

КОДУВАННЯ ПОТОКІВ З ОСОБЛИВОСТЯМИ НА МЕЖІ ДВОВИМІРНОГО ДИСКУ

Олександр Пришляк

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

вул. Володимирська, 64, Київ, 01033, Україна

e-mail: prishlyak@knu.ua, prishlyak@yahoo.com, відповідальний за листування

Сергій Стась

Інститут математики НАН України

вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна

e-mail: stasserhii380@imath.kiev.ua

We investigate topological properties, possible structures, classifications, and coding of flows on a two-dimensional disk, which have a finite number of separatrices and all singular points of the flow lie on the boundary of the disk. Trees with selected leaves are used to classify these flows. We construct the code for a flow with one singular point on the boundary. All possible structures of these flows with one singular point and at most five separatrices are described.

Досліджено топологічні властивості, можливі структури, класифікації та кодування потоків на двовимірному диску, які мають скінченне число сепаратрис і всі особливі точки потоку лежать на межі диска. Для класифікації таких потоків використано дерева з виділеними листками. Побудовано код потоку з однією особливою точкою на межі. Описано всі можливі структури таких потоків з однією особливістю та не більше ніж 5 сепаратрисами.

1. Вступ. Як відомо з теорії Морса, на замкнених многовидах для функції Морса кількість критичних точок кожного індексу задовольняє нерівності Морса. Зокрема, вона не менша кількості твірних у відповідній групі гомологій. Якщо функція має дві критичні точки, то многовид — сфера. На замкнених поверхнях існують функції з трьома критичними точками (одна з яких є виродженою). Якщо розглянемо відповідний градієнтний потік, то матимемо схожі обмеження на кількість особливих точок. Таких обмежень немає для довільного потоку. Наприклад, існує потік з однією особливою точкою, індекс обертання Пуанкаре якої дорівнює ейлеровій характеристиці многовиду [1].

Мета роботи — на двовимірному диску дослідити топологічну структуру потоків, які мають скінченне число особливих точок і всі вони лежать на межі, зокрема потоків з однією особливою точкою на межі.

Під графом ми будемо розуміти топологічний граф, тобто клітковий 1-комплекс. Використання теорії графів для класифікації динамічних систем є звичним у розмірностях 2 та 3. Наприклад, повні топологічні інваріанти, що є графами з додатковими структурами, були побудовані для потоків Морса–Смейла (градієнтною динамікою) на двовимірних

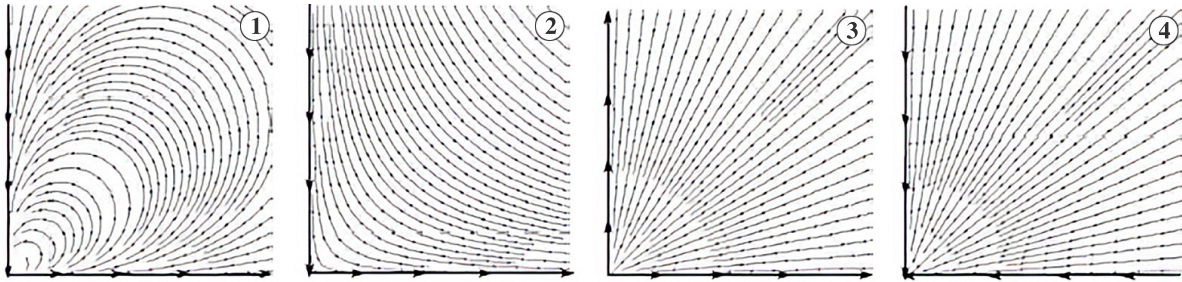


Рис. 1. Типи секторів вершин: 1) еліптичний, 2) гіперболічний, 3) джерело, 4) стік.

многовидах у [2–11] і на двовимірних многовидах з межею у [12], а для тривимірних потоків Морса–Смейла — у [13].

Структура потоків із гамільтоновою динамікою визначається структурою розбиття на шари функції, що є його гамільтоніаном. Топологічні інваріанти функцій на двовимірних орієнтованих замкнених многовидах побудовано в [14–16], а на многовидах з межею — в [17].

