [Q_2, Q_3]$.

Нехай оператори $Q_2 \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B})$ і $\hat{Q}_3 = \mathcal{P}_{Y_{Q_2}}Q_3 \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_3, \mathbf{B})$ узагальнено оборотні. Тоді існують обмежені проєктори $\mathcal{P}_{N(Q_2)}: \mathbf{B}_2 \rightarrow N(Q_2)$, $\mathcal{P}_{Y_{Q_2}}: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B} \ominus R(Q_2)$ і $\mathcal{P}_{N(\hat{Q}_3)}: \mathbf{B}_3 \rightarrow N(\hat{Q}_3)$, $\mathcal{P}_{Y_{\hat{Q}_3}}: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B} \ominus R(\hat{Q}_3)$ [17], а також обмежені узагальнено обернені оператори Q_2^- , $\hat{Q}_3^-$ [14]. У цьому випадку операторна матриця $\mathcal{Q}_2 = [Q_2, Q_3]$ узагальнено оборотна [19, с. 545] і для неї існує обмежена узагальнено обернена операторна матриця

$$\mathcal{Q}_2^- = \begin{bmatrix} Q_2^- (I_{\mathbf{B}} - Q_3 \hat{Q}_3^- \mathcal{P}_{Y_{Q_2}}) \\ \hat{Q}_3^- \mathcal{P}_{Y_{Q_2}} \end{bmatrix}. \quad (52)$$

При цьому обмежені проєктори $\mathcal{P}_{Y_{Q_2}}$ і $\mathcal{P}_{N(Q_2)}$ мають вигляд

$$\mathcal{P}_{Y_{Q_2}} = \mathcal{P}_{Y_{\hat{Q}_3}} \mathcal{P}_{Y_{Q_2}}, \quad \mathcal{P}_{N(Q_2)} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{N(Q_2)} & -Q_2^- Q_3 \mathcal{P}_{N(\hat{Q}_3)} \\ 0 & \mathcal{P}_{N(\hat{Q}_3)} \end{bmatrix}. \quad (53)$$

Таким чином, рівняння (51) нормально розв'язне і при виконанні умови [14]

$$\mathcal{P}_{Y_{Q_2}} \left\{ \alpha - \ell\left(\tilde{L}_1^{-1}f\right)(\cdot) \right\} = 0$$

і лише при ній має сім'ю розв'язків

$$\begin{bmatrix} \bar{c}_2 \\ \bar{u} \end{bmatrix} = \mathcal{P}_{N(Q_2)} \begin{bmatrix} \hat{c}_2 \\ \hat{u} \end{bmatrix} - \mathcal{Q}_2^- \left\{ \alpha - \ell\left(\tilde{L}_1^{-1}f\right)(\cdot) \right\}, \quad (54)$$

де $\mathcal{P}_{N(Q_2)}$, $\mathcal{P}_{Y_{Q_2}}$, Q_2^- визначено рівностями (52), (53).

Позначивши

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_2^- &= Q_2^- (I_{\mathbf{B}} - Q_3 \hat{Q}_3^- \mathcal{P}_{Y_{Q_2}}), & \tilde{Q}_3^- &= \hat{Q}_3^- \mathcal{P}_{Y_{Q_2}}, \\ \tilde{\mathcal{P}}_{N(\hat{Q}_3)} &= -Q_2^- Q_3 \mathcal{P}_{N(\hat{Q}_3)}, \end{aligned}$$

з (54) з урахуванням (53) отримаємо

$$\bar{c}_2 = \mathcal{P}_{N(Q_2)}\hat{c}_2 + \tilde{\mathcal{P}}_{N(\hat{Q}_3)}\hat{u} + \tilde{Q}_2^- \left\{ \alpha - \ell\left(\tilde{L}_1^{-1}f\right)(\cdot) \right\}, \quad (55)$$

$$\bar{u} = \mathcal{P}_{N(\hat{Q}_3)}\hat{u} + \tilde{Q}_3^- \left\{ \alpha - \ell\left(\tilde{L}_1^{-1}f\right)(\cdot) \right\}, \quad (56)$$

де $\hat{c}_2 \in \mathbf{B}_2$, $\hat{u} \in \mathbf{B}_3$ — довільні елементи.

