

РАЦІОНАЛЬНА ФАКТОРИЗАЦІЯ ГАМІЛЬТОНОВИХ ПОТОКІВ НА СПРЯЖЕНОМУ ПРОСТОРІ ДО АЛГЕБРИ ЛІ ДРОБОВИХ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ ТА ІНТЕГРОВНІ ГІДРОДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ ТИПУ БЕННІ

Оксана Гентош

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
імені Я. С. Підстригача НАН України
вул. Наукова, 3-Б, Львів, 79060, Україна
email: ohen@ukr.net*

Анатолій Прикарпатський

*Краківський університет технологій
вул. Варшавська, 24, Краків, 31155, Польща
Національний університет “Львівська Політехніка”
вул. Степана Бандери, 12, Львів, 79013, Україна
email: pryk.anat@cybergal.com*

For the Lax-type Hamiltonian flows on the dual space to the Lie algebra of fractional integro-differential operators, we develop the rational factorization method which allows one to obtain new integrable hierarchies of nonlinear fractional-differential dynamical systems on the Lie algebra of ordinary integro-differential operators and infinite sequences of their conservation laws. By using the Backlund transformation, we show that the system of two such flows for a pair of fractional integro-differential operators related by a gauge transformation is equivalent to a system of two evolutionary equations for the fractional differential operators which determine the corresponding rational factorization and find the Hamiltonian representation for this system of evolutionary equations. We establish that its quasiclassical approximation is a system of two evolutionary equations for polynomials of fractional degree of some complex parameter.

The method is used for the construction of a new integrable hierarchy of nonlinear fractional-differential systems on the Lie algebra of ordinary integro-differential operators and an infinite sequence of its conservation laws as well as a new integrable hierarchy of hydrodynamic Benney-type systems, which is its quasiclassical approximation.

Для гамільтонових потоків типу Лакса на спряженому просторі до алгебри Лі дробових інтегро-диференціальних операторів розвинено метод раціональної факторизації, який дозволяє отримувати нові інтегровні ієрархії нелінійних дробово-диференціальних динамічних систем на алгебрі Лі звичайних інтегро-диференціальних операторів і нескінченні послідовності їхніх законів збереження. За допомогою перетворення Беклунда показано, що система двох таких потоків для пари дробових інтегро-диференціальних операторів, пов'язаних перетворенням подібності, еквівалентна системі двох еволюційних рівнянь для дробових диференціальних операторів, що задають відповідну раціональну факторизацію, знайдено гамільтонове зображення для цієї системи еволюційних рівнянь.

Встановлено, що її квазікласичним наближенням є система двох еволюційних рівнянь для дробових символів у вигляді поліномів за дробовим степенем деякого комплексного параметра.

Метод використано для побудови нової інтегровної ієрархії нелінійних дробово-диференціальних систем на алгебрі Лі звичайних інтегро-диференціальних операторів та нескінченної послідовності її законів збереження, а також нової інтегровної ієрархії гідродинамічних систем типу Бенні як її квазікласичного наближення.

1. Вступ. Нелінійні динамічні системи, що містять дробові похідні за просторовою змінною, широко застосовуються для математичного моделювання руху хвиль у середовищах із самоподібною неоднорідністю, фізичних процесів із пам'яттю та ін. [1, 2]. Дослідження інтегровності таких систем є достатньо складним завданням, яке в окремих випадках може бути вирішене за допомогою Лі-алгебраїчних підходів. У статті [3] введено алгебру Лі дробових інтегро-диференціальних операторів із інваріантним стосовно комутатора скалярним добутком і розвинено Лі-алгебраїчний метод побудови інтегровних ієрархій нелінійних дробово-диференціальних динамічних систем на алгебрі Лі інтегро-диференціальних операторів, що мають нескінченні послідовності законів збереження, з використанням цієї нової алгебри Лі. Згідно з запропонованим методом системи такого типу виникають у результаті редукування гамільтонових потоків типу Лакса, породжених $\mathcal{R}$ -деформованою дужкою Лі – Пуассона [3 – 9] і інваріантами Казимира на спряженому просторі до алгебри Лі дробових інтегро-диференціальних операторів, на орбіті коприєднаної дії відповідної групи Лі.

Показано, що квазікласичними наближеннями [7, 10, 11] побудованих систем є інтегровні гідродинамічні системи типу Бенні [7, 10, 12 – 14] з нескінченними послідовностями законів збереження.

Нові інтегровні ієрархії нелінійних дробово-диференціальних систем, заданих на алгебрі Лі інтегро-диференціальних операторів, і пов'язані з ними квазікласичним наближенням нові ієрархії гідродинамічних систем типу Бенні можна отримати за допомогою раціональної факторизації гамільтонових потоків типу Лакса на спряженому просторі до алгебри Лі дробових інтегро-диференціальних операторів.

Метод раціональної факторизації для опису нових класів інтегровних нелінійних динамічних систем на функціональних многовидах раніше розглядався у роботах Л. Дікого, І. Кричевера, Д. Блекмора й А. Прикарпатського, М. Вовк, О. Гентош та ін. Такі системи отримувалися в результаті редукування на коприєднані орбіти груп Лі, асоційованих із алгеброю Лі звичайних інтегро-диференціальних операторів [15 – 17] і її центральним розширенням [18], алгеброю Лі формальних рядів Лорана за оператором зсуву неперервної незалежної змінної та її центральним розширенням [19], систем еволюційних рівнянь для двох операторів, які раціонально факторизують елементи відповідного спряженого простору, з урахуванням породженого раціональною факторизацією перетворення Беклунда [7, 17]. Гамільтонова структура систем такого типу, що виникають у результаті раціональної факторизації потоків Лакса на спряженому просторі до алгебри Лі звичайних інтегро-диференціальних операторів, за допомогою різних Лі-алгебраїчних підходів вивчалась у роботах [17, 20].

У цій статті метод раціональної факторизації буде розвинено для гамільтонових потоків типу Лакса на спряженому просторі до введеної у [3] алгебри Лі дробових інтегро-диференціальних операторів, наділеної інваріантним стосовно комутатора скалярним добутком. Цей метод дозволить конструювати нові інтегровні ієрархії нелінійних динаміч-

них систем, що містять дробові похідні за просторовою змінною, на алгебрі Лі звичайних інтегро-диференціальних операторів, які при квазікласичному наближенні задають нові інтегровні ієрархії гідродинамічних систем типу Бенні з нескінченними послідовностями законів збереження.

У п. 2 наведено деякі властивості дробової похідної Рімана – Ліувілля та алгебри дробових інтегро-диференціальних операторів, необхідні для розуміння змісту статті, доведено два твердження про властивості цієї алгебри, які були сформульовані без доведень у роботі [3], та описано загальну схему конструювання гамільтонових потоків типу Лакса на її спряженому просторі. Пункт 3 містить теоретичне обґрунтування методу раціональної факторизації для алгебри Лі дробових інтегро-диференціальних операторів, який дозволяє отримувати нові ієрархії інтегровних нелінійних дробово-диференціальних систем, заданих на алгебрі Лі звичайних інтегро-диференціальних операторів. Доведено еквівалентність системи двох гамільтонових потоків типу Лакса на спряженому просторі до алгебри Лі дробових інтегро-диференціальних операторів і системи двох еволюційних рівнянь для дробових диференціальних операторів, що задають раціональну факторизацію відповідних дробових інтегро-диференціальних операторів, пов'язаних перетворенням подібності, досліджено гамільтонову структуру згаданої системи двох еволюційних рівнянь. У п. 4 розглянуто квазікласичне наближення цієї системи, з використанням розвиненого методу побудовано нову інтегровну ієрархію нелінійних дробово-диференціальних систем на алгебрі Лі звичайних інтегро-диференціальних операторів і нескінченну послідовність її законів збереження, а також нову інтегровну ієрархію гідродинамічних систем типу Бенні як її квазікласичне наближення.

2. Загальна Лі-алгебраїчна схема. Розглянемо алгебру $\mathbb{A}_\alpha := \mathbb{A}_0\{\{D^\alpha, D^{-\alpha}\}\}$ [3], яку утворюють дробові інтегро-диференціальні оператори у вигляді

$$a_\alpha := \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} a_j D^{\alpha(p_\alpha - j)} \in \mathbb{A}_\alpha,$$

де $a_j \in \mathbb{A}_0$, $j \in \mathbb{Z}_+$, $p_\alpha \in \mathbb{Z}_+$ — порядок дробового інтегро-диференціального оператора, $\mathbb{A}_0 := A\{\{D, D^{-1}\}\}$ — алгебра Лі інтегро-диференціальних операторів, елементами якої є формальні ряди Лорана за оператором звичайної просторової похідної $D: A \rightarrow A$ з коефіцієнтами, що належать алгебрі функцій $A := W_2^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \cap W_\infty^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, $D^\alpha: A \rightarrow A$ — оператор дробової похідної Рімана – Ліувілля, $\alpha \in \mathbb{C}^\# := \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \mid \operatorname{Re} z \neq 0\}$, який діє за правилом

$$D^\alpha a(x) := \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{a(y) dy}{(x-y)^{\alpha+1}},$$

якщо $\operatorname{Re} \alpha < 0$, і

$$D^\alpha a(x) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_{-\infty}^x \frac{a(y) dy}{(x-y)^{\alpha-n+1}},$$

якщо $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $[\operatorname{Re} \alpha] + 1 = n \in \mathbb{Z}_+$, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функція Ейлера. Дробова похідна має властивість напівгрупи [21], тобто

$$D^\alpha (D^\beta a) = D^{\alpha+\beta} a \quad (1)$$

для будь-якого $a \in A$, а також для неї виконується узагальнене правило Лейбніца [11, 21–23]

$$D^\alpha(a \cdot b) := \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \binom{\alpha}{k} (D^k a) \cdot (D^{\alpha-k} b), \quad (2)$$

де $a, b \in A$ та $\binom{\alpha}{k} := \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)}$ для будь-якого $k \in \mathbb{Z}_+$.

Спряжений до дробової похідної Рімана–Ліувілля D^α оператор $(D^\alpha)^*$ стосовно скалярного добутку на алгебрі функцій A

$$(a, b) = \int_{\mathbb{R}} a(x)b(x) dx, \quad a, b \in A,$$

задовольняє рівність

$$((D^\alpha)^*, b) = (a, D^\alpha b),$$

для будь-яких $a, b \in A$ і має вигляд

$$(D^\alpha)^* a(x) := \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{da^{(n-1)}(y)}{(y-x)^{\alpha-n+1}},$$

для будь-якої функції $f \in A$ і $n = [\operatorname{Re} \alpha] + 1 \in \mathbb{Z}_+$.

