

ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ З КУСКОВО-СТАЛИМИ ОПЕРАТОРНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Михайло Городній

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
вул. Володимирська, 64, Київ, 01033, Україна
e-mail: horodnii@gmail.com

Necessary and sufficient conditions for the existence of a unique bounded solution of a linear difference equation with piecewise constant operator coefficients are obtained.

Отримано необхідні й достатні умови існування єдиного обмеженого розв'язку лінійного різницевого рівняння з кусково-сталими операторними коефіцієнтами.

1. Вступ. Нехай X — комплексний банахів простір з нормою $\|\cdot\|$ і нульовим елементом $\bar{0}$; $L(X)$ — простір лінійних неперервних операторів, що діють із X у X ; I , O — відповідно одиничний і нульовий оператори в X . Через $\sigma(T)$, $\rho(T)$, $r(T)$ позначимо відповідно спектр, резольвентну множину і спектральний радіус оператора $T \in L(X)$. Покладемо

$$l_\infty(\mathbb{Z}, X) = \left\{ \bar{x} = \{x_n, n \in \mathbb{Z}\} \subset X \mid \|\bar{x}\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|x_n\| < \infty \right\}.$$

Відзначимо, що $l_\infty(\mathbb{Z}, X)$ — банахів простір із покоординатним додаванням і множенням на комплексне число і нормою $\|\cdot\|_\infty$.

Зафіксуємо натуральне число p та оператори A , B , A_1 , $A_2, \dots, A_p$ з $L(X)$ і розглянемо різницеве рівняння

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ax_n + y_n, & n \geq p+1, \\ x_{n+1} = A_n x_n + y_n, & 1 \leq n \leq p, \\ x_{n+1} = Bx_n + y_n, & n \leq 0, \end{cases} \quad (1)$$

у якому $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — задана, а $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — шукана послідовності елементів простору X . Будемо досліджувати умови для операторів $A, B, A_1, A_2, \dots, A_p$, що забезпечують виконання такої умови.

Умова обмеженості. Для довільного елемента $\bar{y} = \{y_n, n \in \mathbb{Z}\} \in l_\infty(\mathbb{Z}, X)$ рівняння (1) має єдиний розв'язок $\bar{x} = \{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ у просторі $l_\infty(\mathbb{Z}, X)$.

Відомо (див., наприклад, [1, с. 32–34]), що коли спектр $\sigma(A)$ оператора A не перетинається з одиничним колом $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $\sigma_-(A)$ — частина спектра оператора A , що лежить всередині, а $\sigma_+(A)$ — зовні кола S (одна з них може бути порожньою), $P_-(A)$ і

$P_+(A)$ — проектори Рісса, що відповідають $\sigma_-(A)$ і $\sigma_+(A)$, то простір X розкладається в пряму суму $X = X_-(A) \dot{+} X_+(A)$ інваріантних відносно A підпросторів $X_{\pm}(A) = P_{\pm}(A)(X)$ таким чином, що звуження A_- , A_+ оператора A на $X_-(A)$, $X_+(A)$ мають відповідно спектри $\sigma_-(A)$, $\sigma_+(A)$. Цей факт використано для доведення такої теореми.

Теорема 1 [2]. *Різницеве рівняння*

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ax_n + y_n, & n \geq 1, \\ x_{n+1} = Bx_n + y_n, & n \leq 0, \end{cases} \quad (2)$$

задовольняє умову обмеженості тоді й тільки тоді, коли виконуються такі умови:

- a1) $\sigma(A) \cap S = \emptyset$, $\sigma(B) \cap S = \emptyset$;
- a2) $X = X_-(A) \dot{+} X_+(B)$.

Зазначимо, що умови обмеженості для різницевого рівняння (1) і (2) формулюються аналогічно.

Використовуючи еквівалентність умови обмеженості і умови експоненціальної дихотомії для лінійного різницевого рівняння зі змінним операторним коефіцієнтом, В. Ю. Слюсарчук у [3] отримав такий критерій виконання умови обмеженості для різницевого рівняння (1).

Теорема 2. *Різницеве рівняння (1) задовольняє умову обмеженості тоді й тільки тоді, коли банахів простір X зображується у вигляді прямих сум підпросторів*

$$X = X_0^+ \dot{+} X_0^- = X_1^+ \dot{+} X_1^- = \dots = X_{p+1}^+ \dot{+} X_{p+1}^-, \quad (3)$$