Ми розглядаємо гладкі потоки на двовимірному диску $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Для опису властивостей потоку зі скінченим числом особливих точок на межі 2-диска розглянемо його подвоєння — потік на двовимірній сфері, яка розбивається екватором на дві півсфери, на кожній з яких потік є прообразом потоку на 2-диску при стереографічному проектуванні півсфер на 2-диск із протилежних до півсфер полюсів із подальшим згладжуванням як у [18, 19]. Тому потік на 2-диску має властивості, схожі до потоків на сфері. Зауважимо, що потік не має замкнених траєкторій, тому що коли б такі траєкторії існували, тоді всередині їх була б особлива точка, а це суперечить тому, що всі особливі точки лежать на межі. З теорії Пуанкаре–Бендіксона випливає, що граничними точками траєкторій потоків, які ми розглядаємо, є особливі точки (граничних поліциклів не існує з тих самих міркувань, що й замкнених траєкторій).

ω -Сепаратрисою особливої точки x називається траєкторія γ така, що: 1) $\omega(\gamma) = x$, 2) для довільної точки $y \in \gamma$ і її додатної півтраєкторії γ_x^+ існує окіл U замикання γ_x^+ такий, що для довільної точки $u \in \gamma_x^+$ та її довільного околу V існує $z \in V$ така, що її додатна півтраєкторія не лежить повністю в U . α -Сепаратриси визначаються аналогічно. Вони є ω -сепаратрисами для оберненого потоку. Сепаратрисою називається траєкторія, яке є α - або ω -сепаратрисою особливої точки [20, с. 251].

Відомо ([20], Sec. 17), що сепаратриси поділяють окіл особливої точки, для якої існує хоча б одна сепаратриса, на сектори, які мають один із чотирьох типів: 1) еліптичний, 2) гіперболічний, 3) джерело, 4) стік. В околі *еліптичного* сектора потік топологічно еквівалентний до потоку, породженого векторним полем $\{x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3, x \geq 0, y \geq 0\}$, в околі *гіперболічного* сектора — до $\{x, -y\}$, $x \geq 0, y \geq 0$, в околі *джерела* — до $\{x, y\}$, $x \geq 0, y \geq 0$, а в околі *стоку* — до $\{-x, -y\}$, $x \geq 0, y \geq 0$ (див. рис. 1). Сектори джерело та стік також називають *параболічними*.

Сепаратриси ділять 2-диск на однозв'язні області, які назвемо *клітинками*. Межею клітинки є кусково-регулярна замкнена крива, тому клітинку розглядаємо як криволінійний многокутник (можливо зі склеєними вершинами), вершинами якого є особливі точки. Оскільки всередині клітинки особливих точок немає, то кожна траєкторія починається та закінчується на вершинах многокутника (особливих точках). Усі клітинки бувають двох