У статті [3] сформульовано без доведень два твердження про властивості алгебри $\mathbb{A}_\alpha$.

Твердження 1 [3]. Алгебра $\mathbb{A}_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}^\#$, є асоціативною та некомутативною стосовно білінійної операції множення $\circ: \mathbb{A}_\alpha \times \mathbb{A}_\alpha \rightarrow \mathbb{A}_\alpha$, яка згідно з формулою (2) діє за правилом

$$D^\alpha \circ a_\alpha := \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \binom{\alpha}{k} (D^k a_\alpha) \circ D^{\alpha-k},$$

тобто виконується рівність

$$(a_\alpha \circ b_\alpha) \circ c_\alpha = a_\alpha \circ (b_\alpha \circ c_\alpha) \quad (3)$$

для будь-яких a_α, b_α і $c_\alpha \in \mathbb{A}_\alpha$.

Доведення. Для довільних елементів a_α, b_α і $c_\alpha \in \mathbb{A}_\alpha$ у вигляді

$$a_\alpha := \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} a_{\alpha,j} D^{\alpha(p_\alpha-j)}, \quad p_\alpha \in \mathbb{Z}_+,$$

$$b_\alpha := \sum_{i \in \mathbb{Z}_+} b_{\alpha,i} D^{\alpha(n_\alpha-i)}, \quad n_\alpha \in \mathbb{Z}_+,$$

$$c_\alpha := \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} c_{\alpha,k} D^{\alpha(r_\alpha-k)}, \quad r_\alpha \in \mathbb{Z}_+,$$

з урахуванням співвідношення

$$D^{\alpha i} q D^{-\alpha i} = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \binom{\alpha i}{k} (D^k q) D^{-k} = (P_{(\alpha i)} q), \quad (4)$$

де $q \in \mathbb{A}_0$ і $i \in \mathbb{Z}$, та властивості (1) знаходимо

$$\begin{aligned} (a_\alpha \circ b_\alpha) \circ c_\alpha &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \left(\sum_{j, i \in \mathbb{Z}_+} a_{\alpha, j} D^{\alpha(p_\alpha - j)} b_{\alpha, i} D^{\alpha(n_\alpha - i)} \right) c_{\alpha, k} D^{\alpha(r_\alpha - k)} \\ &= \sum_{j, i, k \in \mathbb{Z}_+} \left(a_{\alpha, j} D^{\alpha(p_\alpha - j)} D^{\alpha(n_\alpha - i)} (P_{\alpha(-n_\alpha + i)} b_{\alpha, i}) \right) c_{\alpha, k} D^{\alpha(r_\alpha - k)} \\ &= \sum_{j, i, k \in \mathbb{Z}_+} a_{\alpha, j} D^{\alpha((p_\alpha - j) + (n_\alpha - i))} (P_{\alpha(-n_\alpha + i)} b_{\alpha, i}) c_{\alpha, k} D^{\alpha(r_\alpha - k)} \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} a_\alpha \circ (b_\alpha \circ c_\alpha) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} a_{\alpha, j} D^{\alpha(p_\alpha - j)} \left(\sum_{i, k \in \mathbb{Z}_+} b_{\alpha, i} D^{\alpha(n_\alpha - i)} c_{\alpha, k} D^{\alpha(r_\alpha - k)} \right) \\ &= \sum_{j, i, k \in \mathbb{Z}_+} a_{\alpha, j} D^{\alpha(p_\alpha - j)} \left(D^{\alpha(n_\alpha - i)} (P_{\alpha(-n_\alpha + i)} b_{\alpha, i}) c_{\alpha, k} D^{\alpha(r_\alpha - k)} \right) \\ &= \sum_{j, i, k \in \mathbb{Z}_+} a_{\alpha, j} D^{\alpha((p_\alpha - j) + (n_\alpha - i))} (P_{\alpha(-n_\alpha + i)} b_{\alpha, i}) c_{\alpha, k} D^{\alpha(r_\alpha - k)}. \end{aligned}$$

Тобто виконується рівність (3).

Твердження 1 доведено.

Асоціативність алгебри $\mathbb{A}_\alpha$ дозволяє ввести на ній звичайний комутатор

$$ad_{a_\alpha} b_\alpha := [a_\alpha, b_\alpha] = a_\alpha \circ b_\alpha - b_\alpha \circ a_\alpha, \quad (5)$$

для будь-яких $a_\alpha, b_\alpha \in \mathbb{A}_\alpha$, тобто кососиметричну білінійну форму, яка задовольняє тотожність Якобі

$$[[a_\alpha, b_\alpha], c_\alpha] + [[c_\alpha, a_\alpha], b_\alpha] + [[b_\alpha, c_\alpha], a_\alpha] = 0$$

для будь-яких $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha \in \mathbb{A}_\alpha$. Комутатор (5) перетворює алгебру $\mathbb{A}_\alpha$ на алгебру Лі.

Розглянемо на $\mathbb{A}_\alpha$ функціонал сліду типу Адлера [3–9, 24] у вигляді

$$\text{Tr } a_\alpha := \int_{\mathbb{R}} \text{res}_D \left(\text{res}_{D^\alpha} (a_\alpha \circ D^{-\alpha}) \right) dx, \quad (6)$$

де res_{D^α} позначає коефіцієнт при $D^{-\alpha}$ у розвиненні дробового інтегро-диференціального оператора, res_D — коефіцієнт при D^{-1} у розвиненні звичайного інтегро-диференціального оператора.

Твердження 2 [3]. Для будь-яких елементів a_α і $b_\alpha \in \mathbb{A}_\alpha$ функціонал сліду (6) задовольняє таке співвідношення:

$$\text{Tr } [a_\alpha, b_\alpha] = 0. \quad (7)$$

Доведення. Для довільних елементів a_α і $b_\alpha \in \mathbb{A}_\alpha$ у вигляді

$$a_\alpha := \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} a_{\alpha,j} D^{\alpha(p_\alpha - j)}, \quad p_\alpha \in \mathbb{Z}_+,$$

$$b_\alpha := \sum_{i \in \mathbb{Z}_+} b_{\alpha,i} D^{\alpha(n_\alpha - i)}, \quad n_\alpha \in \mathbb{Z}_+,$$

з урахуванням співвідношення (4) отримуємо

$$\begin{aligned} \text{Tr}(a_\alpha \circ b_\alpha) &= \int_{\mathbb{R}} \text{res}_D \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \left(a_{\alpha,j} D^{\alpha(p_\alpha - j)} b_{\alpha,-j} D^{\alpha(-p_\alpha + j)} \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \text{res}_D \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \left(a_{\alpha,j} (P_{(\alpha(p_\alpha - j))}) b_{\alpha,-j} \right) \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} \text{Tr}(b_\alpha \circ a_\alpha) &= \int_{\mathbb{R}} \text{res}_D \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \left(b_{\alpha,-j} D^{\alpha(-p_\alpha + j)} a_{\alpha,j} D^{\alpha(p_\alpha - j)} \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \text{res}_D \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \left(D^{\alpha(-p_\alpha + j)} (P_{(\alpha(p_\alpha - j))}) b_{\alpha,-j} a_{\alpha,j} D^{\alpha(p_\alpha - j)} \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \text{res}_D \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \left(P_{(\alpha(-p_\alpha + j))} (P_{(\alpha(p_\alpha - j))}) b_{\alpha,-j} a_{\alpha,j} \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \text{res}_D \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \left((P_{(\alpha(p_\alpha - j))}) b_{\alpha,-j} a_{\alpha,j} \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \text{res}_D \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \left(a_{\alpha,j} (P_{(\alpha(p_\alpha - j))}) b_{\alpha,-j} \right). \end{aligned}$$

Тобто виконується рівність

$$\text{Tr}(b_\alpha \circ a_\alpha) = \text{Tr}(a_\alpha \circ b_\alpha),$$

що й доводить твердження.

За допомогою функціонала сліду (6) задамо на алгебрі Лі $\mathbb{A}_\alpha$ скалярний добуток у вигляді

$$(a_\alpha, b_\alpha) := \text{Tr}(a_\alpha \circ b_\alpha). \quad (8)$$

Асоціативність алгебри Лі $\mathbb{A}_\alpha$ забезпечує інваріантність скалярного добутку (8) стосовно комутатора (5), тобто має місце співвідношення

$$(a_\alpha, [b_\alpha, c_\alpha]) = ([a_\alpha, b_\alpha], c_\alpha).$$

Алгебра Лі $\mathbb{A}_\alpha$ розщеплюється на пряму суму двох її підалгебр Лі $\mathbb{A}_{\alpha,+}, \mathbb{A}_{\alpha,-} \subset \mathbb{A}_\alpha$:

$$\mathbb{A}_\alpha = \mathbb{A}_{\alpha,+} \oplus \mathbb{A}_{\alpha,-},$$

де

$$\mathbb{A}_{\alpha,+} := \bigcup_{p_{\alpha} \in \mathbb{Z}_+} \left\{ a_{\alpha} \in \mathcal{L}_{\alpha} : a_{\alpha} := \sum_{j=0, p_{\alpha}} \hat{a}_{\alpha,j} D^{\alpha(p_{\alpha}-j)}, p_{\alpha} \in \mathbb{Z}_+ \right\},$$

$$\mathbb{A}_{\alpha,-} := \left\{ a_{\alpha} \in \mathcal{L}_{\alpha} : a_{\alpha} = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \hat{a}_{\alpha,j} D^{-\alpha j} \right\},$$

що дозволяє ввести на ній ще один комутатор

$$[a_{\alpha}, b_{\alpha}]_{\mathcal{R}} = [\mathcal{R}a_{\alpha}, b_{\alpha}] + [a_{\alpha}, \mathcal{R}b_{\alpha}], \quad (9)$$

$$\mathcal{R} = (P_+ - P_-)/2.$$

Тут оператори P_+ і P_- позначають проєктори на підалгебри Лі $\mathbb{A}_{\alpha,+}$ і $\mathbb{A}_{\alpha,-}$ відповідно, тобто

$$P_{\pm} \mathbb{A}_{\alpha} = \mathbb{A}_{\alpha,\pm}, \quad P_{\pm} \mathbb{A}_{\alpha,\mp} = 0,$$

