УДК 517.9

# АСИМПТОТИКА ТРАЕКТОРИИ ИНТЕРВАЛА, СОДЕРЖАЩЕГО ПРООБРАЗ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ТОЧКИ*

**В. В. Федоренко**

*Ин-т математики НАН Украины*
*Украина, 01601, Киев, ул. Терещенковская, 3*
*e-mail: vfedor@imath.kiev.ua*

*We consider dynamical systems defined by continuous maps of an interval $I$ of the real axis into itself. We prove that if an interval $J$ in $I$ contains the preimage of a periodic point of period $p$ of a map $f \in C^0(I,I)$, then a sequence of the intervals $f^{2pn}(J)$, $n = 0,1,2,\dots$, is convergent.*

*Розглядаються динамічні системи, що породжені неперервними відображеннями інтервалу $I$ дійсної прямої в себе. Доведено, що якщо інтервал $J$ з $I$ містить прообраз періодичної точки періоду $p$ відображення $f \in C^0(I,I)$, то послідовність інтервалів $f^{2pn}(J)$, $n = 0,1,2,\dots$, є збіжною.*

Пусть $I = [0,1]$ — интервал прямой $R^1$ и $f \in C^0(I,I)$ — непрерывное отображение интервала $I$ в себя. Пусть также $f^n = f \circ f^{n-1}$, $n = 1,2,\dots$, а $f^0$ — тождественное отображение. Ниже используются следующие обозначения: последовательность $f^n(x)$, $n = 0,1,2,\dots$, — траектория точки $x \in I$; $\operatorname{Fix} f = \{x \in I \mid f(x) = x\}$ — множество неподвижных точек; $\operatorname{Per} f = \bigcup\limits_{n\geq 0} \operatorname{Fix} f^n$ — множество периодических точек. Периодом точки $x \in \operatorname{Per} f$ называется наименьшее натуральное $p$ такое, что $x \in \operatorname{Fix} f^p$.

В работе исследуются асимптотические траектории $f^n(J)$, $n = 0,1,2,\dots$, замкнутого интервала $J \subset I$. Необходимость исследования траекторий множеств, а не отдельных точек, естественно возникает в различных задачах, в частности при исследовании асимптотического поведения решений разностных уравнений с непрерывным временем [1, 2].

В силу непрерывности $f$ каждый элемент траектории $f^n(J)$, $n = 0,1,2,\dots$, — замкнутый интервал, возможно, вырожденный, т.е. точка. Интервал $f^n(J)$ обозначим через $[a_n, b_n]$, $n = 0,1,2,\dots$. Исследование асимптотического поведения траектории интервала $J$, в частности ее сходимости, сводится к изучению предельного поведения последовательностей $a_n$ и $b_n$ при $n \to \infty$.

**Определение.** *Траекторию $f^n(J) = [a_n, b_n]$, $n = 0,1,2,\dots$, интервала $J$ будем называть сходящейся, если каждая из последовательностей $a_n$, $n = 0,1,2,\dots$, и $b_n$, $n = 0,1,2,\dots$, является сходящейся при $n \to \infty$.*

Известно [3, 4], что из сходимости траектории любой точки из $I$ (т. е. из того, что любое $\omega$-предельное множество — неподвижная точка) следует сходимость траектории любого интервала из $I$. Однако если траектория любого интервала сходится, то отсюда не следует сходимость траектории любой точки (примером такого отображения может служить так называемое тент-отображение). Если отображение имеет траектории интервалов, которые не являются сходящимися, то естественно выяснить условия на интервал,

* Поддержана Научной програмой Национальной академии наук Украины (проект № 0107U002333).

гарантирующие сходимость его траектории. Одно из таких условий, анонсированное в [4], связано с наличием на интервале периодической точки или ее прообраза. Оно приведено ниже в теореме, доказательству которой и посвящена данная работа. Заметим, что в [5] приведено другое достаточное условие сходимости траектории интервала, связанное с наличием на интервале неустойчивой по Ляпунову точки.

**Теорема 1.** *Пусть $f \in C^0(I, I)$ и $J \subset I$ — замкнутый интервал. Если $J$ содержит прообраз периодической точки периода $p$ отображения $f$, то траектория интервала $J$ отображения $f^{2p}$ сходится.*

***Доказательство.*** Поскольку замкнутый интервал $J \subset I$ содержит прообраз периодической точки периода $p$ отображения $f$, существует $k \geq 0$ такое, что $f^k(J)$ содержит эту периодическую точку, и, следовательно, отображение $f^p$ имеет неподвижную точку на интервале $f^k(J)$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно рассмотреть случай $k = 0$ и $p = 1$, т. е. когда замкнутый интервал $J$ содержит неподвижную точку. Утверждение теоремы следует из лемм 1 и 2.