для яких виконуються такі умови:

b1) $A(X_{p+1}^+) \subset X_{p+1}^+$, $A(X_{p+1}^-) = X_{p+1}^-$, оператор $\mathbb{P}_{p+1}^- A \mathbb{P}_{p+1}^- : X_{p+1}^- \rightarrow X_{p+1}^-$ має неперервний обернений оператор $(\mathbb{P}_{p+1}^- A \mathbb{P}_{p+1}^-)^{-1}$ і $r(\mathbb{P}_{p+1}^+ A \mathbb{P}_{p+1}^+) < 1$, $r((\mathbb{P}_{p+1}^- A \mathbb{P}_{p+1}^-)^{-1}) < 1$ (при фіксованому $0 \leq k \leq p+1$ $\mathbb{P}_k^+$, $\mathbb{P}_k^-$ — проектори, що відповідають зображенню $X = X_k^+ \dot{+} X_k^-$);

b2) $B(X_0^+) \subset X_0^+ \cap X_1^+$, $B(X_0^-) = X_0^- = X_1^-$, оператор $\mathbb{P}_0^- B \mathbb{P}_0^- : X_0^- \rightarrow X_0^-$ має неперервний обернений оператор $(\mathbb{P}_0^- B \mathbb{P}_0^-)^{-1}$ і $r(\mathbb{P}_0^+ B \mathbb{P}_0^+) < 1$, $r((\mathbb{P}_0^- B \mathbb{P}_0^-)^{-1}) < 1$;

b3) A_k бієктивно відображає X_k^- на X_{k+1}^- і $A(X_k^+) \subset X_{k+1}^+$ для кожного $1 \leq k \leq p$.

Зазначимо, що перевірка умов теореми 2, як і умови експоненціальної дихотомії, нетривіальна, оскільки доведення теореми 2 не містить ефективного способу побудови зображень (3) простору X .

Для скорочення запису покладемо $A_{jk} = A_k A_{k-1} \dots A_j$, $1 \leq j \leq k \leq p$. Основним результатом цієї статті є таке узагальнення теореми 1 на випадок різницевого рівняння (1).

Теорема 3. *Для того щоб різницеве рівняння (1) задовольняло умову обмеженості, необхідно й достатньо, щоб виконувалися такі умови:*

- i1) $\sigma(A) \cap S = \emptyset$, $\sigma(B) \cap S = \emptyset$;
- i2) $A_{1k}(X_+(B))$ — підпростір у X , а також оператор A_{1k} бієктивно відображає $X_+(B)$ на $A_{1k}(X_+(B))$ для кожного $1 \leq k \leq p$;
- i3) $X = X_-(A) \dot{+} A_{1p}(X_+(B))$.

Зауваження 1. У [4] доведено, що коли оператор A_{1p} є ін'єкцією і виконується умова i1), то для того щоб різницеве рівняння (1) задовольняло умову обмеженості, необхідно й достатньо, щоб виконувалася умова i3).

Для лінійного різницевого рівняння еквівалентність умови обмеженості та умови експоненціальної дихотомії доведено в [5, 6] для обмеженого та в [7] для необмеженого змінного операторного коефіцієнта. Про існування, зображення і властивості обмежених розв'язків лінійних різницевого рівнянь див., наприклад, [5, 8 – 10] та наведену там бібліографію.

2. Допоміжні твердження. Покладемо

$$Q_-(A) = \left\{ u \in X \mid \sup_{n \geq 1} \|A^n u\| < \infty \right\},$$

$$Q_+(B) = \left\{ u \in X \mid \text{існує така послідовність } \{a(k, u), k \leq 0\}, \text{ що}$$

$$a(0, u) = u; Ba(k, u) = a(k+1, u) \text{ для кожного } k \leq -1; \sup_{k \leq 0} \|a(k, u)\| < \infty \right\}.$$

Зазначимо, що $Q_-(A)$, $Q_+(B)$ — лінійні многовиди, інваріантні відносно операторів A і B відповідно.

Для доведення теореми 3 використано такі леми.

Лема 1. Якщо різницеве рівняння (1) задовольняє умову обмеженості, то для кожного $u \in Q_+(B)$ існує єдина послідовність $\{a(k, u), k \leq 0\}$ з означення $Q_+(B)$, $Q_+(B)$ є підпростором у X , а також оператор A_{1k} бієктивно відображає $Q_+(B)$ на $A_{1k}(Q_+(B))$ і $A_{1k}(Q_+(B))$ є підпростором у X для кожного $1 \leq k \leq p$.

Доведення. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що при фіксованих $1 \leq k \leq p$, $y \in Q_+(B)$ послідовність

$$\left\{ \dots, a(-2, y), \underbrace{a(-1, y)}_0, y, A_{11}y, A_{12}y, \dots, A_{1(k-1)}y, \bar{0}, \bar{0}, \dots \right\} \quad (4)$$

є відповідним до послідовності $y_k = -A_{1k}y$, $y_n = \bar{0}$, $n \neq k$, обмеженим розв'язком рівняння (1). Унаслідок умови обмеженості він єдиний. Тому послідовність $\{a(k, y), k \leq 0\}$ визначається єдиним чином, а також оператор A_{1k} бієктивно відображає $Q_+(B)$ на $A_{1k}(Q_+(B))$.

Оскільки $Q_+(B)$ — лінійний многовид, то $A_{1k}(Q_+(B))$ теж є лінійним многовидом. Перевіримо, що він замкнений, а отже, є підпростором у X . Зафіксуємо таку послідовність $\{v_m, m \geq 1\} \subset A_{1p}(Q_+(B))$, що $v_m \rightarrow v$, $m \rightarrow \infty$ в X , і доведемо, що $v \in A_{1k}(Q_+(B))$.