а оператор $\mathcal{R} : \mathbb{A}_{\alpha} \rightarrow \mathbb{A}_{\alpha}$ задовольняє модифіковане рівняння Янга – Бакстера [4–8]

$$\mathcal{R}[a_{\alpha}, b_{\alpha}]_{\mathcal{R}} - [\mathcal{R}a_{\alpha}, \mathcal{R}b_{\alpha}] = [a_{\alpha}, b_{\alpha}]/4$$

для будь-яких $a_{\alpha}, b_{\alpha} \in \mathbb{A}_{\alpha}$. За допомогою скалярного добутку (8) можна ототожнити простори

$$\mathbb{A}_{\alpha}^* \simeq \mathbb{A}_{\alpha}, \quad \mathbb{A}_{\alpha,+}^* \simeq \mathbb{A}_{\alpha,-} \circ D^{\alpha}, \quad \mathbb{A}_{\alpha,-}^* \simeq \mathbb{A}_{\alpha,+} \circ D^{\alpha}.$$

На спряженому просторі $\mathbb{A}_{\alpha}^*$ до алгебри Лі $\mathbb{A}_{\alpha}$ стосовно скалярного добутку (8) комутатор (9) породжує у довільній точці $l_{\alpha} \in \mathbb{A}_{\alpha}^*$, що має вигляд:

$$l_{\alpha} := \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} l_j D^{\alpha(m_{\alpha}-j)},$$

де $l_j \in \mathbb{A}_0$, $j \in \mathbb{Z}_+$, $m_{\alpha} \in \mathbb{Z}_+$, $\mathcal{R}$ -деформовану дужку Лі – Пуассона [3–9]

$$\{\gamma, \mu\}_{\mathcal{R}}(l_{\alpha}) = (l_{\alpha}, [\nabla \gamma(l_{\alpha}), \nabla \mu(l_{\alpha})]_{\mathcal{R}}) := (\nabla \gamma(l_{\alpha}), \Theta \nabla \mu(l_{\alpha})), \quad (10)$$

де $\gamma, \mu \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_{\alpha}^*)$ — гладкі за Фреше функціонали на $\mathbb{A}_{\alpha}^* \simeq \mathbb{A}_{\alpha}$, $\Theta : T^*(\mathbb{A}_{\alpha}^*) \rightarrow T(\mathbb{A}_{\alpha}^*)$ — оператор Пуассона, який породжує дужку Лі – Пуассона (10) і діє за правилом

$$\Theta : \nabla \gamma(l_{\alpha}) \mapsto [l_{\alpha}, (\nabla \gamma(l_{\alpha}))_+] - [l_{\alpha}, \nabla \gamma(l_{\alpha})]_{>0}$$

або

$$\Theta : \nabla \gamma(l_{\alpha}) \mapsto -[l_{\alpha}, (\nabla \gamma(l_{\alpha}))_-] + [l_{\alpha}, \nabla \gamma(l_{\alpha})]_{\leq 0}$$

для будь-якого гладкого за Фреше $\gamma \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_{\alpha}^*)$, символ “ ∇ ” позначає градієнт функціонала стосовно скалярного добутку (8),

$$\delta \gamma(l_{\alpha}) = (\delta l_{\alpha}, \nabla \gamma(l_{\alpha})),$$

нижні індекси “ $\pm$ ” позначають проєкції дробового інтегро-диференціального оператора на підалгебри Лі $\mathbb{A}_{\alpha,\pm} \subset \mathbb{A}_\alpha$ відповідно, нижній індекс “ > 0 ” — проєкцію на підалгебру Лі $\mathbb{A}_{\alpha,>0} \subset \mathbb{A}_\alpha$, $\mathbb{A}_{\alpha,>0} \simeq \mathbb{A}_{\alpha,+} \circ D^\alpha$, нижній індекс “ ≤ 0 ” — проєкцію на підалгебру Лі $\mathbb{A}_{\alpha,\leq 0} \subset \mathbb{A}_\alpha$, $\mathbb{A}_{\alpha,\leq 0} \simeq \mathbb{A}_{\alpha,-} \circ D^\alpha$, $T(\mathbb{A}_\alpha)$ і $T^*(\mathbb{A}_\alpha^*)$ — дотичний і кодотичний простори до $\mathbb{A}_\alpha^*$ відповідно.

Будь-який функціонал Казимира $\gamma \in \mathcal{I}(\mathbb{A}_\alpha^*)$ як інваріант копрієднаної дії абстрактної групи Лі $G_\alpha := \exp \mathbb{A}_\alpha \simeq I + \mathbb{A}_\alpha$ ($I \in G_\alpha$ — одиничний оператор), асоційованої з алгеброю Лі $\mathbb{A}_\alpha$, у точці $l_\alpha \in \mathbb{A}_\alpha^*$ задовольняє співвідношення

$$ad_{\nabla\gamma(l_\alpha)}^* l_\alpha = 0,$$

де оператор ad^* позначає копрієднану дію алгебри Лі $\mathbb{A}_\alpha$ на її спряженому просторі, тобто

$$(ad_{a_\alpha}^* l_\alpha, b_\alpha) = -(l_\alpha, ad_{a_\alpha} b_\alpha),$$

еквівалентне рівності

$$[l_\alpha, \nabla\gamma(l_\alpha)] = 0.$$

Зокрема, інваріанти Казимира $\gamma_n \in \mathcal{I}(\mathbb{A}_\alpha^*)$, $n \in \mathbb{N}$, можуть бути вибрані у вигляді

$$\gamma_n(l_\alpha) = \frac{m_\alpha}{n + m_\alpha} \int_{\mathbb{R}} \text{res}_D \left(\text{res}_{D^\alpha} l_\alpha^{(n+m_\alpha)/m_\alpha} \circ D^{-\alpha} \right) dx. \quad (11)$$

Ці функціонали і дужка Лі–Пуассона (10) задають на $\mathbb{A}_\alpha^*$ ієрархію гамільтонових потоків типу Лакса у вигляді

$$dl_\alpha/dt_n = \{l_\alpha, \gamma_n(l_\alpha)\}_{\mathcal{R}}$$

або

$$dl_\alpha/dt_n = [(\nabla\gamma_n(l_\alpha))_+, l_\alpha], \quad (12)$$

де $t_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, — еволюційні параметри, а градієнти інваріантів Казимира у вигляді (11) записуються так:

$$\nabla\gamma_n(l_\alpha) = l_\alpha^{n/m_\alpha}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Еволюційні потоки (12) комутують один із одним, що є наслідком інволютивності інваріантів Казимира (11) стосовно $\mathcal{R}$ -деформованої дужки Лі–Пуассона (10) (див., наприклад, [8]).

3. Раціонально-факторизовані потоки типу Лакса та їхня гамільтонова структура. Надалі будемо вважати, що оператор $l_\alpha \in \mathbb{A}_\alpha^*$ можна раціонально факторизувати, тобто записати у вигляді

$$l_\alpha = A_\alpha B_\alpha^{-1}, \quad (13)$$

де $A_\alpha, B_\alpha \in \mathbb{A}_{\alpha,+}$ — деякі дробові диференціальні оператори порядків r_α і $s_\alpha \in \mathbb{N}$ відповідно, $r_\alpha \geq s_\alpha$, а B_α^{-1} позначає оператор, обернений до B_α .

Щоб отримати еволюційні рівняння для операторів A_α і B_α , використаємо Лі-алгебраїчний підхід, запропонований у роботі [17] для раціональної факторизації гамільтонових потоків типу Лакса на спряженому просторі до алгебри Лі інтегро-диференціальних операторів.

З цією метою розглянемо ще одну ієрархію гамільтонових потоків типу Лакса на спряженому просторі $\mathbb{A}_\alpha^*$:

$$d\tilde{l}_\alpha/dt_n = [(\nabla\gamma_n(\tilde{l}_\alpha))_+, \tilde{l}_\alpha] \quad (14)$$

для деякого елемента $\tilde{l}_\alpha \in \mathbb{A}_\alpha^*$ порядку m_α , пов'язаного з l_α у початковий момент часу для будь-якого параметра $t_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, перетворенням подібності

$$\tilde{l}_\alpha(0) = B_\alpha^{-1}(0)l_\alpha(0)B_\alpha(0), \quad (15)$$

де $B_\alpha(0) \in \mathbb{A}_\alpha$ — дробовий інтегро-диференціальний оператор, коефіцієнти якого не залежать від $t_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Лема 1. Якщо у початковий момент часу для будь-якого параметра $t_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, елементи l_α і $\tilde{l}_\alpha \in \mathbb{A}_\alpha^*$, які задовольняють рівняння (12) і (14) відповідно, пов'язані співвідношенням (15), то для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує такий оператор $B_\alpha \in \mathbb{A}_\alpha$, коефіцієнти якого залежать від $t_n \in \mathbb{R}$, що у довільний момент часу $t_n \in \mathbb{R}$ маємо

$$\tilde{l}_\alpha(t_n) = B_\alpha^{-1}(t_n)l_\alpha(t_n)B_\alpha(t_n). \quad (16)$$

Доведення. Оскільки рівняння (12) і (14) можна записати в еквівалентному вигляді

$$dl_\alpha/dt_n = ad_{(\nabla\gamma_n(l_\alpha))_+}^* l_\alpha,$$

$$d\tilde{l}_\alpha/dt_n = ad_{(\nabla\gamma_n(\tilde{l}_\alpha))_+}^* \tilde{l}_\alpha,$$

то для кожного $n \in \mathbb{N}$ існують такі елементи g_α і $\tilde{g}_\alpha \in G_\alpha$, залежні від параметра $t_n \in \mathbb{R}$, що розв'язки цих рівнянь знаходимо за допомогою копрійданої дії Ad^* групи Лі G_α на спряженому просторі $\mathbb{A}_\alpha^*$ до її алгебри Лі $\mathbb{A}_\alpha$ [6, 17]:

$$l_\alpha(t_n) = Ad_{g_\alpha(t_n)}^* l_\alpha(0) = g_\alpha(t_n)l_\alpha(0)g_\alpha^{-1}(t_n), \quad (17)$$

$$\tilde{l}_\alpha(t_n) = Ad_{\tilde{g}_\alpha(t_n)}^* \tilde{l}_\alpha(0) = \tilde{g}_\alpha(t_n)\tilde{l}_\alpha(0)\tilde{g}_\alpha^{-1}(t_n),$$

де $Ad_{g_\alpha}^*(l_\alpha) = g_\alpha l_\alpha g_\alpha^{-1}$ для будь-якого $g_\alpha \in G_\alpha$, та

$$ad_{a_\alpha}^*(l_\alpha) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Ad_{\exp(a_\alpha t)}^*(l_\alpha) = [a_\alpha, l_\alpha]$$

для будь-якого $a_\alpha \in \mathbb{A}_\alpha$ і деякого еволюційного параметра $t \in \mathbb{R}$. У формулі (29) для кожного $n \in \mathbb{N}$ елементи g_α і $\tilde{g}_\alpha \in G_\alpha$ задовольняють лінійні еволюційні рівняння

$$dg_\alpha(t_n)/dt_n = (\nabla\gamma_n(l_\alpha))_+ g_\alpha(t_n), \quad (18)$$

$$d\tilde{g}_\alpha(t_n)/dt_n = (\nabla\gamma_n(l_\alpha))_+ \tilde{g}_\alpha(t_n).$$

Тоді з урахуванням (15) отримуємо

$$\begin{aligned} \tilde{l}_\alpha(t_n) &= \tilde{g}_\alpha(t_n)B_\alpha^{-1}(0)l_\alpha(0)B_\alpha(0)\tilde{g}_\alpha^{-1}(t_n) \\ &= \tilde{g}_\alpha(t_n)B_\alpha^{-1}(0)g_\alpha^{-1}(t_n)l_\alpha(t_n)g_\alpha(t_n)B_\alpha(0)\tilde{g}_\alpha^{-1}(t_n) \\ &= B_\alpha^{-1}(t_n)l_\alpha(t_n)B_\alpha(t_n), \end{aligned}$$

де

$$B_\alpha(t_n) = g_\alpha(t_n)B_\alpha(0)\tilde{g}_\alpha^{-1}(t_n).$$

Лему 1 доведено.

