

ЗАГАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ДИНАМІЧНОЇ ПРОСТОРОВОЇ ЗАДАЧІ ПРИ ВИЗНАЧЕННІ КОЛИВАНЬ У ПРУЖНОМУ ШАРІ

Ольга Бойчук

Інститут електрозварювання ім. Є. О. Патона НАН України
вул. Казимира Малевича, 11, Київ, 03650, Україна
e-mail: olga-boichuk@i.ua

We construct a method of construction of a solution of the dynamic spatial problem of determination of vibrations in an elastic layer with instantaneous internal dilation ε^* (instantaneous relative to a change in an infinitesimal volume). The problem is reduced to the solution of a system of linear inhomogeneous partial differential equations with load-free boundary conditions and zero initial conditions.

Побудовано метод знаходження розв'язку динамічної просторової задачі визначення коливань у пружному шарі при миттєвій внутрішній дилатації ε^* (миттєва відносна зміна нескінченно малого об'єму), що зводиться до розв'язку системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними, за умов, що граничні поверхні шару вільні від навантаження, а початкові умови нульові.

1. Постановка задачі. Нехай через наявність дефекту у структурі матеріалу шару утворився зосереджений центр дилатації у точці $A(0, z_0)$ (рис. 1). Оскільки зовнішній вплив на шар осесиметричний, то розглянемо задачу про знаходження векторного поля $\vec{U} = (U_r, U_z)$ переміщень частинок шару як осесиметричну. Таким чином, розв'язок задачі можна будувати в циліндричній системі координат $O(r, z)$ із початком у серединній поверхні шару (див. рис. 1).

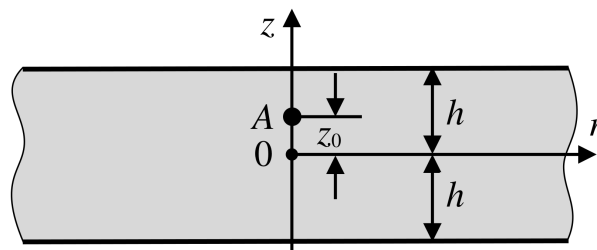


Рис. 1

Розглянемо метод побудови загального розв'язку рівняння рівноваги пружного нескінченного шару товщини $2h$ при миттєвій внутрішній дилатації ε^* за умови, що граничні поверхні шару $z = \pm h$ вільні від навантажень, а початкові умови нульові.

Згідно з твердженням теореми Гельмгольца будь-яке однозначне і неперервне векторне поле $\vec{U}$ може бути представлене у вигляді суми градієнта скалярного потенціалу $\varphi =$

$\varphi(t, r, z)$ і ротора векторного потенціалу $\text{rot } \Psi$, дивергенцію якого можна обрати рівною нулю:

$$\vec{U} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \Psi \quad (\text{div } \Psi = 0). \quad (1)$$

Початкові умови при $t = 0$ однорідні для скалярного потенціалу $\varphi = \varphi(t, r, z)$ і ротора векторного потенціалу $\Psi = (0, 0, \Psi)$:

$$\begin{aligned} \varphi(t, r, z) = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \\ \Psi(t, r, z) = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0, \end{aligned} \quad \text{при } t = 0,$$

тобто переміщення у шарі виникають у момент часу $t = 0^+$.

Тепер зобразимо компоненти вектора переміщення $\vec{U} = (U_r, U_z)$ за допомогою розкладу Гельмгольца на потенціальну φ і соленоїдальну частину Ψ . У результаті отримаємо [1]

$$U_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z}, \quad U_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2},$$

де

$$\psi = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}.$$

Таким чином, у нашому випадку з рівнянь рівноваги Ламе [1] одержимо таку систему неоднорідних рівнянь з частинними похідними, яка характеризує рух частинок шару:

$$\begin{aligned} \nabla_1^2 \varphi &= \varepsilon^*, \\ \nabla_2^2 \psi &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

де

$$\nabla_{1,2}^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{S_{1,2}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

— оператори Даламбера; S_1 — швидкість розповсюдження поздовжньої хвилі вздовж осі $0r$; S_2 — швидкість розповсюдження поперечної хвилі вздовж осі $0z$;

$$S_1 = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}, \quad S_2 = \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho}}, \quad S_1 > S_2,$$

ρ — густина матеріалу, ν — коефіцієнт Пуассона, E — модуль пружності.