Скориставшись тим, що оператор A_{1k} бієктивно відображає $Q_+(B)$ на $A_{1k}(Q_+(B))$, робимо висновок, що для кожного $m \geq 1$ знайдеться єдиний елемент $u_m \in Q_+(B)$ такий, що $A_{1k}u_m = v_m$. Покладемо

$$\bar{v}_m = \left\{ \dots, \bar{0}, \bar{0}, \underbrace{-v_m}_k, \bar{0}, \bar{0}, \dots \right\}.$$

Тоді у просторі $l_\infty(\mathbb{Z}, X)$

$$\bar{v}_m \rightarrow \bar{v} = \left\{ \dots, \bar{0}, \bar{0}, \underbrace{-v}_k, \bar{0}, \bar{0}, \dots \right\}, \quad m \rightarrow \infty.$$

Розглянемо оператор $\mathcal{T} \in l_\infty(\mathbb{Z}, X)$, який визначається за правилом

$$\mathcal{T}\bar{x} = \{x_{n+1} - T_n x_n, n \in \mathbb{Z}\}, \quad \bar{x} = \{x_n, n \in \mathbb{Z}\} \in l_\infty(\mathbb{Z}, X),$$

де $T_n = A$, $n \geq p+1$, $T_n = A_n$, $1 \leq n \leq p$, $T_n = B$, $n \leq 0$. З умови обмеженості і теореми Банаха про обернений оператор випливає, що оператор $\mathcal{T}$ неперервно оборотний. Тому

$$\mathcal{T}^{-1}\bar{v}_m \rightarrow \mathcal{T}^{-1}\bar{v}, \quad m \rightarrow \infty, \quad (5)$$

у просторі $l_\infty(\mathbb{Z}, X)$.

Аналогічно до (4) для кожного $m \geq 1$

$$\mathcal{T}^{-1}\bar{v}_m = \left\{ \dots, a(-2, u_m), \underbrace{a(-1, u_m)}_0, u_m, A_{11}u_m, A_{12}u_m, \dots, A_{1(k-1)}u_m, \dots, \bar{0}, \bar{0}, \dots \right\}.$$

Отже, якщо $\mathcal{T}^{-1}\bar{v} = \{w_n, n \in \mathbb{Z}\}$, то внаслідок (5) і включення $u_m \in Q_+(B)$ для кожного $n \leq 0$

$$a(n, u_m) = Ba(n-1, u_m), \quad a(n, u_m) \rightarrow w_{n+1}, \quad m \rightarrow \infty.$$

Тому $w_{n+1} = Bw_n$, $n \leq 0$, а також $u_m = a(0, u_m) \rightarrow w_1$, $m \rightarrow \infty$, і $v_m = A_{1k}u_m \rightarrow v = A_{1k}w_1$, $m \rightarrow \infty$.

Таким чином, $w_1 \in Q_+(B)$, $a(n, w_1) = w_{n+1}$, $n \leq 0$, а отже, $v = A_{1k}w_1 \in A_{1k}(Q_+(B))$.

Оскільки при фіксованому $y \in Q_+(B)$ єдиним обмеженням розв'язком рівняння (1), відповідним до обмеженої послідовності $y_0 = -y$, $y_n = \bar{0}$, $n \neq 0$, є послідовність

$$\left\{ \dots, a(-2, y), \underbrace{a(-1, y)}_0, \bar{0}, \bar{0}, \dots \right\},$$

то аналогічно перевіряється, що $Q_+(B)$ — підпростір у X .

Лемі 1 доведено.

Лема 2. Якщо різницеве рівняння (1) задовольняє умову обмеженості, то $Q_-(A)$ є підпростором у X .

Доведення леми 2 проводиться тим же способом, що й леми 1, з урахуванням, що при фіксованому $y \in Q_-(A)$ єдиним обмеженням розв'язком (1), відповідним до обмеженої послідовності $y_{p+1} = y$, $y_n = \bar{0}$, $n \neq p+1$, є послідовність

$$\left\{ \dots, \bar{0}, \bar{0}, \underbrace{y}_{p+2}, Ay, A^2y, \dots \right\}.$$

Лема 3. Якщо різницеве рівняння (1) задовольняє умову обмеженості, то

$$X = Q_-(A) \dot{+} A_{1p}(Q_+(B)).$$

Доведення. Зафіксуємо $y \in X$. Нехай $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — єдиний обмежений розв'язок рівняння (1), відповідний до послідовності $y_p = y$, $y_n = \bar{0}$, $n \neq p$. Тоді $x_{p+1} = A_{1p}x_1 + y$. Оскільки $x_{p+1+n} = A^n x_{p+1}$, $n \geq 1$, $x_{k+1} = Bx_k$, $k \leq 0$, і $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|x_n\| < \infty$, то $x_{p+1} \in Q_-(A)$, $x_1 \in Q_+(B)$. Тому $y = x_{p+1} + (-A_{1p}x_1)$, де $x_{p+1} \in Q_-(A)$, $-A_{1p}x_1 \in A_{1p}(Q_+(B))$.