3 (16) впливає, що

$$\tilde{l}_\alpha = B_\alpha^{-1} A_\alpha, \quad (19)$$

і справедлива така теорема.

Теорема 1. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ існують елементи g_α і $\tilde{g}_\alpha \in G_\alpha$, залежні від параметра $t_n \in \mathbb{R}$, що задовольняють лінійні еволюційні рівняння (18), і виконуються рівності

$$A_\alpha(t_n) = g_\alpha(t_n) A_\alpha(0) \tilde{g}_\alpha^{-1}(t_n),$$

$$B_\alpha(t_n) = g_\alpha(t_n) B_\alpha(0) \tilde{g}_\alpha^{-1}(t_n).$$

Граденти інваріантів Казимира $\gamma_n \in \mathcal{I}(\mathbb{A}_\alpha^*)$, $n \in \mathbb{N}$, у точках l_α і $\tilde{l}_\alpha \in \mathbb{A}_\alpha^*$ пов'язані співвідношенням

$$\nabla \gamma_n(\tilde{l}_\alpha) = B_\alpha^{-1} \nabla \gamma_n(l_\alpha) B_\alpha.$$

Як наслідок з теореми 1, отримуємо систему еволюційних рівнянь для дробових диференціальних операторів $A_\alpha, B_\alpha \in \mathbb{A}_{\alpha,+}$ у вигляді

$$\begin{aligned} dA_\alpha/dt_n &= (\nabla \gamma_n(l_\alpha))_+ A_\alpha - A_\alpha (\nabla \gamma_n(\tilde{l}_\alpha))_+, \\ dB_\alpha/dt_n &= (\nabla \gamma_n(l_\alpha))_+ B_\alpha - B_\alpha (\nabla \gamma_n(\tilde{l}_\alpha))_+. \end{aligned} \quad (20)$$

Таким чином, довели таку теорему.

Теорема 2. При перетворенні Беклунда $P: (A_\alpha, B_\alpha) \mapsto (l_\alpha, \tilde{l}_\alpha)$, що діє за правилами (13) і (19), система двох потоків типу Лакса (12) і (14) на прямій сумі $\mathbb{A}_\alpha^* \oplus \mathbb{A}_\alpha^*$ еквівалентна системі еволюційних рівнянь (20) на декартовому добутку $\mathbb{A}_{\alpha,+} \times \mathbb{A}_{\alpha,+}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Система (20) має нескінченну послідовність законів збереження $H_n \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_{\alpha,+} \times \mathbb{A}_{\alpha,+})$ у вигляді

$$H_n(A_\alpha, B_\alpha) := \gamma_n(l_\alpha) \big|_{l_\alpha = A_\alpha B_\alpha^{-1}} = \gamma_n(\tilde{l}_\alpha) \big|_{\tilde{l}_\alpha = B_\alpha^{-1} A_\alpha}.$$

На просторі $\mathbb{A}_\alpha^* \oplus \mathbb{A}_\alpha^*$ можна ввести дужку Пуассона $\{.,.\}_{\Theta \oplus \tilde{\Theta}}$, задану оператором Пуассона $\Theta \oplus \tilde{\Theta}$, де Θ і $\tilde{\Theta}$ — оператори Пуассона, що породжують дужку Лі–Пуассона (10) у точках l_α і $\tilde{l}_\alpha \in \mathbb{A}^*$ відповідно.

Система двох потоків типу Лакса (12) і (14) на $\mathbb{A}_\alpha^* \oplus \mathbb{A}_\alpha^*$ є гамільтоновою стосовно дужки Пуассона $\{.,.\}_{\Theta \oplus \tilde{\Theta}}$, а відповідний гамільтоніан має такий вигляд (див., наприклад, [25]):

$$\gamma_n(l_\alpha, \tilde{l}_\alpha) := \gamma_n(l_\alpha) + \gamma_n(\tilde{l}_\alpha).$$

Перетворення Беклунда, задане рівностями (13) і (19), забезпечує гамільтоновість системи еволюційних рівнянь (20) стосовно дужки Пуассона $\{.,.\}_{\mathcal{L}}$, породженої оператором Пуассона $\mathcal{L}: T^*(\mathbb{A}_{\alpha,+} \times \mathbb{A}_{\alpha,+}) \rightarrow T(\mathbb{A}_{\alpha,+} \times \mathbb{A}_{\alpha,+})$, яка є редукцією на підпростір $\mathbb{A}_{\alpha,+} \times \mathbb{A}_{\alpha,+} \subset \mathbb{A}_\alpha \times \mathbb{A}_\alpha$ дужки Пуассона $\{.,.\}_{\tilde{\mathcal{L}}}$, породженої оператором Пуассона $\tilde{\mathcal{L}}: T^*(\mathbb{A}_\alpha \times \mathbb{A}_\alpha) \rightarrow T(\mathbb{A}_\alpha \times \mathbb{A}_\alpha)$ у вигляді (див., наприклад, [7, 17])

$$\tilde{\mathcal{L}} = (P')^{-1} (\Theta \oplus \tilde{\Theta}) (P'^*)^{-1}, \quad (21)$$

де $P': T(\mathbb{A}_\alpha \times \mathbb{A}_\alpha) \rightarrow T(\mathbb{A}_\alpha^* \oplus \mathbb{A}_\alpha^*)$ — похідна Фреше перетворення Беклунда (13) і (19), $P'^*: T^*(\mathbb{A}_\alpha^* \oplus \mathbb{A}_\alpha^*) \rightarrow T^*(\mathbb{A}_\alpha \times \mathbb{A}_\alpha)$ — спряжений до неї оператор стосовно скалярного добутку (8),

$(P')^{-1}$ і $(P'^*)^{-1}$ — обернені до них оператори. Її гамільтоніан $\bar{H}_n \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_{\alpha,+} \times \mathbb{A}_{\alpha,+})$ знаходимо як редукцію гамільтоніана $\gamma_n(l_\alpha, \tilde{l}_\alpha) \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_\alpha^* \oplus \mathbb{A}_\alpha^*)$ на орбіті копрієднаної дії групи Лі G_α , пов'язані з елементами l_α і $\tilde{l}_\alpha \in \mathbb{A}_\alpha^*$ у вигляді (13) і (19):

$$\bar{H}_n(A_\alpha, B_\alpha) := \gamma_n(l_\alpha, \tilde{l}_\alpha) \big|_{l_\alpha=A_\alpha B_\alpha^{-1}, \tilde{l}_\alpha=B_\alpha^{-1} A_\alpha} . \quad (22)$$

За допомогою безпосередніх обчислень отримуємо

$$P' \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (.)B_\alpha^{-1} & -l_\alpha(.)B_\alpha^{-1} \\ B_\alpha^{-1}(.) & -B_\alpha^{-1}(.)\tilde{l}_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix},$$

$$P'^* \begin{pmatrix} \bar{h}_1 \\ \bar{h}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_\alpha^{-1}(.) & (.)B_\alpha^{-1} \\ -B_\alpha^{-1}(.)l_\alpha & -\tilde{l}_\alpha(.)B_\alpha^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{h}_1 \\ \bar{h}_2 \end{pmatrix},$$

де

$$(h_1, h_2)^\top \in T_{(A_\alpha, B_\alpha)}(\mathbb{A}_\alpha \times \mathbb{A}_\alpha), \quad (\bar{h}_1, \bar{h}_2)^\top \in T_{(l_\alpha, \tilde{l}_\alpha)}^*(\mathbb{A}_\alpha^* \oplus \mathbb{A}_\alpha^*),$$

$T_{(A_\alpha, B_\alpha)}(\mathbb{A}_\alpha \times \mathbb{A}_\alpha) \subset T(\mathbb{A}_\alpha \times \mathbb{A}_\alpha)$ — дотичний підпростір до $\mathbb{A}_\alpha \times \mathbb{A}_\alpha$ у точці (A_α, B_α) і $T_{(l_\alpha, \tilde{l}_\alpha)}^*(\mathbb{A}_\alpha^* \oplus \mathbb{A}_\alpha^*) \subset T^*(\mathbb{A}_\alpha^* \oplus \mathbb{A}_\alpha^*)$ — кодотичний підпростір до $\mathbb{A}_\alpha^* \oplus \mathbb{A}_\alpha^*$ у точці $(l_\alpha, \tilde{l}_\alpha)$.