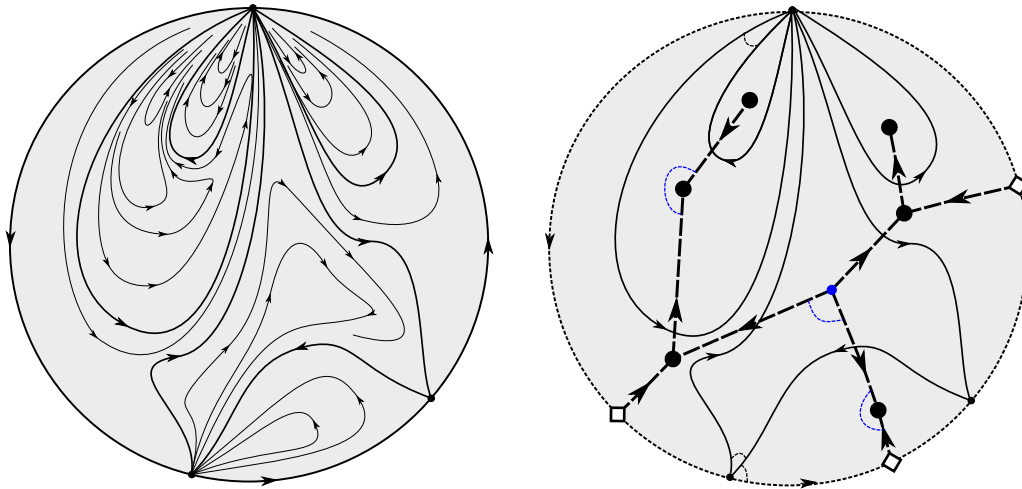


Рис. 2. Потік (ліворуч), сепаратрисна діаграма (чорна праворуч) та відрізняючий граф потоку (штрихований праворуч) із трьома виділеними листками (ребра, що починаються у квадратних вершинах).

типів: 1) один сектор — джерело, один сектор — стік, інші сектори гіперболічні (полярні); 2) один сектор еліптичний, інші гіперболічні (циклічні). В полярній клітинці (перший тип), кожна траєкторія починається та закінчується у різних точках, а в циклічній клітинці (другий тип) — в одній і тій самій точці. Межа циклічної клітинки утворює орієнтований цикл, а межа полярної клітинки складається з двох орієнтовних шляхів, що починаються в джерелі та закінчуються у стоці. Для доведення не існування інших типів клітинок слід зауважити таке: 1) кількість секторів джерел і стоків для довільної клітинки однакова (при обході межі клітинки за орієнтацією, кількість секторів в яких змінюється, орієнтація з достатньою на від'ємну дорівнює кількості секторів, у яких відбувається обернена зміна), 2) тільки для зазначених двох типів клітинок індекс обертання Пуанкаре за межею клітинки дорівнює 0, що за теоремою Пуанкаре – Хопфа дорівнює сумі індексів особливих точок у внутрішності клітинки. Деталі про ці та інші клітинки, що існують для потоків на двовимірних многовидах, можна знайти в [21, 22].

2. Основні результати. 2.1. Сепаратрисна діаграма та відрізняючий граф потоку скінченного типу. Як відомо [21, 22], потоки на двовимірній сфері можуть бути топологічно класифіковані з використанням сепаратрисної діаграми. У випадку потоків зі скінченим числом особливих точок і без замкнених траєкторій на двовимірному диску сепаратрисні діаграми складаються з графа, що вкладений на двовимірний диск, вершини графа — особливі точки, ребра — сепаратриси, а також прості траєкторії, що належать межі. Кожне ребро є орієнтовним згідно з напрямком руху за траєкторією. Крім того, серед секторів в околі особливої точки виділено еліптичні сектори. Приклад 1-потіку та його сепаратрисної діаграми показано на рис. 2. Грані сепаратрисної діаграми будемо називати *клітинками*.

Замість сепаратрисної діаграми будемо розглядати її двоїстий граф. Для цього у кожній грані (клітинці), зокрема і в зовнішній грані для 2-диска, зафіксуємо одну точку — вершину двоїстого графа. На кожному ребрі (сепаратрисі) також зафіксуємо точку, яка розбиває його на два півребра. З'єднаємо вершини двоїстого графа регулярними, трансверсальними до ребер (сепаратрис), кривими, що проходять через зафіксовані на них точках. Отже, вершинам двоїстого графа відповідають грані (клітинки), а ребрам — ребра (сепаратриси та 1-вимірні траєкторії межі) сепаратрисної діаграми. Зафіксовані точки сепаратрис ділять

ребра двоїстого графа на два півребра. Видалимо півребра, що лежать зовні 2-диска. Півребра двоїстого графа, що мають спільну точку з межею 2-диска, будемо називати виділеними листками. Отже, 1-вимірним траєкторіям сепаратрисної діаграми, що лежать на межі 2-диска, відповідають виділені листки.

Зафіксуємо орієнтацію площини, задавши напрямок руху на межі 2-диска (за замовчуванням це рух проти годинникової стрілки). Напрямок руху за сепаратрисами або траєкторіями межі визначає орієнтацію ребер двоїстого графа у такий спосіб: дотичний вектор до сепаратриси і до ребра двоїстого графа в спільній точці задає задану орієнтацію площини.