Нехай, від супротивного, існує ненульовий елемент $u \in Q_-(A) \cap A_{1p}(Q_+(B))$. Тоді знайдеться такий елемент $v \in Q_+(B)$, що $A_{1p}v = u$, і безпосередньо перевіряється, що відповідне до (1) однорідне різницеве рівняння має ненульовий обмежений розв'язок

$$\left\{ \dots, a(-2, v), a(-1, v), \underbrace{v}_1, A_{11}v, A_{12}v, \dots, A_{1p}v, Au, A^2u, \dots \right\}.$$

Це суперечить умові обмеженості.

Лемі 3 доведено.

Лема 4. Нехай $T \in L(X)$, X_1, X_2 — такі підпростори в X , що $T(X_2)$ — підпростір, оператор T бієктивно відображає X_2 на $T(X_2)$, а також

$$X = X_1 \dot{+} T(X_2). \quad (6)$$

Тоді $X = T^{-1}(X_1) \dot{+} X_2$.

Доведення. Зафіксуємо $x \in X$. Із (1) випливає, що Tx єдиним чином зображується у вигляді $Tx = u + Tv$, де $u \in X_1$, $v \in X_2$. Оскільки $u = T(x - v)$, то $x = (x - v) + v$, де $(x - v) \in T^{-1}(X_1)$, $v \in X_2$.

Доведемо єдиність останнього зображення. Нехай $x = u_1 + v_1 = u_2 + v_2$, де $u_1, u_2 \in T^{-1}(X_1)$, $v_1, v_2 \in X_2$. Тоді $u_1 - u_2 = v_2 - v_1 \in T^{-1}(X_1) \cap X_2$, а отже, $T(v_1 - v_2) \in X_1 \cap T(X_2)$. Тому внаслідок (6) $T(v_1 - v_2) = \bar{0}$. Звідси, врахувавши, що T — бієкція між X_2 і $T(X_2)$, робимо висновок, що $v_1 = v_2$, а отже, і $u_1 = u_2$.

Лемі 4 доведено.

Лема 5. Нехай $T_1, T_2 \in L(X)$, U — лінійний многовид у X , оператор T_2T_1 бієктивно відображає U на $T_2T_1(U)$. Тоді оператори T_1 і T_2 бієктивно відображають U на $T_1(U)$ і $T_1(U)$ на $T_2T_1(U)$ відповідно.

Доведення леми 5 тривіальне і тут не наведено.

У подальшому в цьому пункті вважаємо, що підпростори $Q_-(A)$, $Q_+(B)$ нетривіальні. Позначимо через A_Q , B_Q звуження операторів A , B відповідно на $Q_-(A)$, $Q_+(B)$.

Лема 6. Якщо різницеве рівняння (1) задовольняє умову обмеженості, то

$$\sigma(A_Q) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}, \quad \sigma(B_Q) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}.$$

Доведення. Зафіксуємо $v \in Q_-(A)$. Оскільки обмеженій послідовності

$$\bar{v} = \left\{ \dots, \bar{0}, \bar{0}, \underbrace{v}_p, \bar{0}, \bar{0}, \dots \right\}$$

відповідає єдиний обмежений розв'язок

$$\mathcal{T}^{-1}\bar{v} = \left\{ \dots, \bar{0}, \bar{0}, \underbrace{v}_{p+1}, A_Q v, A_Q^2 v, \dots \right\}$$

різницевого рівняння (1), то для кожного $n \geq 0$

$$\|A_Q^n v\| \leq \|\mathcal{T}^{-1}\bar{v}\|_\infty \leq \|\mathcal{T}^{-1}\| \|v\|.$$

Тому за означенням норми оператора послідовність $\{\|A_Q^n\|, n \geq 0\}$ обмежена сталою $\|\mathcal{T}^{-1}\|$.

При фіксованих $m \in \mathbb{N}$, $w \in Q_-(A)$ обмеженій послідовності

$$\bar{w}_m = \left\{ \dots, \bar{0}, \bar{0}, \underbrace{w}_p, A_Q w, A_Q^2 w, \dots, A_Q^m w, \bar{0}, \bar{0}, \dots \right\}$$

відповідає єдиний обмежений розв'язок

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{-1}\bar{w} = \left\{ \dots, \bar{0}, \bar{0}, \underbrace{w}_{p+1}, 2A_Q w, 3A_Q^2 w, \dots, \right. \\ \left. (m+1)A_Q^m w, (m+1)A_Q^{m+1} w, (m+1)A_Q^{m+2} w, \dots \right\} \end{aligned}$$

різницевого рівняння (1). Тому

$$\|(m+1)A_Q^m w\| \leq \|\mathcal{T}^{-1} \bar{w}_m\|_\infty \leq \|\mathcal{T}^{-1}\|_{n \geq 0} \sup \|A_Q^n\| \|w\|,$$