Підставивши (55), (56) у (50), отримаємо загальний розв'язок крайової задачі (1), (2)

$$z(t) = X_2(t) \left[\mathcal{P}_{N(Q_2)}\hat{c}_2 + \tilde{\mathcal{P}}_{N(\hat{Q}_3)}\hat{u} \right] + \tilde{Q}_2^- \left(\alpha - \ell\left(\tilde{L}_1^{-1}f\right)(\cdot) \right) + \left(\tilde{L}_1^{-1}f \right)(t). \quad (57)$$

Теорема 5. Нехай оператор $D: \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1$ оборотний.

Тоді, якщо $Q_2 \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_2, \mathbf{B})$ та $\hat{Q}_3 \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_3, \mathbf{B})$ — узагальнено оборотні оператори, то крайова задача з керуванням (3), (4) розв'язна для тих і лише тих $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ і $\alpha \in \mathbf{B}$, які задовольняють умову

$$\mathcal{P}_{Y_{Q_2}} \left\{ \alpha - \ell\left(\tilde{L}_1^{-1}f\right)(\cdot) \right\} = 0,$$

при виконанні якої вона має сім'ю розв'язків (57).

При цьому вона має сім'ю допустимих керувань (56).

Література

1. В. П. Журавльов, Н. В. Гонгало, І. П. Слюсаренко, Умови керованості інтегро-диференціальних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у банахових просторах, Нелін. коливання, **24**, № 4, 482–497 (2021).
2. С. Г. Крейн, *Линейные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, Москва (1971).
3. О. А. Бойчук, В. П. Журавльов, *Крайові задачі з керуванням для операторних рівнянь у банахових просторах*, Укр. мат. журн., **73**, № 5, 602–618 (2021).
4. Ю. К. Ландо, *Об индексе и нормальной разрешимости интегро-дифференциальных операторов*, Дифференц. уравнения, **4**, № 6, 1112–1126 (1968).
5. В. Ф. Журавлев, *Условия бифуркации решений слабозмущенных краевых задач для операторных уравнений в банаховых пространствах*, Укр. мат. журн., **70**, № 3, 366–378 (2018); **English translation:** Ukr. Math. J., **70**, № 3, 422–436 (2018).
6. В. П. Журавльов, М. П. Фомін, *Слабко збурені інтегро-диференціальні рівняння з виродженим ядром у банахових просторах*, Нелін. коливання, **23**, № 2, 184–199 (2020).
7. А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко, *Линейные нетеровы краевые задачи для импульсных дифференциальных систем с запаздыванием*, Дифференц. уравнения, **30**, № 10, 1677–1682 (1994).
8. Gupta Vidushi, Dabas Jaydev, *Existence results for a fractional integro-differential equation with nonlocal boundary conditions and fractional impulsive conditions*, Nonlinear Dyn. Syst. Theory, **15**, № 4, 370–382 (2015).
9. І. А. Бондар, *Імпульсні крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь*, Буковин. мат. журн., **2**, № 4, 7–11 (2014).
10. І. А. Бондар, *Умови керування для незавжди розв'язних інтегро-диференціальних рівнянь із виродженим ядром та крайових задач для них*, Буковин. мат. журн., **4**, № 1-2, 13–17 (2016).
11. В. П. Журавльов, *Узагальнене обернення інтегральних операторів Фредгольма з виродженим ядром у банахових просторах*, Нелін. коливання, **17**, № 3, 351–364 (2014); **English translation:** J. Math. Sci., **212**, № 3, 275–289 (2016).
12. В. П. Журавльов, *Узагальнено-обернений оператор до інтегро-диференціального в банаховому просторі*, Нелін. коливання, **22**, № 2, 202–219 (2019); **English translation:** J. Math. Sci., **249**, № 4, 609–628 (2020).

13. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. Second edition*, De Gruyter, Berlin (2016).
14. А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко, *Нормально разрешимые краевые задачи*, Наук. думка, Киев (2019).
15. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, Москва (1970).
16. A. A. Boichuk, V. F. Zhuravlev, *Solvability criterion for integro-differential equations with degenerate kernel in Banach spaces*, Nonlinear Dyn. Syst. Theory, **18**, № 4, 331 – 341 (2018).
17. М. М. Попов, *Доповнювальні простори і деякі задачі сучасної геометрії просторів Банаха*, Математика сьогодні'07, вип. 13, 78 – 116 (2007).
18. И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, *Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов*, Штиинца, Кишинев (1973).
19. В. Ф. Журавлев, П. Н. Забродский, Н. П. Фомин, *Условия разрешимости и представление решений уравнений с операторными матрицами*, Укр. мат. журн., **71**, № 4, 471 – 485 (2019); **English translation:** Ukr. Mat. J., **71**, № 4, 537 – 552 (2019).

Одержано 15.05.23