Вершину орієнтованого графа будемо називати *вузлом*, якщо всі суміжні до неї півребра направлені в неї або всі вони виходять із неї. Вузлам двоїстого графа відповідають поліцикли сепаратрисної діаграми. Наприклад, якщо всі півребра виходять із вузла, то в спільних точках двоїстого графа із сепаратрисною діаграмою всі вектори направлені зовні клітинки вузла, а тому задають узгоджені напрямки руху по сепаратрисам, а отже, поліцикл. Сектору на поліциклі відповідає сектор між ребрами двоїстого графа — протилежний сектор криволінійного чотирикутника, утвореного півребрами двоїстого графа та сепаратрисної діаграми.

Означення 1. *Відрізняючим графом потоку будемо називати плоский граф, отриманий з двоїстого графа видаленням зовнішньої вершини та інцидентних до неї півребер і наділений такою додатковою інформацією:*

- 1) *всі ребра орієнтовані;*
- 2) *серед листків графа є виділені;*
- 3) *у кожному вузлі графа виділено сектор, який можна задавати упорядкованою парою сусідніх інцидентних до вузла півребер (перше півребро відповідає сепаратрисі, що входить за межею у сектор, а друге — сепаратрисі, що виходить із нього).*

Зауважимо, що орієнтація ребер відрізняючого графа залежить від орієнтації площини. Так, зміна орієнтації площини на протилежну змінить орієнтації всіх ребер на протилежні.

Два відрізняючі графи називаються еквівалентними, якщо між ними існує ізоморфізм, що продовжується до гомеоморфізму площини, зберігає орієнтацію площини та зберігає орієнтації ребер, відображає виділені листки у виділені листки, а виділені сектори у виділені сектори.

Теорема 1. *Нехай на 2-диску задано потік, що має скінченне число особливих точок і сепаратрис, а всі особливі точки лежать на межі 2-диска. Відрізняючий граф такого потоку є деревом.*

Нагадаємо, що два потоки на поверхнях називаються топологічно траєкторно еквівалентними, якщо між поверхнями існує гомеоморфізм, який відображає траєкторії на траєкторії, зберігаючи напрямок руху за ними. При цьому, якщо зазначений гомеоморфізм зберігає орієнтації поверхонь, то такі потоки будемо називати орієнтовано топологічно еквівалентними.

Теорема 2. *Два потоки на 2-диску, що мають скінченне число особливих точок і сепаратрис, а всі особливі точки лежать на межі 2-диска, будуть орієнтовано топологічно еквівалентними тоді й тільки тоді, коли їхні відрізняючі графи будуть еквівалентними.*

Означення 2. *1-поток на 2-диску D^2 будемо називати потік, що має скінченне число сепаратрис, єдину особливу точку і ця точка лежить на межі 2-диску ∂D^2 .*

Далі будемо розглядати 1-потоки. Межа ∂D^2 містить єдину одновимірну траєкторію, напрямок руху за якою визначає орієнтацію D^2 . Двоїстий граф до сепаратрисної діаграми 1-потoku має один виділений листок. Стиснемо інцидентне до нього ребро в точку і

позначимо її як корінь. Отримаємо кореневе дерево. Для кожної вершини, відмінної від кореня, існує інцидентне ребро, що належить простому шляху від кореня до цієї вершини. Це ребро буде називатися *верхнім* ребром відповідно до даної вершини. Інші інцидентні ребра до даної вершини будуть називатися *нижніми*. Для кореня всі інцидентні ребра є нижніми. Зобразимо вкладення кореневого дерева на площину так, що вершина є верхнім кінцем для своїх нижніх ребер, та нижнім кінцем для верхнього ребра.

Отже, корінь є найвищою вершиною. Приєднання до нього зверху ребра робить це кореневе дерево деревом із виділеним листком. При цьому нижня вершина кожного ребра називається *нащадком* верхньої вершини цього ребра.