а отже, послідовність $\{\|(m+1)A_Q^m\|, m \geq 0\}$ теж обмежена, тобто знайдеться така стала $C > 0$, що для кожного $m \geq 0$

$$(r(A_Q))^m = r(A_Q^m) \leq \|A_Q^m\| \leq \frac{C}{m+1}.$$

Звідси робимо висновок, що $r(A_Q) < 1$, а отже, $\sigma(A_Q) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

Перевіримо, що оператор B_Q неперервно оборотний. Зафіксуємо $v \in Q_+(B)$. З означення підпростору $Q_+(B)$ випливає, що рівняння $B_Q u = v$ має розв'язок $u = a(-1, v)$ в $Q_+(B)$. Якщо, від супротивного, цей розв'язок не єдиний, то знайдеться такий ненульовий елемент $w \in Q_+(B)$, що $B_Q w = \bar{0}$. Але тоді відповідне до (1) однорідне різницеве рівняння має окрім нульового обмежений розв'язок

$$\left\{ \dots, a(-2, w), a(-1, w), \underbrace{w}_0, \bar{0}, \bar{0}, \dots \right\}$$

Суперечність.

Отже, оператор B_Q^{-1} існує за теоремою Банаха про обернений оператор.

Зазначимо тепер, що при фіксованому $y \in Q_+(B)$ обмежений послідовності $y_0 = -y$, $y_n = \bar{0}$, $n \neq 0$, відповідає єдиний обмежений розв'язок

$$\left\{ \dots, B_Q^{-2} y, \underbrace{B_Q^{-1} y}_0, \bar{0}, \bar{0}, \dots \right\}.$$

різницєвого рівняння (1). Тому за допомогою таких же міркувань, як і для оператора A_Q , отримаємо оцінку $r(B_Q^{-1}) < 1$, з якої випливає, що $\sigma(B_Q) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$.

Лему 6 доведено.

Лема 7. Нехай $V \in L(X)$; простір X є прямою сумою своїх нетривіальних підпросторів X_1, X_2 ; P_1, P_2 — проектори в X , що відповідають зображенню $X = X_1 \dot{+} X_2$; підпростір X_1 інваріантний відносно оператора V . Тоді оператор $P_2 V P_2: X_2 \rightarrow X_2$ має такі властивості:

j1) $(P_2 V P_2)^n = P_2 V^n P_2$ для кожного $n \geq 1$;

j2) якщо V_1 — звуження оператора V на підпростір X_1 , то $\sigma(P_2 V P_2) \supset (\sigma(V) \setminus \sigma(V_1))$.

Зазначимо, що твердження j1) співпадає з твердженням 1 леми 3 із [11], а твердження j2) можна довести за допомогою тих же міркувань, що й твердження 4) тієї ж леми. Тому доведення леми 7 тут не наводимо.

Наступна лема є безпосереднім наслідком лем 1, 3–5.

Лема 8. Якщо різницеве рівняння (1) задовольняє умову обмеженості, то

$$\begin{aligned} X &= A_{pp}^{-1}(Q_-(A)) \dot{+} A_{1(p-1)}(Q_+(B)) \\ &= A_{(p-1)p}^{-1}(Q_-(A)) \dot{+} A_{1(p-2)}(Q_+(B)) \\ &= \dots = A_{2p}^{-1}(Q_-(A)) \dot{+} A_{11}(Q_+(B)) = A_{1p}^{-1}(Q_-(A)) \dot{+} Q_+(B). \end{aligned}$$

Лема 9. Якщо різницеве рівняння (1) задовольняє умову обмеженості і P_0^-, P_0^+ — проектори, що відповідають зображенню $X = A_{1p}^{-1}(Q_-(A)) \dot{+} Q_+(B)$, то для оператора $P_0^- B P_0^-: A_{1p}^{-1}(Q_-(A)) \rightarrow A_{1p}^{-1}(Q_-(A))$ виконується включення $\sigma(P_0^- B P_0^-) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

Доведення. Зафіксуємо $k \in \mathbb{N}$, $y \in A_{1p}^{-1}(Q_-(A))$. Нехай $\bar{x} = \{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — єдиний обмежений розв'язок рівняння (1), що відповідає послідовності $y_{-k} = y$; $y_n = \bar{0}$, $n \neq -k$. Тоді

$$x_1 = B^{k+1}x_{-k} + B^k y = B^{k+1}x_{-k} + P_0^+ B^k y + P_0^- B^k y,$$

а також x_{-k} , а отже, і $B^{k+1}x_{-k}$ належать $Q_+(B)$. Тому координати $\bar{x}$ мають вигляд

$$\begin{aligned} x_n &= -B_Q^{n-1} P_0^+ B^k y, \quad n \leq -k, \\ x_n &= -B_Q^{n-1} P_0^+ B^k y + B^{n+k-1} y, \quad -k+1 \leq n \leq 0, \\ x_1 &= P_0^- B^k y, \\ x_n &= A_{1(n-1)} P_0^- B^k y, \quad 2 \leq n \leq p+1, \\ x_n &= A^{n-p-1} A_{1p} P_0^- B^k y, \quad n \geq p+2. \end{aligned} \quad (7)$$

Зокрема, внаслідок твердження j1) і рівностей $y = P_0^- y$ і (7)

$$x_1 = P_0^- B^k P_0^- y = (P_0^- B P_0^-)^k y. \quad (8)$$

Тому, з урахуванням неперервної оборотності оператора $\mathcal{T}$,

$$\|(P_0^- B P_0^-)^k y\| \leq \|\mathcal{T}^{-1} \bar{y}_m\|_\infty \leq \|\mathcal{T}^{-1}\| \|y\|.$$

Таким чином, послідовність $\{\|(P_0^- B P_0^-)^k\|, k \geq 1\}$ обмежена.