Оскільки ми розглядаємо задачу в циліндричній системі координат, то величина початкової дилатації ε^* має вигляд

$$\varepsilon^* = -\varepsilon_0^* \frac{\delta(r)}{2\pi r} \delta(z - z_0) \delta(t),$$

де ε^* — величина деякого відносного обсягу матеріалу, що раптово утворився в точці $A(0, z_0)$ у момент часу $t = 0^+$, δ — функція Дірака.

Систему рівнянь (2) розв'язуємо за таких умов.

Початкові умови. У початковий момент часу тіло перебуває у ненавантаженому стані, тому

$$U_r = U_z = \frac{\partial U_r}{\partial t} = \frac{\partial U_z}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (3)$$

Граничні умови. Поверхні шару $z = \pm h$ вільні від навантаження, тому граничні умови на поверхнях $z = \pm h$ набувають вигляду

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= -2G \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{1}{2S_2^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right] = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm h, \\ \tau_{rz} &= G \frac{\partial}{\partial r} \left(2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm h. \end{aligned} \quad (4)$$

Застосовуючи до системи рівнянь (2) з граничними умовами (4) перетворення Лапласа з урахуванням однорідних початкових умов (3), отримуємо лінійну систему рівнянь із частинними похідними для зображень за Лапласом

$$\begin{cases} \bar{\nabla}_1^2 \bar{\varphi} = -\varepsilon_0^* \frac{(1+\nu)\delta(r)}{(1-\nu)2\pi r} \delta(z-z_0), \\ \bar{\nabla}_2^2 \bar{\psi} = 0, \end{cases} \quad (5)$$

де

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{1,2}^2 &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{p^2}{S_{1,2}^2}, \quad \bar{\varphi} = \int_0^\infty \varphi e^{-pt} dt, \quad \bar{\psi} = \int_0^\infty \psi e^{-pt} dt, \\ \bar{\sigma}_{zz} &= \int_0^\infty \sigma_{zz} e^{-pt} dt, \quad \bar{\tau}_{rz} = \int_0^\infty \tau_{rz} e^{-pt} dt, \quad \bar{U}_{z,r} = \int_0^\infty U_{z,r} e^{-pt} dt, \quad p = \sigma + i\varsigma. \end{aligned}$$

Граничні умови (4) тепер мають вигляд

$$\bar{\sigma}_{zz} = 0, \quad \bar{\tau}_{rz} = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm h. \quad (6)$$

Розв'язки для зображень за Лапласом $\bar{\psi}$, $\bar{\varphi}$ системи (5) будемо шукати у вигляді інтеграла Ханкеля, оскільки пластина нескінченних розмірів, де

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= \int_0^\infty \alpha J_0(\alpha r) f d\alpha, \\ \bar{\psi} &= \int_0^\infty \alpha J_0(\alpha r) \chi d\alpha, \\ \frac{\delta(r)}{r} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \alpha J_0(\alpha r) d\alpha, \\ f &= f(z, \alpha, p), \quad \chi = \chi(z, \alpha, p). \end{aligned} \quad (6^*)$$

Оскільки

$$\bar{U}_r = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial r \partial z},$$

при виконанні умов (6*) маємо

$$\bar{U}_r = - \int_0^\infty \alpha^2 J_1(\alpha r) \left(f + \frac{\partial \chi}{\partial z} \right) d\alpha;$$

і тому що

$$\bar{U}_z = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial r} - \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial r^2},$$

при виконанні умов (6*)

$$\bar{U}_z = \int_0^\infty \alpha J_0(\alpha r) \left(\frac{df}{dz} + \alpha^2 \chi \right) d\alpha.$$

У результаті згідно з (4) і (6*) отримаємо граничні умови (6) при $z = \pm h$ у вигляді

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{zz} &= 2G \int_0^\infty \alpha J_0(\alpha r) \bar{\sigma}_{zz}^*(z) d\alpha, \\ \bar{\sigma}_{zz}^* &= \bar{\sigma}_{zz}^*(z, \alpha, p) = \left(\alpha^2 + \frac{p^2}{2S_2^2} \right) f + \alpha^2 \frac{d\chi}{dz}, \\ \bar{\tau}_{rz} &= -G \int_0^\infty \alpha^2 J_1(\alpha r) \bar{\tau}_{rz}^* d\alpha, \\ \bar{\tau}_{rz}^* &= \bar{\tau}_{rz}^*(z, \alpha, p) = 2 \frac{df}{dz} + \frac{d^2 \chi}{dz^2} + \alpha^2 \chi, \end{aligned} \quad (7)$$

$J_{0,1}$ — функції Бесселя нульового та першого порядку.