Відповідні обернені оператори мають вигляд

$$(P')^{-1} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (.)B_\alpha + l_\alpha(\mathcal{K}(.)B_\alpha) & -l_\alpha(\mathcal{K}B_\alpha(.)) \\ (\mathcal{K}(.)B_\alpha) & -(\mathcal{K}B_\alpha(.)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix},$$

$$(P'^*)^{-1} \begin{pmatrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_\alpha(\mathcal{K}^*\tilde{l}_\alpha(.)) & B_\alpha(\mathcal{K}^*(.)) \\ -(\mathcal{K}^*(.)l_\alpha)B_\alpha & -(\mathcal{K}^*(.)B_\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{K}(.) := ((.)\tilde{l}_\alpha - l_\alpha(.))^{-1}, \quad \mathcal{K}^*(.) := (\tilde{l}_\alpha(.) - (.)l_\alpha)^{-1},$$

де

$$(d_1, d_2)^\top \in T_{(l_\alpha, \tilde{l}_\alpha)}(\mathbb{A}_\alpha^* \oplus \mathbb{A}_\alpha^*), \quad (\bar{d}_1, \bar{d}_2)^\top \in T_{(A_\alpha, B_\alpha)}^*(\mathbb{A}_\alpha \times \mathbb{A}_\alpha),$$

$T_{(l_\alpha, \tilde{l}_\alpha)}(\mathbb{A}_\alpha^* \oplus \mathbb{A}_\alpha^*) \subset T(\mathbb{A}_\alpha^* \oplus \mathbb{A}_\alpha^*)$ — дотичний підпростір до $\mathbb{A}_\alpha^* \oplus \mathbb{A}_\alpha^*$ у точці $(l_\alpha, \tilde{l}_\alpha)$ і $T_{(A_\alpha, B_\alpha)}^*(\mathbb{A}_\alpha \times \mathbb{A}_\alpha) \subset T^*(\mathbb{A}_\alpha \times \mathbb{A}_\alpha)$ — кодотичний підпростір до $\mathbb{A}_\alpha \times \mathbb{A}_\alpha$ у точці (A_α, B_α) .

Таким чином, для кожного $n \in \mathbb{N}$ систему еволюційних рівнянь (20) можна записати у гамільтоновому вигляді

$$\frac{d}{dt_n} \begin{pmatrix} A_\alpha \\ B_\alpha \end{pmatrix} = -\mathcal{L} \begin{pmatrix} \frac{\delta \bar{H}_n}{\delta A_\alpha} \\ \frac{\delta \bar{H}_n}{\delta B_\alpha} \end{pmatrix},$$

де

$$\delta \bar{H}_n(A_\alpha, B_\alpha) = \left(\delta A_\alpha, \frac{\delta \bar{H}_n}{\delta A_\alpha} \right) + \left(\delta B_\alpha, \frac{\delta \bar{H}_n}{\delta B_\alpha} \right),$$

$$\left(\frac{\delta \bar{H}_n}{\delta A_\alpha}\right)_{\leq 0} = \frac{\delta \bar{H}_n}{\delta A_\alpha}, \quad \left(\frac{\delta \bar{H}_n}{\delta B_\alpha}\right)_{\leq 0} = \frac{\delta \bar{H}_n}{\delta B_\alpha}.$$

А отже, справедлива така теорема.

Теорема 3. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ система еволюційних рівнянь (20), задана на підпросторі $\mathbb{A}_{\alpha,+} \times \mathbb{A}_{\alpha,+} \subset \mathbb{A}_\alpha \times \mathbb{A}_\alpha$, є гамільтоною стосовно дужки Пуассона $\{.,.\}_\mathcal{L}$, яка є редукцією на $\mathbb{A}_{\alpha,+} \times \mathbb{A}_{\alpha,+}$ дужки Пуассона $\{.,.\}_{\bar{\mathcal{L}}}$, породженої оператором Пуассона (21), і гамільтоніана $\bar{H}_n \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_{\alpha,+} \times \mathbb{A}_{\alpha,+})$ у вигляді (22).

Зауважимо, що для зручності обчислень при редукуванні дужки Пуассона $\{.,.\}_\mathcal{L}$ на орбіти копрієднаної дії групи Лі G_α з урахуванням перетворення Беклунда (13) і (19) доцільно використовувати правило, за яким діють оператори Θ і $\tilde{\Theta}$, у вигляді

$$\Theta: \nabla \gamma(l_\alpha) \mapsto -[l_\alpha, (\nabla \gamma(l_\alpha))_-] + [l_\alpha, \nabla \gamma(l_\alpha)]_{\leq 0},$$

$$\tilde{\Theta}: \nabla \gamma(\tilde{l}_\alpha) \mapsto -[\tilde{l}_\alpha, (\nabla \gamma(\tilde{l}_\alpha))_-] + [\tilde{l}_\alpha, \nabla \gamma(\tilde{l}_\alpha)]_{\leq 0},$$

а також рівності

$$[l_\alpha, \nabla \gamma(l_\alpha)]|_{l_\alpha=A_\alpha B_\alpha^{-1}} = A_\alpha \frac{\delta H}{\delta A_\alpha} + B_\alpha \frac{\delta H}{\delta B_\alpha}, \quad (23)$$

$$[\tilde{l}_\alpha, \nabla \gamma(\tilde{l}_\alpha)]|_{\tilde{l}_\alpha=B_\alpha^{-1}A_\alpha} = -\left(\frac{\delta H}{\delta A_\alpha}A_\alpha + \frac{\delta H}{\delta B_\alpha}B_\alpha\right),$$

де $H \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_{\alpha,+} \times \mathbb{A}_{\alpha,+})$ і

$$H(A_\alpha, B_\alpha) := \gamma(l_\alpha)|_{l_\alpha=A_\alpha B_\alpha^{-1}} + \gamma(\tilde{l}_\alpha)|_{\tilde{l}_\alpha=B_\alpha^{-1}A_\alpha}, \quad (24)$$

що виконуються для будь-якого гладкого за Фреше функціонала $\gamma \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_\alpha^*)$.

Отримаємо оператор Пуассона $\mathcal{L}: T^*(\mathbb{A}_{\alpha,+} \times \mathbb{A}_{\alpha,+}) \rightarrow T(\mathbb{A}_{\alpha,+} \times \mathbb{A}_{\alpha,+})$ у явному вигляді. З цією метою розглянемо гамільтонове векторне поле, яке породжує на $\mathbb{A}_\alpha^* \oplus \mathbb{A}_\alpha^*$ оператор Пуассона $\Theta \oplus \tilde{\Theta}: T^*(\mathbb{A}_\alpha^* \oplus \mathbb{A}_\alpha^*) \rightarrow T(\mathbb{A}_\alpha^* \oplus \mathbb{A}_\alpha^*)$ за допомогою довільного гладкого за Фреше функціонала $\gamma \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_\alpha^*)$, а саме:

$$dl_\alpha/dt = [l_\alpha, (\nabla \gamma(l_\alpha))_-] - [l_\alpha, \nabla \gamma(l_\alpha)]_{\leq 0},$$

$$d\tilde{l}_\alpha/dt = [\tilde{l}_\alpha, (\nabla \gamma(\tilde{l}_\alpha))_-] - [\tilde{l}_\alpha, \nabla \gamma(\tilde{l}_\alpha)]_{\leq 0},$$

де $t \in \mathbb{R}$ — еволюційний параметр.

Будемо вважати, що оператори $l, \tilde{l} \in \mathbb{A}_\alpha^*$ записані у вигляді добутків

$$l_\alpha = \check{A}_\alpha \check{B}_\alpha^{-1}, \quad \tilde{l}_\alpha = \check{B}_\alpha^{-1} \check{A}_\alpha,$$

де $\check{A}_\alpha, \check{B}_\alpha \in \mathbb{A}_\alpha^*$ — деякі дробові інтегро-диференціальні оператори. Неважко перевірити, що оператори $\check{A}_\alpha, \check{B}_\alpha \in \mathbb{A}_\alpha$ задовольняють систему еволюційних рівнянь

$$\begin{aligned} d\check{A}_\alpha/dt &= \check{A}_\alpha(\nabla \gamma(l_\alpha))_- - (\nabla \gamma(\tilde{l}_\alpha))_- \check{A}_\alpha + R, \\ d\check{B}_\alpha/dt &= \check{B}_\alpha(\nabla \gamma(l_\alpha))_- - (\nabla \gamma(\tilde{l}_\alpha))_- \check{B}_\alpha + Q, \end{aligned} \quad (25)$$

де для операторів $Q, R \in \mathbb{A}_\alpha$ виконуються рівності

$$\begin{aligned} ((\cdot)\tilde{l}_\alpha - l_\alpha(\cdot))Q &= -[l_\alpha, \nabla\gamma(l_\alpha)]_{\leq 0}\check{B}_\alpha + \check{B}_\alpha[\tilde{l}_\alpha, \nabla\gamma(\tilde{l}_\alpha)]_{\leq 0}, \\ R &= l_\alpha Q - [l_\alpha, \nabla\gamma(l_\alpha)]_{\leq 0}\check{B}_\alpha. \end{aligned}$$

Редукована на підпростір $\mathbb{A}_{\alpha,+} \times \mathbb{A}_{\alpha,+}$ система (25) для дробових диференціальних операторів $\check{A}_\alpha = A_\alpha$ і $\check{B}_\alpha = B_\alpha$ записується так:

$$\begin{aligned} dA_\alpha/dt &= (A_\alpha(\nabla\gamma(l_\alpha))_-)_+ - ((\nabla\gamma(\tilde{l}_\alpha))_-A_\alpha)_+ + R_+, \\ dB_\alpha/dt &= (B_\alpha(\nabla\gamma(l_\alpha))_-)_+ - ((\nabla\gamma(\tilde{l}_\alpha))_-B_\alpha)_+ + Q_+, \\ Q &= \left(\mathcal{K} \left(-[l_\alpha, \nabla\gamma(l_\alpha)]_{\leq 0}B_\alpha + B_\alpha[\tilde{l}_\alpha, \nabla\gamma(\tilde{l}_\alpha)]_{\leq 0} \right) \right), \\ R &= l_\alpha Q - [l_\alpha, \nabla\gamma(l_\alpha)]_{\leq 0}B_\alpha. \end{aligned}$$

З рівностей (23) маємо

$$\begin{aligned} Q &= - \left(\mathcal{K} \left(\left(A_\alpha \frac{\delta H}{\delta A_\alpha} + B_\alpha \frac{\delta H}{\delta B_\alpha} \right)_{\leq 0} B_\alpha + B_\alpha \left(\frac{\delta H}{\delta A_\alpha} A_\alpha + \frac{\delta H}{\delta B_\alpha} B_\alpha \right)_{\leq 0} \right) \right), \\ R &= -A_\alpha B_\alpha^{-1} \left(\mathcal{K} \left(\left(A_\alpha \frac{\delta H}{\delta A_\alpha} + B_\alpha \frac{\delta H}{\delta B_\alpha} \right)_{\leq 0} B_\alpha \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + B_\alpha \left(\frac{\delta H}{\delta A_\alpha} A_\alpha + \frac{\delta H}{\delta B_\alpha} B_\alpha \right)_{\leq 0} \right) \right) \\ &\quad - \left(A_\alpha \frac{\delta H}{\delta A_\alpha} + B_\alpha \frac{\delta H}{\delta B_\alpha} \right)_{\leq 0} B_\alpha, \end{aligned}$$