Із (8) і лінійності різницевого рівняння (1) випливає, що при фіксованих $m \in \mathbb{N}$, $w \in A_{1p}^{-1}(Q_-(A))$ обмежених послідовності

$$\bar{w}_m = \left\{ \dots, \bar{0}, \bar{0}, \underbrace{w}_{-m}, P_0^- B P_0^- w, (P_0^- B P_0^-)^2 w, \dots, (P_0^- B P_0^-)^{m-1} w, \bar{0}, \bar{0}, \dots \right\}$$

відповідає єдиний обмежений розв'язок $\mathcal{T}^{-1} \bar{w}_m$ рівняння (1), координата $(\mathcal{T}^{-1} \bar{w}_m)_1$ якого зображується у вигляді

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}^{-1} \bar{w}_m)_1 &= P_0^- B^m P_0^- w + P_0^- B^{m-1} P_0^- (P_0^- B P_0^- w) \\ &\quad + \dots + P_0^- B P_0^- ((P_0^- B P_0^-)^{m-1} w) \\ &= m(P_0^- B P_0^-)^m w. \end{aligned}$$

Звідси, як і для оператора A_Q при доведенні леми 6, отримаємо, що $\sigma(P_0^- B P_0^-) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

Лему 9 доведено.

Лема 10. Якщо різницеве рівняння (1) задовольняє умову обмеженості і P_p^-, P_p^+ — проєктори, що відповідають зображенню $X = Q_-(A) \dot{+} A_{1p}(Q_+(B))$, то оператор $P_p^+ A P_p^+ : A_{1p}(Q_+(B)) \rightarrow A_{1p}(Q_+(B))$ неперервно оборотний, а також $\sigma(P_p^+ A P_p^+) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$.

Доведення. Зафіксуємо $y \in A_{1p}(Q_+(B))$. Нехай $\bar{x} = \{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — єдиний обмежений розв'язок рівняння (1), що відповідає послідовності $y_{p+1} = -y$; $y_n = \bar{0}$, $n \neq p+1$. Тоді $x_{p+1} = A_{1p}x_1$; $x_{n+1} = Bx_n$, $n \leq 0$. Тому $x_{p+1} \in A_{1p}(Q_+(B))$. Також $x_{p+k+2} = A^k x_{p+2}$, $k \geq 1$, а отже, $x_{p+2} \in Q_-(A)$. Оскільки

$$x_{p+2} = Ax_{p+1} - y = P_p^- Ax_{p+1} + P_p^+ AP_p^+ x_{p+1} - y$$

і $X = Q_-(A) \dot{+} A_{1p}(Q_+(B))$, то рівняння $P_p^+ AP_p^+ x = y$ має розв'язок $x = x_{p+1}$ у просторі $A_{1p}(Q_+(B))$.

Якщо, від супротивного, цей розв'язок не єдиний, то існує таке $u \in A_{1p}(Q_+(B))$, $u \neq \bar{0}$, що $P_p^+ AP_p^+ u = \bar{0}$. Але тоді безпосередньо перевіряємо, що відповідне до (1) однорідне різницеве рівняння має окрім нульового обмежений розв'язок

$$\left\{ \dots, B_Q^{-2} A_{1p}^{-1} u, B_Q^{-1} A_{1p}^{-1} u, \underbrace{A_{1p}^{-1} u}_1, A_{11} A_{1p}^{-1} u, A_{12} A_{1p}^{-1} u, \dots, \right. \\ \left. A_{1(p-1)} A_{1p}^{-1} u, u, P_p^- Au, AP_p^- Au, A^2 P_p^- Au, \dots \right\}.$$

Це суперечить умові обмеженості.

Таким чином, оператор $P_p^+ AP_p^+$ є неперервно оборотним за теоремою Банаха про обернений оператор.

Зафіксуємо тепер $m \in \mathbb{N}$, $y \in A_{1p}(Q_+(B))$ і розглянемо єдиний обмежений розв'язок $\bar{x} = \{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ рівняння (1), що відповідає обмеженій послідовності $y_{p+m} = -y$; $y_n = \bar{0}$, $n \neq p+m$. Як і раніше, перевіряємо, що $x_{p+1} \in A_{1p}(Q_+(B))$. Також $x_{p+m} = A^{m-1} x_{p+1}$,

$$x_{p+m+1} = Ax_{p+m} - y = P_p^- A^m x_{p+1} + P_p^+ A^m P_p^+ x_{p+1} - y, \quad (9)$$

причому $x_{p+m+1} \in Q_-(A)$, а отже, з (9) випливає, що $P_p^+ A^m P_p^+ x_{p+1} = y$. Тому, використовуючи твердження j1) і неперервну оборотність оператора $P_p^+ AP_p^+$, отримуємо, що $x_{p+1} = (P_p^+ AP_p^+)^{-m} y$. Звідси, як і для оператора A_Q при доведенні леми 6, одержуємо, що $r((P_p^+ AP_p^+)^{-1}) < 1$, тобто $\sigma(P_p^+ AP_p^+) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$.