Система рівнянь із частинними похідними (5) згідно з (7) стає системою лінійних неоднорідних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку

$$\begin{cases} \frac{d^2 f}{dz^2} - \left(\alpha^2 + \frac{p^2}{S_1^2} \right) f = -\varepsilon_0^* \frac{(1+\nu)}{4\pi(1-\nu)} \delta(z - z_0), \\ \frac{d^2 \chi}{dz^2} - \left(\alpha^2 + \frac{p^2}{S_2^2} \right) \chi = 0, \end{cases} \quad (8)$$

а граничні умови (6) з урахуванням (7) визначають такі співвідношення:

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{zz}^*(z, \alpha, p) = \alpha^2 \frac{d\chi}{dz} + \left(\alpha^2 + \frac{p^2}{2S_2^2} \right) f = 0, \\ \bar{\tau}_{rz}^*(z, \alpha, p) = \frac{d^2 \chi}{dz^2} + \alpha^2 \chi + 2 \frac{df}{dz} = 0. \end{cases} \quad \text{при } z = \pm h. \quad (9)$$

Відомо, що розв'язок неоднорідної лінійної системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку (8) шукають у вигляді суми загального розв'язку однорідної системи та частинного розв'язку неоднорідної:

$$f = f_o + f_u, \quad \chi = \chi_o,$$

де

$$f_o = C_1 chb_1 z + C_2 shb_1 z,$$

$$\chi = C_3 chb_2 z + C_4 shb_2 z,$$

$$b_1^2 = \alpha^2 + \frac{p^2}{S_1^2}, \quad b_1 = \sqrt{\alpha^2 + \frac{p^2}{S_1^2}},$$

$$b_2^2 = \alpha^2 + \frac{p^2}{S_2^2}, \quad b_2 = \sqrt{\alpha^2 + \frac{p^2}{S_2^2}},$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 — невідомі константи, і розв'язок системи (8) набуває вигляду

$$\begin{aligned} f &= C_1 chb_1 z + C_2 shb_1 z + f_u, \\ \chi &= C_3 chb_2 z + C_4 shb_2 z. \end{aligned} \quad (10)$$

Розв'язок (10) системи (8) із граничними умовами (9) розбиваємо на дві частини: симетричну та косиметричну [2], тобто

$$\begin{aligned} f &= f_o^c + f_u^c + f_o^\kappa + f_u^\kappa, \\ \chi &= \chi^c + \chi^\kappa, \\ \begin{cases} \bar{\sigma}_{zz}^*(z) = \bar{\sigma}_{zz}^c(z) + \bar{\sigma}_{zz}^\kappa(z), \\ \bar{\tau}_{rz}^*(z) = \bar{\tau}_{rz}^c(z) + \bar{\tau}_{rz}^\kappa(z), \end{cases} \end{aligned}$$

де в (8) робимо заміну

$$\delta(z - z_0) = \frac{1}{2}[\delta(z - z_0) + \delta(z + z_0)] + \frac{1}{2}[\delta(z - z_0) - \delta(z + z_0)].$$

2. Симетрична задача (товщинні коливання шару). Симетрична задача відповідає тому випадку, коли переміщення U_r є парною функцією координати z , тобто функції $\bar{\sigma}_{zz}^*$, f є парними. Переміщення U_z є непарною функцією координати z , тому функції $\bar{\tau}_{rz}^*$, χ теж не парні. Отже, $C_2 = C_3 = 0$.

Запишемо основні рівняння та граничні умови для цього випадку:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f^c}{dz^2} - \left(\alpha^2 + \frac{p^2}{S_1^2} \right) f^c &= -\frac{\varepsilon * (1 + \nu)}{8\pi(1 - \nu)} [\delta(z - z_0) + \delta(z + z_0)], \\ \frac{d^2 \chi^c}{dz^2} - \left(\alpha^2 + \frac{p^2}{S_2^2} \right) \chi^c &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{cases} f^c = C_1 chb_1 z + f_u^c, \\ \chi^c = C_4 shb_2 z, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{zz}^c(z) \equiv \bar{\sigma}_{zz}^c(-z) = 0, & z = \pm h, \\ \bar{\tau}_{rz}^c(z) \equiv -\bar{\tau}_{rz}^c(-z) = 0, & z = \pm h. \end{cases}$$

Наразі в граничних умовах загальна кількість рівнянь — два.