Кожне кореневе дерево має *канонічну* орієнтацію ребер, задану напрямком руху від верхнього кінця до нижнього на кожному ребрі. Зафіксуємо орієнтацію площини (двовимірного диска), що задає орієнтацію потоку на межі 2-диска. Для кожного ребра дерева розглянемо відповідну йому сепаратрису потоку. Оскільки всі траєкторії починаються та закінчуються в одній точці, то замикання сепаратриси гомеоморфне колу, що є межею області U . Тому на сепаратрисі існує дві орієнтації — одна відповідає напрямку потоку, інша породжена орієнтацією U як частиною D^2 . Якщо орієнтації збігаються, то колір ребра є чорним (1), якщо не збігаються — сірим (−1). Зокрема, якщо напрямок руху за траєкторією ∂D^2 проти годинникової стрілки, то ребро має перший (чорний) колір тоді й тільки тоді, коли загальний напрямок по відповідній сепаратрисі здійснюється проти годинникової стрілки.

Якщо для деякої вершини v всі нижні ребра мають протилежний колір до верхнього ребра, то відповідна клітинка сепаратрисної діаграми буде циклічною. Структура потоку в ній буде визначатися розташуванням еліптичного сектора. Для цього достатньо позначити сепаратрису, що входить у цей сектор. Якщо відповідне ребро дерева є нижнім для v , то поставимо мітку на ньому, а якщо верхнім — залишимо без змін.

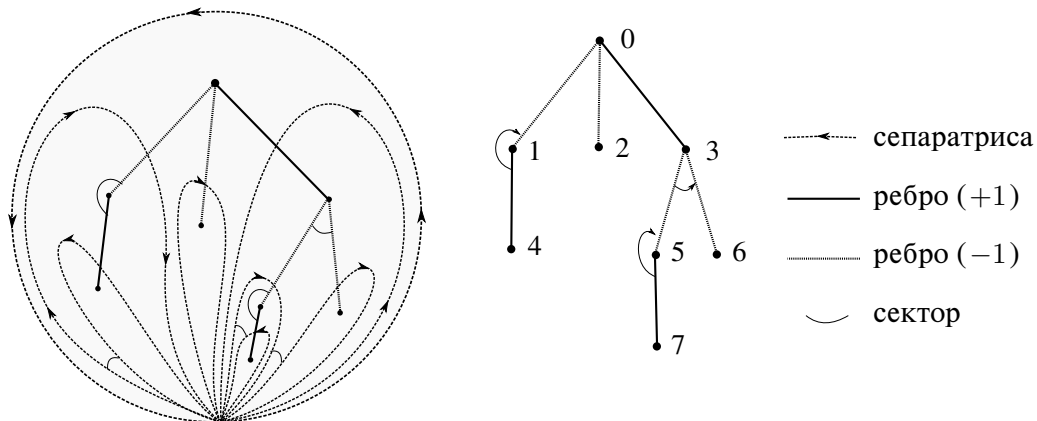
Для кожної вершини дерева розглянемо відповідну їй клітинку сепаратрисної діаграми. Вона має орієнтацію, що збігається з орієнтацією D^2 і задає напрямок обходу її межі. Тоді, починаючи рух від сепаратриси верхнього ребра, ми задамо порядок на решті сепаратрис, а це визначає порядок на множині нижніх ребер до цієї вершини дерева.

Означення 3. *Відрізняючим графом 1-потoku називається двокольорове кореневе дерево з мітками на ребрах і порядками нижніх ребер для кожної вершини. Два відрізняючі графи є еквівалентними, якщо існує їхній ізоморфізм, що зберігає кольори, мітки та порядки нижніх ребер і переводить корінь у корінь.*

З теореми 2 випливає такий наслідок.