Лему 10 доведено.

Лема 11. Нехай $\sigma(A) \cap S = \emptyset$, $\sigma(B) \cap S = \emptyset$. Тоді $Q_-(A) = X_-(A)$, $Q_+(B) = X_+(B)$.

Доведення. Якщо $X_-(A) = \{\bar{0}\}$, то $X_-(A) \subset Q_-(A)$. Нехай $X_-(A) \neq \{\bar{0}\}$. Тоді $r(A_-) < 1$. Тому для кожного $x \in X_-(A)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|A^n x\| = \sum_{n=0}^{\infty} \|A_-^n x\| < \infty,$$

а отже, $x \in Q_-(A)$.

Таким чином, справджується включення $X_-(A) \subset Q_-(A)$.

Якщо, від супротивного, існує елемент $u \in X_+(A) \cap Q_-(A)$, $u \neq \bar{0}$, то однорідне різницеве рівняння $x_{n+1} = Ax_n$, $n \in \mathbb{Z}$, має окрім нульового обмежений розв'язок

$$\left\{ \dots, A_+^{-2} u, A_+^{-1} u, \underbrace{u}_0, Au, A^2 u, \dots \right\}.$$

Це суперечить твердженню теореми 1 із [8, с. 9].

Отже, $Q_-(A) = X_-(A)$. Аналогічно перевіряємо, що $Q_+(B) = X_+(B)$.

Лему 11 доведено.

3. Доведення теореми 3. Необхідність. Унаслідок умови обмеженості, лем 6, 10 і твердження j2) справджуються включення

$$\sigma(A_Q) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\},$$

$$(\sigma(A) \setminus \sigma(A_Q)) \subset \sigma(P_p^+ A P_p^+) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\},$$

а тому, $\sigma(A) \cap S = \emptyset$.

Аналогічно, використовуючи лему 9 замість леми 10, отримуємо, що $\sigma(B) \cap S = \emptyset$. Таким чином, виконується умова i1).

Також внаслідок леми 11 $Q_-(A) = X_-(A)$, $Q_+(B) = X_+(B)$. Тому з лем 1, 3 випливає, що умови i2), i3) теж виконуються.

Достатність. Зафіксуємо обмежену послідовність $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ і визначимо послідовність $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ таким чином.

Із умов i2), i3) і лем 4, 5 випливає, що для кожного $0 \leq k \leq p$

$$X = A_{(k+1)p}^{-1} (X_-(A)) + A_{1k} (X_+(B)), \quad (10)$$

де $A_{(p+1)p} = A_{10} = I$. Позначимо через P_k^- , P_k^+ проєктори, що відповідають зображенню (10), $0 \leq k \leq p$. Внаслідок умови i2) для кожного $0 \leq k \leq p$ звуження $A_{1k} : X_+(B) \rightarrow A_{1k}(X_+(B))$ оператора A_{1k} на $X_+(B)$, яке далі позначатимемо $\tilde{A}_{1k}$, є неперервно оборотним оператором. Тому коректно визначено елемент

$$u_0 = \sum_{k=0}^p \tilde{A}_{1k}^{-1} P_k^+ y_k + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_{1p}^{-1} P_p^+ A_+^{-k} P_+(A) y_{p+k} + \sum_{k=-\infty}^{-1} P_0^+ B_-^{-k} P_-(B) y_k. \quad (11)$$

Абсолютна збіжність за нормою рядів з (11) випливає з нерівностей $r(A_+^{-1}) < 1$, $r(B_-) < 1$. Покладемо

$$x_0 = -B_+^{-1} u_0 + \sum_{k=-\infty}^{-1} B_-^{-k-1} P_-(B) y_k, \quad (12)$$

а також при $m \leq -1$

$$x_m = -B_+^{m-1} u_0 - \sum_{k=m}^{-1} B_+^{-k+m-1} P_+(B) y_k + \sum_{k=-\infty}^{m-1} B_-^{-k+m-1} P_-(B) y_k.$$

Далі, з урахуванням рівностей $A_{10} = P_0^- + P_0^+ = I$ і (12), покладемо

$$x_1 = P_0^- y_0 - \sum_{k=1}^p \tilde{A}_{1k}^{-1} P_k^+ y_k + u_1,$$

де

$$u_1 = - \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_{1p}^{-1} P_p^+ A_+^{-k} P_+(A) y_{p+k} + \sum_{k=-\infty}^{-1} P_0^- B_-^{-k} P_-(B) y_k.$$