Застосовуємо до 1-го рівняння (11) пряме та зворотне перетворення Фур'є і знаходимо частинний розв'язок:

$$f_u^c = -\frac{\varepsilon^*(1+\nu)}{16\pi(1-\nu)} \left[\frac{e^{-b_1|z-z_0|}}{b_1} + \frac{e^{-b_1|z+z_0|}}{b_1} \right],$$

$$f_u^c(-h) = f_u^c(h) \text{ — симетрична функція,}$$

тому

$$\frac{df_u^c(-h)}{dz} = -\frac{df_u^c(h)}{dz} \text{ — несиметрична функція.}$$

Згідно з (11) отримаємо граничні умови для симетричної задачі у вигляді

$$\begin{cases} Nchb_1hC_1 + \alpha^2b_2chb_2hC_4 = \zeta_1, & \text{де } \zeta_1 = -Nf_u^c|_{z=\pm h}, \\ b_1shb_1hC_1 + Nshb_2hC_4 = \zeta_2, & \text{де } \zeta_2 = -2\frac{df_u^c}{dz}\Big|_{z=\pm h}, \end{cases} \quad (12)$$

$$\text{а } N = \alpha^2 + \frac{p^2}{2S_2^2}.$$

Знаходимо розв'язок отриманої лінійної неоднорідної системи двох рівнянь щодо невідомих C_1 і C_4 :

$$C_1 = \frac{\Delta_c^1}{\Delta_c}, \quad C_4 = \frac{\Delta_c^4}{\Delta_c},$$

де визначники системи (12) обчислюються за формулою

$$\Delta_c = N^2shb_2hchb_1h - b_1b_2\alpha^2shb_1hchb_2h = \alpha^2b_1b_2shb_1hchb_2h \left(\frac{N^2thb_2h}{\alpha^2b_1b_2thb_1h} - 1 \right),$$

$$\Delta_c^1 = \zeta_1Nshb_2h - \zeta_2\alpha^2b_2chb_2h = \alpha^2b_2chb_2h \left(\zeta_1N \frac{thb_2h}{\alpha^2b_2} - \zeta_2 \right),$$

$$\Delta_c^4 = \zeta_2Nchb_1h - \zeta_1b_1shb_1h = b_1chb_1h(N\zeta_2/b_1 - \zeta_1thb_1h).$$

Отримуємо формули для визначення C_1 і C_4 в явному вигляді

$$C_1 = \frac{\Delta_c^1}{\Delta_c} = \frac{\zeta_1N \frac{thb_2h}{\alpha^2b_2} - \zeta_2}{b_1shb_1h \left(\frac{N^2thb_2h}{\alpha^2b_1b_2thb_1h} - 1 \right)},$$

$$C_4 = \frac{\Delta_c^4}{\Delta_c} = \frac{N\zeta_2/b_1 - \zeta_1 thb_1 h}{\alpha^2 b_2 thb_1 h chb_2 h \left(\frac{N^2 thb_2 h}{\alpha^2 b_1 b_2 thb_1 h} - 1 \right)}.$$

Тепер, коли відомі C_1 і C_4 , розв'язок для симетричних (товщинних) коливань у шарі щодо невідомих функцій f^c і χ^c в (11) подається у вигляді

$$f^c = \frac{\Delta_c^1}{\Delta_c} chb_1 z - \frac{\varepsilon^*(1+\nu)}{16\pi(1-\nu)} \left[\frac{e^{-b_1|z-z_0|}}{b_1} + \frac{e^{-b_1|z+z_0|}}{b_1} \right],$$

$$\chi^c = \frac{\Delta_c^4}{\Delta_c} shb_2 z.$$

Розглянемо для цього випадку частотне рівняння

$$\Delta_c = \alpha^2 b_1 b_2 shb_1 h chb_2 h \left(\frac{N^2 thb_2 h}{\alpha^2 b_1 b_2 thb_1 h} - 1 \right) = 0. \quad (13)$$

Оскільки в цьому випадку

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p} shb_2 h &= hb'_2 chb_2 h = \frac{hp}{S_2^2 b_2} chb_2 h, \\ \frac{\partial}{\partial p} shb_1 h &= hb'_1 chb_1 h = \frac{hp}{S_1^2 b_1} chb_1 h, \\ \frac{\partial}{\partial p} chb_2 h &= hb'_2 shb_2 h = \frac{hp}{S_2^2 b_2} shb_2 h, \\ \frac{\partial}{\partial p} chb_1 h &= hb'_1 shb_1 h = \frac{hp}{S_1^2 b_1} shb_1 h, \\ \frac{\partial}{\partial p} N &= N' = \frac{\partial}{\partial p} \left(\alpha^2 + \frac{p^2}{2S_2^2} \right) = \frac{p}{S_2^2}. \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_1}{\partial p} &= b'_1 = \frac{\partial}{\partial p} \sqrt{\alpha^2 + \frac{p^2}{S_1^2}} = \frac{p}{S_1^2 \sqrt{\alpha^2 + \frac{p^2}{S_1^2}}} = \frac{p}{S_1^2 b_1}, \\ \frac{\partial b_2}{\partial p} &= b'_2 = \frac{\partial}{\partial p} \sqrt{\alpha^2 + \frac{p^2}{S_2^2}} = \frac{p}{S_2^2 \sqrt{\alpha^2 + \frac{p^2}{S_2^2}}} = \frac{p}{S_2^2 b_2}, \end{aligned}$$