**Лемма 1.** *Если $J \subseteq f(J)$ или $J \supseteq f(J)$, то обе последовательности $a_n$ и $b_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots,$ монотонные (а следовательно, сходящиеся).*

Лемма 1 очевидна, так как из ее условия следует, что $J \subseteq f(J) \subseteq f^2(J) \subseteq \ldots \subseteq f^n(J) \ldots$ или $J \supseteq f(J) \supseteq f^2(J) \supseteq \ldots \supseteq f^n(J) \ldots.$

**Лемма 2.** *Если интервал $J$ содержит неподвижную точку, то существует $n_0 \geq 0$ такое, что при $n \geq n_0$ каждая из последовательностей $a_{2n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots,$ и $b_{2n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots,$ монотонная.*

***Доказательство.*** Пусть $\alpha \in J$ — неподвижная точка отображения $f$. Поскольку $\alpha \in f^n(J)$ при каждом $n \geq 0$, то $a_n \leq \alpha \leq b_n$ при $n = 0, 1, 2, \ldots.$

Если $J \subseteq f(J)$ или $J \supseteq f(J)$, то согласно лемме 1 обе последовательности $a_n$ и $b_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots,$ монотонные, а $n_0 = 0$. Если же ни одно из этих условий не выполняется, то либо $a_1 < a_0$ и $b_1 < b_0$, либо $a_0 < a_1$ и $b_0 < b_1$. Рассмотрим первый случай (второй рассматривается аналогично).

Возможны два варианта взаимного расположения точек $a_1$ и $a_2$: 1) $a_2 \leq a_1$ либо 2) $a_1 < a_2$.

Вариант 1: $a_2 \leq a_1 < a_0$ и $b_1 < b_0$. Положим $[a_n, b_n] = J_n$.

Если $b_1 \leq b_2$, то $J_1 \subseteq f(J_1)$, и, следовательно, обе последовательности $a_n$ и $b_n$, $n = 1, 2, \ldots,$ монотонные, $n_0 = 1$.

Пусть теперь $b_2 < b_1$. Если при этом $a_2 = a_1$, то $J_1 \supset f(J_1)$, и последовательности $a_n$ и $b_n, n = 1, 2, \ldots,$ монотонные, $n_0 = 1$.

И, наконец, рассмотрим случай $a_2 < a_1$ и $b_2 < b_1$. По определению $a_2 = \min\limits_{x \in [a_1, b_1]} f(x)$. Пусть точка $c_1 \in [a_1, b_1]$ такая, что $f(c_1) = a_2$. В силу того, что $a_2 < a_1 < a_0$, $b_2 < b_1 < b_0$ и $a_1 = \min\limits_{x \in [a_0, b_0]} f(x)$, получаем $c_1 \in [a_1, a_0] \subset [a_2, b_2]$. Поэтому $a_3 = \min\limits_{x \in [a_2, b_2]} f(x) \leq f(c_1) = a_2$, т. е. последовательность $a_n$, $n = 0, 1, 2, 3,$ невозрастающая.

Итак, $a_3 \leq a_2$ и $b_2 < b_1$. Рассуждения, изложенные выше для точек $a_2 \leq a_1$ и $b_1 < b_0$, справедливы и для точек $a_3 \leq a_2$ и $b_2 < b_1$ и т. д.

Повторяя эти рассуждения, получаем существование $n'$ такого, что последовательности $a_n$ и $b_n$, $n = n', n' + 1, n' + 2, \ldots,$ монотонные.

Рассмотрим теперь вариант 2: $a_1 < a_2$ и $b_1 < b_0$. Возможны два случая: 2.1) $a_0 < a_2$ и 2.2) $a_2 \leq a_0$.

В случае 2.1 имеем $a_1 < a_0 < a_2 \leq \alpha \leq b_1 < b_0$. Если $b_2 \leq b_0$, то $f^2 J_0 \subseteq J_0$, и в силу леммы 1 утверждение леммы 2 справедливо. Пусть теперь $b_0 < b_2$. Тогда существует $c_2 \in [b_1, b_0] \subset [a_2, b_2]$ такая, что $f(c_2) = a_1$. Отсюда $a_3 \leq a_1$. При этом если $b_1 \leq b_3$, то $f^2 J_1 \supseteq J_1$. Рассмотрим теперь случай $b_3 < b_1$. В этом случае существует $c_3 \in [a_1, a_0] \subset \subset [a_3, b_3]$ такая, что $f(c_3) = b_2$. Поэтому $b_2 \leq b_4$. Если $a_4 \leq a_2$, то $f^2 J_2 \subseteq J_2 \subseteq \ldots$. Продолжая эти рассуждения, получаем, что при любом $k$ либо $f^2 J_k \subseteq J_k$, либо $f^2 J_k \supseteq \supseteq J_k$, либо последовательности $a_{2n}$ и $b_{2n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots, k$, монотонные. Следовательно, в случае 2.1 лемма 2 также справедлива.