а також

$$\begin{aligned} \nabla\gamma(l_\alpha) &= \left(\mathcal{K}_1 \left(A_\alpha \frac{\delta H}{\delta A_\alpha} + B_\alpha \frac{\delta H}{\delta B_\alpha} \right) \right), \quad \mathcal{K}_1(\cdot) := ((\cdot)l_\alpha - l_\alpha(\cdot))^{-1}, \\ \nabla\gamma(\tilde{l}_\alpha) &= - \left(\mathcal{K}_2 \left(\frac{\delta H}{\delta A_\alpha} A_\alpha + \frac{\delta H}{\delta B_\alpha} B_\alpha \right) \right), \quad \mathcal{K}_2(\cdot) := ((\cdot)\tilde{l}_\alpha - \tilde{l}_\alpha(\cdot))^{-1}, \end{aligned}$$

для гладкого за Фреше функціонала $H \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_{\alpha,+} \times \mathbb{A}_{\alpha,+})$ у вигляді (24). А отже, оператор Пуассона $\mathcal{L}: T^*(\mathbb{A}_{\alpha,+} \times \mathbb{A}_{\alpha,+}) \rightarrow T(\mathbb{A}_{\alpha,+} \times \mathbb{A}_{\alpha,+})$ діє за правилом

$$\mathcal{L}: \begin{pmatrix} \frac{\delta H}{\delta A_\alpha} \\ \frac{\delta H}{\delta B_\alpha} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\left(A_\alpha \left(\mathcal{K}_1 \left(A_\alpha \frac{\delta H}{\delta A_\alpha} + B_\alpha \frac{\delta H}{\delta B_\alpha}\right)\right)_- \right)_+ + \\ + \left(\left(\mathcal{K}_2 \left(\frac{\delta H}{\delta A_\alpha} A_\alpha + \frac{\delta H}{\delta B_\alpha} B_\alpha\right)\right)_- A_\alpha\right)_+ + \\ + \left(A_\alpha B_\alpha^{-1} \left(\mathcal{K} \left(\left(A_\alpha \frac{\delta H}{\delta A_\alpha} + B_\alpha \frac{\delta H}{\delta B_\alpha}\right)_{\leq 0} B_\alpha + B_\alpha \left(\frac{\delta H}{\delta A_\alpha} A_\alpha + \frac{\delta H}{\delta B_\alpha} B_\alpha\right)_{\leq 0}\right)\right) + \right. \\ \left. + \left(A_\alpha \frac{\delta H}{\delta A_\alpha} + B_\alpha \frac{\delta H}{\delta B_\alpha}\right)_{\leq 0} B_\alpha\right)_+ - \left(B_\alpha \left(\mathcal{K}_1 \left(A_\alpha \frac{\delta H}{\delta A_\alpha} + B_\alpha \frac{\delta H}{\delta B_\alpha}\right)\right)_- \right)_+ + \\ + \left(\left(\mathcal{K}_2 \left(\frac{\delta H}{\delta A_\alpha} A_\alpha + \frac{\delta H}{\delta B_\alpha} B_\alpha\right)\right)_- B_\alpha\right)_+ + \\ + \left(\mathcal{K} \left(\left(A_\alpha \frac{\delta H}{\delta A_\alpha} + B_\alpha \frac{\delta H}{\delta B_\alpha}\right)_{\leq 0} B_\alpha + B_\alpha \left(\frac{\delta H}{\delta A_\alpha} A_\alpha + \frac{\delta H}{\delta B_\alpha} B_\alpha\right)_{\leq 0}\right)\right) + \right. \\ \left. + B_\alpha \left(\frac{\delta H}{\delta A_\alpha} A_\alpha + \frac{\delta H}{\delta B_\alpha} B_\alpha\right)_{\leq 0}\right)_+ \end{pmatrix}.$$

4. Інтегровні гідродинамічні системи типу Бенні. Процедура редукування системи (12) і (14) на орбіті копрієднаної дії групи Лі G_α з урахуванням перетворення Беклунда (13) і (19) дозволяє отримувати ієрархії інтегровних нелінійних динамічних систем із дробовими похідними за просторовою змінною, що мають нескінченні послідовності законів збереження. Квазікласичне наближення [7, 10, 11] таких систем, при якому комутатор (5) на алгебрі Лі $\mathbb{A}_\alpha$ перетворюється на комутатор $\{.,.\}$ для елементів алгебри Лі $\mathbb{B}_\alpha := \mathbb{B}_0\{\xi^\alpha, \xi^{-\alpha}\}$ дробових символів [3]

$$a_\alpha(x; \xi) := \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} a_j(x; \xi) \xi^{\alpha(p_\alpha - j)} \in \mathbb{B}_\alpha,$$

де $a_j \in \mathbb{B}_0 := A\{\xi, \xi^{-1}\}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, $p_\alpha \in \mathbb{Z}_+$ — порядок елемента a_α , $(x, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$, у такий спосіб:

$$\{a_\alpha, b_\alpha\} = \frac{\partial a_\alpha}{\partial \xi} \frac{\partial b_\alpha}{\partial x} - \frac{\partial b_\alpha}{\partial \xi} \frac{\partial a_\alpha}{\partial x} := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} [a_\alpha, b_\alpha] \Big|_{D \rightarrow \xi, \frac{\partial}{\partial x} (\cdot) \rightarrow \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} (\cdot)}, \quad (26)$$

де $a_\alpha, b_\alpha \in \mathbb{B}_\alpha$ і $a_\alpha, b_\alpha \in \mathbb{A}_\alpha$, приводить до нових ієрархій гідродинамічних систем типу Бенні [3, 7, 10, 12–14]. З іншого боку, згадані гідродинамічні системи можна розглядати як редукції системи раціонально-факторизованих гамільтонових потоків на спряженому просторі $\mathbb{B}_\alpha^*$ до алгебри Лі $\mathbb{B}_\alpha$ стосовно скалярного добутку

$$(a_\alpha, b_\alpha) := \int_{\mathbb{R}} \text{res}_\xi \left(\text{res}_{\xi^\alpha} (a_\alpha \circ b_\alpha \xi^{-\alpha}) \right) dx,$$

де res_{ξ^α} позначає коефіцієнт при $\xi^{-\alpha}$ у розвиненні елемента алгебри Лі $\mathbb{B}_\alpha$, а res_ξ — коефіцієнт при ξ^{-1} у розвиненні елемента алгебри Лі $\mathbb{B}_0$, які у довільних точках $\ell_\alpha, \tilde{\ell}_\alpha \in \mathbb{B}_\alpha^* \simeq \mathbb{B}_\alpha$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ мають вигляд

$$\begin{aligned} d\ell_\alpha/dt_n &= \left\{ \left(\ell_\alpha^{n/m_\alpha} \right)_+, \ell_\alpha \right\}, \\ d\tilde{\ell}_\alpha/dt_n &= \left\{ \left(\tilde{\ell}_\alpha^{n/m_\alpha} \right)_+, \tilde{\ell}_\alpha \right\}, \end{aligned} \quad (27)$$

де нижній індекс “+” позначає проєкцію на підалгебру Лі $\mathbb{B}_{\alpha,+} \subset \mathbb{B}_\alpha$ поліномів за комплексним параметром ξ^α , при перетворенні Беклунда

$$\ell_\alpha = a_\alpha b_\alpha^{-1}, \quad \tilde{\ell}_\alpha = b_\alpha^{-1} a_\alpha, \quad (28)$$

де $\ell_\alpha, \tilde{\ell}_\alpha \in \mathbb{B}_\alpha^*$ — дробові символи порядку m_α , $a_\alpha, b_\alpha \in \mathbb{B}_{\alpha,+}$ — дробові символи порядків r_α і $s_\alpha \in \mathbb{N}$ відповідно, $r_\alpha \geq s_\alpha$, а b_α^{-1} позначає символ, обернений до b_α , а отже, є інтегровними.

Наприклад, у випадку, коли дробові диференціальні оператори $A_\alpha, B_\alpha \in \mathbb{A}_{\alpha,+}$ записано так:

$$A_\alpha = D^{2\alpha} + vD^\alpha + u, \quad B_\alpha = D^\alpha + w,$$

де $u, v, w \in \mathbb{A}_0$, ієрархія систем раціонально-факторизованих потоків (20) редукується до інтегровної ієрархії нелінійних дробово-диференціальних систем, перші елементи якої мають вигляд