то в результаті отримуємо

$$\Delta_c = \frac{\partial}{\partial p} \Delta_c = \frac{\partial}{\partial p} (N^2 shb_2 h chb_1 h - b_1 b_2 \alpha^2 shb_1 h chb_2 h)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2Np}{S_2^2} shb_2hchb_1h + \frac{N^2hp}{S_2^2b_2} chb_2hchb_1h + \frac{N^2hp}{S_1^2b_1} shb_1shb_2h - \frac{\alpha^2b_2p}{S_1^2b_1} shb_1hchb_2h \\
&\quad - \frac{\alpha^2b_1p}{S_2^2b_2} shb_1hchb_2h - \frac{\alpha^2b_2hp}{S_1^2} chb_1hchb_2h - \frac{b_1\alpha^2hp}{S_2^2} chb_2hchb_1h \neq 0.
\end{aligned}$$

Якщо ввести фазову швидкість за допомогою рівності $S = p/\alpha$, де $p = \varsigma + i\sigma$, то частотне рівняння (13) симетричних (товщинних) коливань для шару можна записати так:

$$\begin{aligned}
&\frac{\operatorname{th}\left(\alpha h \sqrt{1 + \frac{S^2}{S_2^2}}\right)}{\operatorname{th}\left(\alpha h \sqrt{1 + \frac{S^2}{S_1^2}}\right)} - \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{S^2}{S_1^2}\right)\left(1 + \frac{S^2}{S_2^2}\right)}}{\left(1 + \frac{S^2}{2S_2^2}\right)^2} = 0, \\
&b_2 = 0 \quad \text{або} \quad \sqrt{1 + \frac{S^2}{S_2^2}} = 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

Рівняння $b_2 = 0$ легко можна звести до рівняння вигляду

$$u^c(\varsigma, \sigma) + iv^c(\varsigma, \sigma) = 0, \quad \text{де} \quad p = \sigma + i\varsigma,$$

або до системи двох рівнянь із двома невідомими σ та ς :

$$\begin{aligned}
u^c(\varsigma, \sigma) &= 0, \\
v^c(\varsigma, \sigma) &= 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Знаходження коренів p_m^c першого рівняння (14), яке відоме як дисперсійне рівняння Релея – Ламба, в явному вигляді не можливе. Воно вирішується лише чисельно.

Корені рівнянь (15) знаходяться у явному вигляді:

$$p_*^c = \pm i\alpha S_2.$$

Позначимо $p_n^c = p_*^c$, p_m^c . Корені p_n^c є комплексно-спряженими та простими полюсами для частотного рівняння $\Delta_c = 0$, оскільки $\Delta'_c(p_n^c) \neq 0$.

3. Кососиметрична задача (згинальні коливання шару). Кососиметрична задача відповідає тому випадку, коли переміщення U_r є непарною функцією координати z , тобто функції $\bar{\sigma}_{zz}^*$, f є непарними, а переміщення U_z є парною функцією координати z , тому функції $\bar{\tau}_{rz}^*$, χ теж парні. Отже, $C_1 = C_4 = 0$.

Отримуємо задачу аналогічно симетричному випадку:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2 f^\kappa}{dz^2} - \left(\alpha^2 + \frac{p^2}{S_1^2}\right) f^\kappa = -\frac{\varepsilon^*(1+\nu)}{8\pi(1-\nu)} [\delta(z-z_0) - \delta(z+z_0)], \\
&\frac{d^2 \chi^\kappa}{dz^2} - \left(\alpha^2 + \frac{p^2}{S_2^2}\right) \chi^\kappa = 0, \\
&\begin{cases} f^\kappa = C_2 shb_1 z + f_q^\kappa, \\ \chi^\kappa = C_3 chb_2 z, \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{\sigma}_{zz}^\kappa(z) \equiv -\bar{\sigma}_{zz}^\kappa(-z) = 0, & z = \pm h, \\ \bar{\tau}_{rz}^\kappa(z) \equiv \bar{\tau}_{rz}^\kappa(-z) = 0, & z = \pm h. \end{cases}
\end{aligned} \tag{16}$$