Рассмотрим теперь случай 2.2, а именно, взаимное расположение концов интервалов $J_n$, $n = 0, 1, 2$, следующее: $a_1 < a_2 \leq a_0 \leq \alpha \leq b_1 < b_0$. Если $b_0 \leq b_2$, то $f^2 J_0 \supseteq J_0$; если $b_2 \leq b_1$, то $f J_1 \subseteq J_1$. В этих случаях лемма 2 следует из леммы 1. Рассмотрим теперь случай $b_1 < b_2 < b_0$. В силу того, что $a_n$ и $b_n$ — минимальное и максимальное значения функции $f$ на интервале $J_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$, и рассматриваемого взаимного расположения концов интервалов $J_n$, $n = 0, 1, 2$, получаем $f[a_1, b_0] \subset [a_1, b_2]$. Отсюда следует, что $b_n \leq b_2$ при любом $n = 3, 4, \ldots$. Если $a_3 \geq a_2$, то $f(J_2) \subseteq J_2$, и лемма 2 в этом случае справедлива. Пусть теперь $a_3 < a_2$. Если $b_3 \leq b_1$, то $f^2(J_1) \subseteq J_1$, следовательно, лемма 2 справедлива и этом случае. Рассмотрим теперь случай $b_1 < b_3 < b_2$. Поскольку $a_n$ и $b_n$ — минимальное и максимальное значения функции $f$ на интервале $J_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$, в этом случае $f[a_3, b_2] \subset [a_3, b_2]$. Следовательно, $a_3 < a_n$ при любом $n = 4, 5, \ldots$. Поскольку $b_4 \leq b_2$, при $a_4 \geq a_2$ получаем $f^2(J_2) \subseteq J_2$, и лемма 2 справедлива. Пусть теперь $a_4 < a_2 < \ldots$. Продолжая рассуждения, получаем, что при любом $l$ либо $f^2 J_l \subseteq J_l$, либо $f^2 J_l \supseteq J_l$, либо обе последовательности $a_{2n}$ и $b_{2n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots, l$, монотонно убывающие. Поэтому в случае 2.2 лемма 2 также справедлива, что и завершает доказательство леммы 2.

В заключение приведем два примера, показывающие неулучшаемость формулировок теоремы и леммы 2.

***Пример 1.*** Необходимость наличия в теореме удвоенного периода в степени отображения.

Пусть $f(x) = -x + 1$ и $0 \leq a_0 < 1/2$. Точка $b_0 = 1/2$ — неподвижная точка, остальные — периодические точки периода 2. Поэтому траектория интервала $J = [a_0, b_0]$ отображения $f$ не является сходящейся, а траектория интервала $J$ отображения $f^2$ сходится.

***Пример 2.*** Свидетельство того, что $n_0$ в формулировке леммы 2 может быть любым сколь угодно большим числом.

Пусть $0 < \gamma < \alpha < \beta < 1$. Рассмотрим кусочно-линейное отображение

$$f(x) = \begin{cases} (1-\gamma/\alpha)x + \gamma, & 0 \leq x \leq \alpha, \\ (1-\alpha)x/(\beta-\alpha) + \alpha(\beta-1)/(\beta-\alpha), & \alpha \leq x \leq \beta, \\ (x-1)/(\beta-1), & \beta \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Прообразы точки $\beta$ на интервале $[\alpha, \beta]$ имеют координаты

$$\beta_{-n} = \alpha + \frac{(\beta-\alpha)^{n+1}}{(1-\alpha)^n}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Монотонно убывающая последовательность точек $\beta_{-n}$ при $n$, стремящемся к бесконечности, стремится к точке $\alpha$. Зафиксируем произвольное натуральное число $n_0$. Пусть $a_0$ — любая точка интервала $[0, \alpha)$ и $b_0 = \beta_{-n_0}$. Тогда последовательность левых концов интервалов $f^n J$, где $J = [a_0, b_0]$, имеет свойство $a_{n_0+3} < a_{n_0+1} < a_{n_0+2}$. Следовательно, конечная последовательность $a_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots, n_0 + 3$, не является монотонной.

1. *Шарковский А. Н. Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения. — Киев: Наук. думка, 1986. — 280 с. (перевод: *Sharkovsky A. N., Maistrenko Yu. L., Romanenko E. Yu.* Difference equations and their applications. — Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1993. — 358 p.).
2. *Sharkovsky A. N., Romanenko E. Yu.* Difference equations and dynamical systems generated by some classes of boudary value problems // Proc. Steklov Inst. Math. — 2004. — **244**. — P. 264 – 279.
3. *Федоренко В. В.* Топологический предел траекторий интервала простейших одномерных динамических систем // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 3. — С. 425 – 430.
4. *Fedorenko V. V.* Topological limit of trajectories of intervals of one-dimensional dynamical systems // Iteration Theory (ECIT'02) / Eds J. Sousa Ramos, D. Gronau, C. Mira, L. Reich, A. N. Sharkovsky (Grazer Math. Ber., Bericht Nr.). — 2004. — **346**. — P. 107 – 111.
5. *Романенко Е. Ю.* Динамика окрестностей точек при непрерывном отображении интервала // Укр. мат. журн. — 2005. — **57**, № 11. — С. 534 – 547.

*Получено 04.03.08*