$$\begin{aligned} dv/dt_1 &= [D^\alpha, uD^{-\alpha}] + D^\alpha [D^{-\alpha}v, w], \\ du/dt_1 &= [v, uD^{-\alpha}]D^\alpha + [u, D^{-\alpha}w]D^\alpha - D^\alpha [w, D^{-\alpha}u] + [w, u], \\ dw/dt_1 &= [v, wD^{-\alpha}]D^\alpha + [wD^{-\alpha}w, D^\alpha], \\ dv/dt_2 &= D^\alpha [vD^\alpha, D^{-\alpha}u]D^{-\alpha} + D^\alpha [u, D^{-\alpha}vD^\alpha]D^{-\alpha} + [vD^\alpha, uD^{-\alpha}]D^{-\alpha} + [u, v] \\ &\quad - D^\alpha [D^\alpha w, D^{-\alpha}u]D^{-\alpha} + [uD^{-\alpha}, wD^\alpha]D^{-\alpha} + [w, D^\alpha u + uD^\alpha]D^{-\alpha} \\ &\quad + D^\alpha [u, w]D^{-\alpha} + [u, w] + [vD^\alpha wD^{-\alpha}, v] + v[vD^\alpha, w]D^{-\alpha} \\ &\quad + D^\alpha [w, D^{-\alpha}wvD^\alpha]D^{-\alpha} - [vD^\alpha wD^{-\alpha}, w] - D^\alpha [vw, D^{-\alpha}vD^\alpha]D^{-\alpha} \\ &\quad + [v, wD^{-\alpha}v]D^\alpha - [v, wD^{-\alpha}w]D^\alpha + D^{2\alpha} [wD^{-\alpha}w, v]D^{-\alpha} \\ &\quad + [wD^{-\alpha}, v^2D^\alpha] - [vD^\alpha, v]wD^{-\alpha} + D^\alpha [vD^\alpha w, D^{-\alpha}w]D^{-\alpha} \\ &\quad - [wD^{-\alpha}, wvD^\alpha] + D^\alpha [w^2, D^{-\alpha}vD^\alpha]D^{-\alpha} - [v, w^2] + [vD^\alpha, w^2]D^{-\alpha} \\ &\quad - D^\alpha [w, D^{-\alpha}v^2D^\alpha]D^{-\alpha} - [vD^\alpha, wD^{-\alpha}vD^\alpha]D^{-\alpha} - [wD^{-\alpha}, vD^\alpha v] \\ &\quad + [v, vw + wv] - [vD^\alpha, vw]D^{-\alpha} + [w, v^2D^\alpha]D^{-\alpha}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
du/dt_2 = & D^\alpha [u, D^{-\alpha} u] + [u, uD^{-\alpha}] D^\alpha - [uD^{-\alpha}, v^2] D^\alpha + [uwD^{-\alpha}, v] D^\alpha + v[u, w] \\
& + D^\alpha [w, D^{-\alpha} wu] - [uwD^{-\alpha}, w] D^\alpha - D^\alpha [vw, D^{-\alpha} u] \\
& + [uD^{-\alpha}, wD^{-\alpha} v] D^{2\alpha} - [uD^{-\alpha}, wD^{-\alpha} w] D^{2\alpha} \\
& + D^{2\alpha} [wD^{-\alpha} w, uD^{-\alpha}] + [wD^{-\alpha}, vu] D^\alpha - [u, v] w \\
& + D^\alpha [uw, D^{-\alpha} w] - [wD^{-\alpha}, wu] D^\alpha + D^\alpha [w^2, D^{-\alpha} u] - [uD^{-\alpha}, w^2] D^\alpha \\
& + [u, w^2] - D^\alpha [w, D^{-\alpha} vu] - [vD^\alpha, wD^{-\alpha} u] - [wD^{-\alpha}, uv] D^\alpha \\
& + [uD^{-\alpha}, vw + wv] D^\alpha - [u, vw] + [w, vu], \\
du/dt_2 = & D^\alpha [u, D^{-\alpha} w] + [u, wD^{-\alpha}] D^\alpha + [w^2 D^{-\alpha}, v] D^\alpha \\
& + D^\alpha [w, D^{-\alpha} w^2] - [w^2 D^{-\alpha}, w] D^\alpha - D^\alpha [vw, D^{-\alpha} w] \\
& + [wD^{-\alpha}, wD^{-\alpha} v] D^{2\alpha} - [wD^{-\alpha}, wD^{-\alpha} w] D^{2\alpha} \\
& + D^{2\alpha} [wD^{-\alpha} w, D^{-\alpha} w] + [wD^{-\alpha}, vw] D^\alpha - [w, v] w + D^\alpha [w^2, D^{-\alpha} w] \\
& - [wD^{-\alpha}, w^2] D^\alpha + D^\alpha [w^2, D^{-\alpha} w] - [wD^{-\alpha}, w^2] D^\alpha \\
& - [wD^{-\alpha}, v^2] D^\alpha - D^\alpha [w, D^{-\alpha} vw] - [vD^\alpha, wD^{-\alpha} w] \\
& - [wD^{-\alpha}, wv] D^\alpha + [wD^{-\alpha}, vw + wv] D^\alpha, \\
& \dots \dots \dots
\end{aligned} \tag{29}$$

Відповідні нескінченні послідовності законів збереження подано у вигляді

$$\begin{aligned}
\gamma_1 = & \int_{\mathbb{R}} \text{res}_D (v - w) dx, \\
\gamma_2 = & \int_{\mathbb{R}} \text{res}_D (2(u - vw + D^\alpha w D^{-\alpha} w) + (v^2 + w^2 - vD^\alpha w D^{-\alpha} - D^\alpha w D^{-\alpha} v)) dx, \\
& \dots \dots \dots
\end{aligned}$$

При квазікласичному наближенні (26) ієрархія інтегровних дробово-диференціальних систем (29) перетворюється на ієрархію інтегровних гідродинамічних систем типу Бенні на алгебрі Лі $\mathbb{B}_\alpha$ дробових символів

$$\begin{aligned}
dv/dt_1 = & \{\xi^\alpha, u\xi^{-\alpha}\} + \xi^\alpha \{\xi^{-\alpha} v, w\}, \\
du/dt_1 = & \{v, u\xi^{-\alpha}\} \xi^\alpha + \{u, \xi^{-\alpha} w\} \xi^\alpha - \xi^\alpha \{w, \xi^{-\alpha} u\} + \{w, u\}, \\
dw/dt_1 = & \{v, w\xi^{-\alpha}\} \xi^\alpha + \{w\xi^{-\alpha} w, \xi^\alpha\}, \\
dv/dt_2 = & \xi^\alpha \{v\xi^\alpha, \xi^{-\alpha} u\} \xi^{-\alpha} + \xi^\alpha \{u, \xi^{-\alpha} v\xi^\alpha\} \xi^{-\alpha} + \{v\xi^\alpha, u\xi^{-\alpha}\} \xi^{-\alpha} + \{u, v\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\xi^\alpha \{\xi^\alpha w, \xi^{-\alpha} u\} \xi^{-\alpha} + \{u \xi^{-\alpha}, w \xi^\alpha\} \xi^{-\alpha} + \{w, \xi^\alpha u + u \xi^\alpha\} \xi^{-\alpha} \\
& + \xi^\alpha \{u, w\} \xi^{-\alpha} + \{u, w\} + \{v \xi^\alpha w \xi^{-\alpha}, v\} + v \{v \xi^\alpha, w\} \xi^{-\alpha} \\
& + \xi^\alpha \{w, \xi^{-\alpha} w v \xi^\alpha\} \xi^{-\alpha} - \{v \xi^\alpha w \xi^{-\alpha}, w\} - \xi^\alpha \{v w, \xi^{-\alpha} v \xi^\alpha\} \xi^{-\alpha} \\
& + \{v, w \xi^{-\alpha} v\} \xi^\alpha - \{v, w \xi^{-\alpha} w\} \xi^\alpha + \xi^{2\alpha} \{w \xi^{-\alpha} w, v\} \xi^{-\alpha} \\
& + \{w \xi^{-\alpha}, v^2 \xi^\alpha\} - \{v \xi^\alpha, v\} w \xi^{-\alpha} + \xi^\alpha \{v \xi^\alpha w, \xi^{-\alpha} w\} \xi^{-\alpha} \\
& - \{w \xi^{-\alpha}, w v \xi^\alpha\} + \xi^\alpha \{w^2, \xi^{-\alpha} v \xi^\alpha\} \xi^{-\alpha} - \{v, w^2\} + \{v \xi^\alpha, w^2\} \xi^{-\alpha} \\
& - \xi^\alpha \{w, \xi^{-\alpha} v^2 \xi^\alpha\} \xi^{-\alpha} - \{v \xi^\alpha, w \xi^{-\alpha} v \xi^\alpha\} \xi^{-\alpha} - \{w \xi^{-\alpha}, v \xi^\alpha v\} \\
& + \{v, v w + w v\} - \{v \xi^\alpha, v w\} \xi^{-\alpha} + \{w, v^2 \xi^\alpha\} \xi^{-\alpha},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
du/dt_2 = & \xi^\alpha \{u, \xi^{-\alpha} u\} + \{u, u \xi^{-\alpha}\} \xi^\alpha - \{u \xi^{-\alpha}, v^2\} \xi^\alpha + \{u w \xi^{-\alpha}, v\} \xi^\alpha + v \{u, w\} \\
& + \xi^\alpha \{w, \xi^{-\alpha} w u\} - \{u w \xi^{-\alpha}, w\} \xi^\alpha - \xi^\alpha \{v w, \xi^{-\alpha} u\} \\
& + \{u \xi^{-\alpha}, w \xi^{-\alpha} v\} \xi^{2\alpha} - \{u \xi^{-\alpha}, w \xi^{-\alpha} w\} \xi^{2\alpha} + \xi^{2\alpha} \{w \xi^{-\alpha} w, u \xi^{-\alpha}\} \\
& + \{w \xi^{-\alpha}, v u\} \xi^\alpha - \{u, v\} w + \xi^\alpha \{u w, \xi^{-\alpha} w\} - \{w \xi^{-\alpha}, w u\} \xi^\alpha \\
& + \xi^\alpha \{w^2, \xi^{-\alpha} u\} - \{u \xi^{-\alpha}, w^2\} \xi^\alpha + \{u, w^2\} - \xi^\alpha \{w, \xi^{-\alpha} v u\} \\
& - \{v \xi^\alpha, w \xi^{-\alpha} u\} - \{w \xi^{-\alpha}, u v\} \xi^\alpha + \{u \xi^{-\alpha}, v w + w v\} \xi^\alpha - \{u, v w\} + \{w, v u\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dw/dt_2 = & \xi^\alpha \{u, \xi^{-\alpha} w\} + \{u, w \xi^{-\alpha}\} \xi^\alpha + \{w^2 \xi^{-\alpha}, v\} \xi^\alpha + \xi^\alpha \{w, \xi^{-\alpha} w^2\} \\
& - \{w^2 \xi^{-\alpha}, w\} \xi^\alpha - \xi^\alpha \{v w, \xi^{-\alpha} w\} + \{w \xi^{-\alpha}, w \xi^{-\alpha} v\} \xi^{2\alpha} \\
& - \{w \xi^{-\alpha}, w \xi^{-\alpha} w\} \xi^{2\alpha} + \xi^{2\alpha} \{w \xi^{-\alpha} w, \xi^{-\alpha} w\} + \{w \xi^{-\alpha}, v w\} \xi^\alpha \\
& - \{w, v\} w + \xi^\alpha \{w^2, \xi^{-\alpha} w\} - \{w \xi^{-\alpha}, w^2\} \xi^\alpha + \xi^\alpha \{w^2, \xi^{-\alpha} w\} \\
& - \{w \xi^{-\alpha}, w^2\} \xi^\alpha - \{w \xi^{-\alpha}, v^2\} \xi^\alpha - \xi^\alpha \{w, \xi^{-\alpha} v w\} \\
& - \{v \xi^\alpha, w \xi^{-\alpha} w\} - \{w \xi^{-\alpha}, w v\} \xi^\alpha + \{w \xi^{-\alpha}, v w + w v\} \xi^\alpha,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \dots\dots\dots, \tag{30}
\end{aligned}$$