Аналогічно симетричному випадку отримуємо частинний розв'язок (16):

$$\begin{cases} f_q^\kappa(z) = \frac{\varepsilon * (1 + \nu)}{16\pi(1 - \nu)} \left[\frac{e^{-b_1|z-z_0|}}{b_1} - \frac{e^{-b_1|z+z_0|}}{b_1} \right], \\ f_q^\kappa(-z) = -f_q^\kappa(z) \quad \text{— несиметрична функція,} \end{cases}$$

тому

$$\frac{df_q^\kappa(-h)}{dz} = \frac{df_q^\kappa(h)}{dz} \quad \text{— симетрична функція.}$$

Граничні умови в (16) мають вигляд

$$\begin{cases} C_2 N sh b_1 z + C_3 b_2 \alpha^2 sh b_2 z = -N f_q^\kappa(z)|_{z=\pm h} = \kappa_1, \\ C_2 b_1 ch b_1 z + C_3 N ch b_2 z = -2 \frac{df_q^\kappa(z)}{dz} \Big|_{z=\pm h} = \kappa_2. \end{cases}$$

Із цієї лінійної системи двох рівнянь знаходимо невідомі C_2 і C_3 :

$$C_2 = \frac{\Delta_\kappa^2}{\Delta_\kappa}, \quad C_3 = \frac{\Delta_\kappa^3}{\Delta_\kappa},$$

де

$$\Delta_\kappa = N^2 sh b_1 h ch b_2 h - b_1 b_2 \alpha^2 ch b_1 h sh b_2 h,$$

$$\Delta_\kappa = \alpha^2 b_1 b_2 ch b_1 h sh b_2 h \left(\frac{N^2 th b_1 h}{\alpha^2 b_1 b_2 th b_2 h} - 1 \right),$$

$$\Delta_\kappa^2 = \kappa_1 N ch b_2 h - \kappa_2 \alpha^2 b_2 sh b_2 h = \alpha^2 b_2 ch b_2 h \left(\frac{\kappa_1 N}{\alpha^2 b_2} - \kappa_2 th b_2 h \right),$$

$$\Delta_\kappa^3 = \kappa_2 N sh b_1 h - \kappa_1 b_1 ch b_1 h = b_1 ch b_1 h \left(\frac{\kappa_2 N th b_1 h}{b_1 ch b_1 h} - \kappa_1 \right),$$

Тепер розв'язок лінійної неоднорідної системи звичайних диференціальних рівнянь у випадку згинальних коливань шару щодо невідомих функцій f^κ і χ^κ подаємо у такому вигляді:

$$f^\kappa = \frac{\Delta_\kappa^2}{\Delta_\kappa sh b_1 z} - \frac{\varepsilon^*(1 + \nu)}{16\pi(1 - \nu)} \left[\frac{e^{-b_1|z-z_0|}}{b_1} - \frac{e^{-b_1|z+z_0|}}{b_1} \right],$$

$$\chi^\kappa = \frac{\Delta_\kappa^3}{\Delta_\kappa ch b_2 z}.$$

Розглянемо для цього випадку частотне рівняння

$$\Delta_\kappa = \alpha^2 b_1 b_2 ch b_1 h sh b_2 h \left(\frac{N^2 th b_1 h}{\alpha^2 b_1 b_2 th b_2 h} - 1 \right) = 0. \quad (17)$$

Звідси отримуємо

$$\Delta'_\kappa = \frac{\partial}{\partial p} \Delta_\kappa = \frac{\partial}{\partial p} (N^2 sh b_1 h ch b_2 h - b_1 b_2 \alpha^2 ch b_1 h sh b_2 h)$$

$$\begin{aligned}
&= 2N \frac{p}{S_2^2} shb_1 hchb_2 h + \frac{N^2 hp}{S_2^2 b_2} shb_2 hshb_1 h + \frac{N^2 hp}{S_1^2 b_1} chb_1 chb_2 h - \frac{b_2 p}{S_1^2 b_1} \alpha^2 chb_1 hshb_2 h \\
&\quad - \frac{b_1 p}{S_2^2 b_2} \alpha^2 chb_1 hshb_2 h - \alpha^2 \frac{b_2 hp}{S_1^2} shb_1 hchb_2 h - b_1 \alpha^2 \frac{hp}{S_2^2} chb_2 hchb_1 h \neq 0.
\end{aligned}$$

Частотне рівняння згинальних коливань шару (17) можна записати ще таким чином:

$$\frac{\operatorname{th}\left(\alpha h \sqrt{1 + \frac{S^2}{S_1^2}}\right)}{\operatorname{th}\left(\alpha h \sqrt{1 + \frac{S^2}{S_2^2}}\right)} = \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{S^2}{S_1^2}\right)\left(1 + \frac{S^2}{S_2^2}\right)}}{\left(1 + \frac{S^2}{2S_2^2}\right)^2}, \quad (18)$$

де $b_1 = 0$, $\sqrt{1 + \frac{S^2}{S_1^2}} = 0$.