Потім при $2 \leq m \leq p$

$$x_m = \sum_{k=0}^{m-2} A_{(k+1)(m-1)} P_k^- y_k + P_{m-1}^- y_{m-1} + A_{1(m-1)} \left(- \sum_{k=m}^p \tilde{A}_{1k}^{-1} P_k^+ y_k + u_1 \right). \quad (13)$$

Також, скориставшись рівностями $A_{(p+1)p} = P_p^- + P_p^+ = I$ і (13) при $m = p$, покладемо

$$x_{p+1} = u_p - \sum_{k=1}^{\infty} A_+^{-k} P_+(A) y_{p+k},$$

де

$$u_p = \sum_{k=0}^p A_{(k+1)p} P_k^- y_k + \sum_{k=1}^{\infty} P_p^- A_+^{-k} P_+(A) y_{p+k} + \sum_{k=-\infty}^{-1} A_{1p} P_0^- B_-^{-k} P_-(B) y_k.$$

Зазначимо, що згідно з (10) P_k^- є проєктором на підпростір $A_{(k+1)p}^{-1}(X_-(A))$, $0 \leq k \leq p$, а тому $u_p \in X_-(A)$. Таким чином, при $m \geq 2$ коректно визначено елементи

$$x_{p+m} = A_-^{m-1} u_p + \sum_{k=1}^{m-1} A_-^{m-1-k} P_-(A) y_{p+k} - \sum_{k=m}^{\infty} A_+^{m-1-k} P_+(A) y_{p+k}. \quad (14)$$

Безпосередньо перевіряємо, що визначені за допомогою формул (11)–(14) елементи послідовності $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ задовольняють рівність (11). Її обмеженість випливає з того, що спектральні радіуси операторів A_- , B_- , A_+^{-1} , B_+^{-1} менші за одиницю, а отже, існують такі числа $M > 0$, $\delta \in (0; 1)$, що для кожного $k \geq 1$:

$$\max\{\|A_-^k\|, \|B_-^k\|, \|A_+^{-k}\|, \|B_+^{-k}\|\} \leq M\delta^k.$$

Таким чином, визначена формулами (11)–(14) послідовність $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ є обмеженим розв'язком різницевого рівняння (1), відповідним до послідовності $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$. Для доведення його єдиності перевіримо, що відповідне до (1) однорідне різницеве рівняння має тільки нульовий обмежений розв'язок. Справді, нехай $\{u_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — обмежений розв'язок відповідного до (1) однорідного різницевого рівняння. Оскільки для кожного $k \geq 1$ $u_{p+k} = A_-^{k-1} u_{p+1}$, $u_1 = B_-^k u_{1-k}$, то внаслідок леми 11 $u_{p+1} \in X_-(A)$, $u_1 \in X_+(B)$. Також $u_{p+1} = \tilde{A}_{1p} u_1$, а отже, $u_{p+1} \in X_-(A) \cap A_{1p}(X_+(B))$. Тому за умовою і3) $u_{p+1} = \bar{0}$. Звідси випливає, що $u_{p+k} = \bar{0}$, $k \geq 2$, а також, оскільки оператори $\tilde{A}_{1k}$, $1 \leq k \leq p$, B_+ неперервно оборотні, $u_k = \bar{0}$, $k \leq 0$.

Теорему 3 доведено.

Роботу виконано за фінансової підтримки Міністерства освіти і науки України: грант Міністерства освіти і науки України для перспективних розробок з наукового напрямку “Математичні науки та природничі науки” в Київському національному університеті ім. Т. Шевченка.

Література

1. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, Москва (1970).

2. М. Ф. Городній, *Обмежені та сумовні розв'язки одного різницевого рівняння з кусково сталими операторними коефіцієнтами*, Укр. мат. журн., **74**, № 7, 1564–1575 (2022).
3. В. Ю. Слюсарчук, *Експоненціально дихотомічні різниці рівняння з кусково-сталими операторними коефіцієнтами*, Укр. мат. журн., **72**, № 6, 822–841 (2020).
4. A. Chaikovs'kyi, O. Lagoda, *Bounded solutions of a difference equation with finite number of jumps of operator coefficient*, Carpathian Math. Publ., **12**, № 1, 165–172 (2020).
5. В. Ю. Слюсарчук, *Об экспоненциальной дихотомии решений дискретных систем*, Укр. мат. журн., **35**, № 1, 109–115 (1983).
6. Д. Хенри, *Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений*, Мир, Москва (1985).
7. А. Г. Баскаков, А. И. Пастухов, *Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами*, Сиб. мат. журн., **42**, № 6, 930–938 (2001).
8. А. Я. Дороговцев, *Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем*, Вища шк., Киев (1992).
9. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems*, VSP, Utrecht (2004).
10. А. Г. Баскаков, *Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений*, Успехи мат. наук., **68**, вып. 1(409), 77–128 (2013).
11. М. Ф. Городній, О. А. Печериця, *Обмежені розв'язки диференціального рівняння з кусково-сталими операторними коефіцієнтами*, Нелін. коливання, **24**, № 2, 147–157 (2021).

Одержано 06.01.23