з нескінченною послідовністю законів збереження

$$\gamma_1 = \int_{\mathbb{R}} \text{res}_\xi (v - w) dx,$$

$$\gamma_2 = \int_{\mathbb{R}} \text{res}_\xi (2(u - v w + \xi^\alpha w \xi^{-\alpha} w) + v^2 + w^2 + v \xi^\alpha w \xi^{-\alpha} - \xi^\alpha w \xi^{-\alpha} v) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \operatorname{res}_{\xi} (2(u - 2vw + w^2) + v^2) dx, \quad \dots \quad (31)$$

У випадку, коли $w = 0$, отримуємо ієрархію гідродинамічних систем типу Бенні, виписану у роботі [3]:

$$\begin{aligned} dv/dt_1 &= \{\xi^{\alpha}, u\xi^{-\alpha}\}, \\ du/dt_1 &= \{v, u\xi^{-\alpha}\}\xi^{\alpha}, \\ dv/dt_2 &= \xi^{\alpha}\{v\xi^{\alpha}, \xi^{-\alpha}u\}\xi^{-\alpha} + \xi^{\alpha}\{u, \xi^{-\alpha}v\xi^{\alpha}\}\xi^{-\alpha} + \{v\xi^{\alpha}, u\xi^{-\alpha}\}\xi^{-\alpha} + \{u, v\}, \\ du/dt_2 &= \xi^{\alpha}\{u, \xi^{-\alpha}u\} + \{u, u\xi^{-\alpha}\}\xi^{\alpha} - \{u\xi^{-\alpha}, v^2\}\xi^{\alpha} \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} dv/dt_2 &= \{u, v\} + \{\xi^{\alpha}u\xi^{-\alpha}, v\} - \{u\xi^{-\alpha}, v\xi^{\alpha} + \xi^{\alpha}v\}, \\ du/dt_2 &= \{\xi^{\alpha}, u\xi^{-\alpha}u\} - \{u\xi^{-\alpha}, v^2\}\xi^{\alpha}, \\ &\dots, \end{aligned}$$

яка має нескінченну послідовність законів збереження у вигляді

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \int_{\mathbb{R}} \operatorname{res}_{\xi} v dx, \\ \gamma_2 &= \int_{\mathbb{R}} \operatorname{res}_{\xi} (2u + v^2) dx, \\ &\dots \end{aligned}$$

А отже, справедлива така теорема.

Теорема 4. Ієрархія гідродинамічних систем типу Бенні (30) є результатом редукування системи раціонально-факторизованих гамільтонових потоків на спряженому просторі $\mathbb{B}_{\alpha}^*$ до алгебри Лі $\mathbb{B}_{\alpha}$ у вигляді (27) при перетворенні Беклунда (28) у випадку, коли дробові символи, що належать підалгебрі Лі $\mathbb{B}_{\alpha,+} \subset \mathbb{B}_{\alpha}$, записуються так:

$$a_{\alpha} = \xi^{2\alpha} + v\xi^{\alpha} + u, \quad b_{\alpha} = \xi^{\alpha} + w,$$

де $u, v, w \in \mathbb{B}_0$, а також має нескінченну послідовність законів збереження (31) і є інтегрованою.

5. Висновки. У статті теоретично обґрунтовано Лі-алгебраїчний метод конструювання інтегровних ієрархій нелінійних дробово-диференціальних динамічних систем на алгебрі Лі звичайних інтегро-диференціальних операторів, що мають нескінченні послідовності законів збереження, та асоційованих ієрархій гідродинамічних систем типу Бенні на основі раціональної факторизації гамільтонових потоків типу Лакса на спряженому просторі

до алгебри Лі дробових інтегро-диференціальних операторів, наділеної інваріантним скалярним добутком. Доведено еквівалентність системи двох раціонально-факторизованих гамільтонових потоків типу Лакса і системи двох еволюційних рівнянь для дробових диференціальних операторів, що задають раціональну факторизацію відповідних дробових інтегро-диференціальних операторів, пов'язаних перетворенням подібності. За допомогою породженого раціональною факторизацією перетворення Беклунда знайдено гамільтонове зображення для згаданої системи еволюційних рівнянь. Показано, що її квазікласичним наближенням є система двох еволюційних рівнянь для дробових символів у вигляді поліномів за дробовим степенем деякого комплексного параметра, яку можна розглядати як раціональну факторизацію гамільтонових потоків на спряженому просторі до алгебри Лі дробових символів.

У межах розвиненого методу нові інтегровні ієрархії нелінійних дробово-диференціальних систем із нескінченними послідовностями законів збереження на алгебрі Лі звичайних інтегро-диференціальних операторів та їхні гамільтонові зображення виникають у результаті редукування на орбіті копрієднаної дії групи Лі, асоційованої з алгеброю Лі дробових інтегро-диференціальних операторів, систем двох еволюційних рівнянь для дробових диференціальних операторів і відповідних гамільтонових зображень з урахуванням перетворення Беклунда. Нові інтегровні ієрархії гідродинамічних систем типу Бенні знаходимо як квазікласичне наближення інтегровних ієрархій нелінійних дробово-диференціальних систем.

Запропонований метод може бути використано для побудови широкого класу нових інтегровних ієрархій нелінійних дробово-диференціальних систем на алгебрі Лі звичайних інтегро-диференціальних операторів, знаходження відповідних нескінченних послідовностей законів збереження, вивчення гамільтонової структури таких ієрархій та отримання нових інтегровних ієрархій гідродинамічних систем типу Бенні як їхніх квазікласичних наближень.

Значною мірою роботу виконано за допомогою бюджетної програми України КПКВК 6541230 “Підтримка розвитку пріоритетних напрямів наукових досліджень”.

Література

1. A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*, North-Holland Mathematics Studies, **204**, Elsevier Science B.V., Amsterdam (2006).
2. V. E. Tarasov, *Fractional dynamics: applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media*, Springer, Heidelberg; Higher Education Press, Beijing (2010).
3. O. Ye. Hentosh, B. Yu. Kyshakevych, D. Blackmore, A. K. Prykarpatski, *New fractional nonlinear integrable Hamiltonian systems*, Appl. Math. Lett., **88**, 41–49 (2019).
4. M. A. Semenov-Tyan-Shanskii, *What is a classical r -matrix?*, Funct. Anal. Appl., **17**, № 4, 259–272 (1983).
5. W. Oewel, *R -structures, Yang–Baxter equations and related involution theorems*, J. Math. Phys., **30**, № 5, 1140–1149 (1989).
6. L. D. Faddeev, L. A. Takhtadjan, *Hamiltonian methods in the theory of solitons*, Springer, Berlin (2007).
7. A. K. Prykarpatsky, I. V. Mykytiuk, *Algebraic integrability of nonlinear dynamical systems on manifolds: classical and quantum aspects*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht (1998).
8. M. Blaszkak, B. M. Szablikowski, *Classical $\mathcal{R}$ -matrix theory for bi-Hamiltonian field systems*, J. Phys. A, **42**, 404002, 35 p. (2009).
9. D. Blackmore, A. K. Prykarpatsky, V. Hr. Samoylenko, *Nonlinear dynamical systems of mathematical physics. Spectral and symplectic integrability analysis*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ (2011).

10. V. E. Zakharov, *Benney equations and quasiclassical approximation in the method of the inverse problem*, *Funct. Anal. Appl.*, **14**, № 2, 89–98 (1980); <https://doi.org/10.1007/BF01086549>.
11. J. M. Figueroa-O'Farrill, J. Mas, E. Ramos, *A one-parameter family of Hamiltonian structures for the KP hierarchy and a continuous deformation of the nonlinear W_{KP} algebra*, *Comm. Math. Phys.*, **158**, № 1, 17–43 (1993).
12. D. R. Lebedev, Yu. I. Manin, *Benney's long wave equations. II. Lax representation and conservation laws*, *J. Math. Sci.*, **21**, № 5, 769–776 (1983); <https://doi.org/10.1007/BF01094439>.
13. B. Kupershmidt, *Hydrodynamical Poisson brackets and local Lie algebras*, *Phys. Lett. A.*, **121**, № 4, 167–174 (1987).
14. V. V. Geogdzhayev, *Solution of the Benney equations by the inverse scattering method*, *Theor. Math. Phys.*, **73**, № 2, 1198–1204 (1987).
15. L. A. Dickey, *On the constrained KP hierarchy*, *ArXiv: hep-th/9407038v1*, 7 p.; *On the constrained KP hierarchy. II*, *ArXiv: hep-th/9411005v1*, 6 p.; *On the constrained KP hierarchy. II. An additional remark*, *ArXiv: hep-th/9411157v1*, 2 p.
16. I. M. Krichever, *General rational reductions of the Kadomtsev–Petviashvili hierarchy and their symmetries*, *Funct. Anal. Appl.*, **29**, № 2, 75–80 (1995).
17. D. Blackmore, A. K. Prykarpatsky, *On some class of factorized operator dynamical systems and their integrability*, *Мат. методи та фіз.-мех. поля*, **46**, № 2, 22–25 (2003).
18. О. Гентош, А. Прикарпатський, *Раціонально факторизовані потоки Лакса на спряженому просторі центрального розширення операторної алгебри Лі*, *Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях*, Чернівець. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, Чернівці (2018).
19. M. Vovk, P. Pukach, O. Hentosh, Ya. Prykarpatsky, *The structure of rationally factorized Lax type flows and their analytical integrability*, *WSEAS Trans. Math.*, **16**, Art. # 36, 322–330 (2017).
20. L. Bonora, Q. P. Liu, C. S. Xiong, *The integrable hierarchy constructed from a pair of KdV-type hierarchies and associated W -algebra*, *Comm. Math. Phys.*, **175**, 177–202 (1996); *arXiv: hep-th/9408035v3*.
21. P. L. Butzer, U. Westphal, *An introduction to fractional calculus*, *Applications of fractional calculus in physics*, World Sci. Publ., River Edge, NJ (2000), pp. 1–85.
22. T. J. Osler, *Leibniz rule for fractional derivatives, generalized and an application to infinite series*, *SIAM J. Appl. Math.*, **18**, 658–674 (1970).
23. A. K. Prykarpatski, *New integrable differential-difference and fractional nonlinear dynamical systems and their algebro-analytical properties*, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **64**, 256–268 (2018).
24. M. Adler, *On a trace functional for formal pseudo-differential operators and the symplectic structures of the Korteweg-de Vries equations*, *Invent. Math.*, **50**, № 2, 219–248 (1979).
25. О. Є. Гентош, *Лі-алгебраїчна структура інтегровних за Лаксом $(2|1+1)$ -вимірних суперсиметричних матричних динамічних систем*, *Укр. мат. журн.*, **69**, № 10, 1310–1323 (2017).

Одержано 01.02.23