Знаходження коренів p_m^κ першого рівняння (18) у явному вигляді не можливе. Воно розв'язується лише чисельно.

Друге рівняння $b_1 = 0$, як і в симетричному випадку, легко можна звести до рівняння вигляду

$$u^\kappa(\varsigma, \sigma) + iv^\kappa(\varsigma, \sigma) = 0, \quad \text{де } p = \sigma + i\varsigma,$$

або до системи двох рівнянь із двома невідомими, σ та ς :

$$u^\kappa(\varsigma, \sigma) = 0,$$

$$v^\kappa(\varsigma, \sigma) = 0.$$

Отже, корені другого рівняння (18) знаходяться у явному вигляді

$$p_*^\kappa = \pm i\alpha S_2.$$

Введемо позначення $p_n^\kappa = p_*^\kappa, p_m^\kappa$. Корені p_n^κ є комплексно-спряженими та простими полюсами для частотного рівняння $\Delta_\kappa = 0$, оскільки $\Delta'_\kappa(p_n^\kappa) \neq 0$.

Тепер загальний розв'язок нашої задачі у зображеннях за Лапласом має такий вигляд:

$$\begin{aligned}
f(\alpha, p, z) &= f_o(\alpha, p, z) + f_u(\alpha, p, z) = \frac{\Delta_c^1}{\Delta_c} chb_1 z + \frac{\Delta_\kappa^2}{\Delta_\kappa} shb_1 z - \frac{\varepsilon^*(1 + \nu)}{8\pi(1 - \nu)} \frac{e^{-b_1|z-z_0|}}{b_1}, \\
\chi(\alpha, p, z) &= \chi^\kappa + \chi^c = \frac{\Delta_\kappa^3}{\Delta_\kappa} chb_2 z + \frac{\Delta_c^4}{\Delta_c} shb_2 z.
\end{aligned}$$

Знайдемо оригінали від зображень за Лапласом цих функцій:

$$f(\alpha, p, z) = f_o(\alpha, p, z) + f_u(\alpha, p, z), \quad \chi(\alpha, p, z),$$

де

$$f_o(\alpha, p, z) = f_o^c + f_o^\kappa, \quad f_u(\alpha, p, z) = f_u^c + f_u^\kappa,$$

та запишемо їхні шукані оригінали, тобто $f^*(\alpha, z, t)$, $\chi^*(\alpha, z, t)$, у вигляді

$$f^*(\alpha, z, t) = \Im^{-1}[f_o(\alpha, p, z) + f_u(\alpha, p, z)] = \Im^{-1}\left(\frac{\Delta_c^1}{\Delta_c} chb_1 z + \frac{\Delta_\kappa^2}{\Delta_\kappa} shb_1 z\right) + f_u^*,$$

$$\chi^*(\alpha, z, t) = \Im^{-1}[\chi(\alpha, p, z)] = \Im^{-1}\left(\frac{\Delta_\kappa^3}{\Delta_\kappa} chb_2 z + \frac{\Delta_c^4}{\Delta_c} shb_2 z\right),$$

$$\Im^{-1}[f_o(\alpha, p, z)] = \Im^{-1}\left(\frac{\Delta_c^1}{\Delta_c} chb_1 z + \frac{\Delta_\kappa^2}{\Delta_\kappa} shb_1 z\right),$$

$$f_u^* = \Im^{-1}[f_u(\alpha, p, z)] = \frac{\varepsilon^*(1+\nu)}{8\pi S_1(1-\nu)} J_0\left[\alpha S_1 \sqrt{t^2 - (z - z_0)^2}\right], \quad t > |z - z_0|,$$

де $\Im^{-1}$ — обернене перетворення Лапласа.

Остаточно отримуємо

$$\psi(r, z, t) = \int_0^\infty \alpha J_0(\alpha r) \left[\Im^{-1}\left(\frac{\Delta_c^1}{\Delta_c} chb_1 z + \frac{\Delta_\kappa^2}{\Delta_\kappa} shb_1 z\right) d\alpha + f_u^*(\alpha, z, t) \right] d\alpha,$$

$$\varphi(r, z, t) = \int_0^\infty \alpha J_0(\alpha r) \Im^{-1}\left(\frac{\Delta_\kappa^3}{\Delta_\kappa} chb_2 z + \frac{\Delta_c^4}{\Delta_c} shb_2 z\right) d\alpha,$$

де

$$f_u^*(\alpha, z, t) = \frac{\varepsilon^*(1+\nu)}{8\pi S_1(1-\nu)} J_0\left[\alpha S_1 \sqrt{t^2 - (z - z_0)^2}\right] = 0 \quad \text{при} \quad t > |z - z_0|.$$

Розглянемо, наприклад, оригінал зображення поперечних переміщень $\bar{U}_z$:

$$U_z(r, z, t) = \int_0^\infty \alpha J_0(\alpha r) \left\{ \Im^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\Delta_c^1}{\Delta_c} chb_1 z + \frac{\Delta_\kappa^2}{\Delta_\kappa} shb_1 z\right) + \alpha^2 \left(\frac{\Delta_\kappa^3}{\Delta_\kappa} chb_2 z + \frac{\Delta_c^4}{\Delta_c} shb_2 z\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z} f_u^*(\alpha, z, t) \right\} d\alpha.$$

Позначимо

$$F(p) = \frac{b_1 shb_1 z \Delta_c^1 + \alpha^2 shb_2 z \Delta_c^4}{\Delta_c} + \frac{b_1 chb_1 z \Delta_\kappa^2 + \alpha^2 chb_2 z \Delta_\kappa^3}{\Delta_\kappa}.$$

У результаті оригінал зображення поперечних переміщень $\bar{U}_z$ буде мати вигляд

$$U_z(r, z, t) = \int_0^\infty \alpha J_0(\alpha r) \left\{ \Im^{-1}[F(p)] + \frac{\partial}{\partial z} f_u^*(\alpha, z, t) \right\} d\alpha.$$

Знаходимо за формулою обернення оригінал $\beta(t)$ для зображення $F(p)$:

$$\beta(t) = \Im^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varsigma-i\infty}^{\varsigma+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \quad \text{де} \quad p = \sigma + i\varsigma.$$

Інтегральне відрахування аналітичної функції $F(p)$ щодо ізольованої особливої точки a однозначного характеру має вигляд [3]

$$\Re s[F(p), a] = \lim_{p \rightarrow a} (p - a)F(p).$$

Оскільки p_m , $m = 1, 2, 3, \dots, n$, — особливі точки (полюси) зображення $F(p)$, то оригінал цієї функції $\beta(t)$ має вигляд [3]

$$\beta(t) = \sum_{m=1}^n \Re s[e^{pt}F(p), p_m]. \quad (19)$$

Цей розклад справедливий і для випадку нескінченної множини p_m простих полюсів. У частотних рівняннях (13) і (17) $\Delta'_c(p_n^c) \neq 0$ і $\Delta'_k(p_n^k) \neq 0$, тому особливі точки p_n є простими полюсами. Крім того, корені p_n^c , p_n^k частотних рівнянь є комплексно-спряженими, тому отримуємо надалі від суми відрахувань у (19) у комплексно-спряжених простих полюсах подвоєну дійсну частину, а уявна частина при цьому сумуванні рівна нулю. Отже, у випадку комплексно-спряжених простих полюсів оригінал $F(p)$ знаходиться за формулою (19) у аналітичному вигляді, а тому й оригінал U_z від зображення $\bar{U}_z$. Аналогічно визначаємо оригінал U_r від зображення $\bar{U}_r$.

Отриманий розв'язок системи рівнянь з частинними похідними (2) визначає векторне поле переміщень у шарі необмежених розмірів, що дозволяє більш детально розкрити механізм руху пружних хвиль у цьому середовищі.

При $\varepsilon^* = 1$ розв'язок системи (2) можна розглядати як функції Гріна. Зрештою отримуємо фундаментальний розв'язок системи (2), а згідно з лінійністю нашої задачі можна також отримати розв'язок хвильової задачі для нескінченного шару, викликаной нестаціонарними навантаженнями, розподіленими по будь-якій області Γ обмеженою регулярною поверхнею [1].

Література

1. Witold Nowacki, *Teoria Sprężystości*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe (PWN), Warsaw (1970).
2. А. Ф. Улитко, *Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости*, Наук. думка, Киев (1979).
3. В. С. Мартыненко, *Операционное исчисление*, Изд-во Киев. ун-та, Киев (1968).

Одержано 10.04.23