Наслідок 1. *Два 1-потoku топологічно траєкторно еквівалентні на 2-диску тоді й тільки тоді, коли у них еквівалентні відрізняючі графи.*

2.2. Код 1-потoku. Для побудови коду використовуємо відрізняючі графи 1-потoku. Рівнем вершини будемо називати число ребер між цією вершиною та коренем. На рівні 0 існує одна вершина, корінь. Зобразимо кореневе дерево так, що корінь має ординату 0, а вершини на рівні i — ординату $-i$. Пронумеруємо спочатку вершини нульового рівня, потім першого рівня зліва направо, далі другого рівня зліва направо, потім третього рівня, поки не пронумеруємо всі вершини (див. рис. 3). Побудуємо послідовність цілих невід'ємних чисел, які дорівнюють кількості нижніх ребер (нащадків) вершин. Ребра нумеруємо згідно з номерами їхніх нижніх вершин. Якщо ребро має колір -1 , то ставимо риску зверху над відповідним числом, в іншому випадку (колір дорівнює 1) — залишаємо число без риски. Якщо нижнє ребро помічене, то поставимо штрих після відповідного числа.

Рис. 3. Сепаратрисна діаграма та розрізняючий граф потоку з кодом $3\bar{1}\bar{0}20'\bar{1}'\bar{0}0'$.

Отже, код 1-потoku є послідовністю $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ цілих чисел, деякі з яких мають або ризик, або штрих, або й ризик і штрих одночасно, тобто b_i , $0 \leq i \leq n$, є одним з чотирьох виразів: 1) a_i , 2) $\bar{a}_i$, 3) a'_i , 4) $\bar{a}'_i$, $a_i \in \mathbb{Z}$, $a_i \geq 0$. Вирази b_i будемо називати елементами коду. При цьому b_0 відповідає кореню (а також ребру на двоїстому графі до сепаратрисної діаграми, що двоїсте до траєкторії межі). Зауважимо, що b_0 не має ні штриха, ні ризику.

Приклад 1. Розглянемо потік, заданий сепаратрисною діаграмою на рис. 3.

Нехай вершини дерева v_i мають той самий індекс, що й їхній номер, показаний на рис. 3. Ребра e_i розрізняючого графа нумеруємо згідно з номерами їхніх нижніх кінців. Вершина v_0 має три нижні ребра, тому $b_0 = a_0 = 3$. З вершин v_1 і v_5 виходить по одному нижньому ребру, тому $a_1 = a_5 = 1$, з v_2, v_4, v_6, v_7 — 0 ребер ($a_2 = a_4 = a_6 = a_7 = 0$), з v_3 — 2 ребра ($a_3 = 2$). Ребра e_1, e_2, e_5, e_6 мають колір -1 , тому b_1, b_2, b_5 і b_6 мають ризики. Діаграма має три виділені (еліптичні) сектори. Сепаратрисам, що входять у них, відповідають ребра e_4, e_5 і e_7 . Всі вони є нижніми для вершин v_1, v_3 і v_5 відповідно (ці вершини визначають області на сепаратрисній діаграмі, в яких лежать відмічені сектори). Тому елементи коду b_4, b_5 і b_7 мають штрихи. Остаточно маємо, що код потоку на рис. 3 буде таким: $3\bar{1}\bar{0}20'\bar{1}'\bar{0}0'$.

Теорема 3. Два 1-потoki топологічно траєкторно еквівалентні тоді й тільки тоді, коли їхні коди однакові.

За кодом випишемо такий набір списків елементів коду: перший список складається з одного елемента $s_0 = \{b_0\}$, до другого списку входять наступні a_0 елементів коду $s_1 = \{b_1, b_2, \dots, b_{a_0}\}$, до наступного списку — наступні a_1 елементів тощо. Тут і надалі a_i — ті цілі числа, що відповідають елементу b_i при визначенні коду. Якщо якесь $a_i = 0$, то список s_i є порожнім. Елементи з s_i є нащадками для b_{i-1} , $i > 0$, а сам b_i є їхнім батьком. Елемент без ризику (з рискою) списку будемо називати *особливим*, якщо наступний після нього елемент має (не має) ризику. Останній елемент списку будемо вважати особливим, якщо його батько має ризик в тому й тільки тому випадку, коли сам цей елемент має ризик. Елемент b_0 не вважаємо особливим. Зауважимо, що особливі елементи відповідають параболічним секторам (джерелам і стокам).

Зауваження 1. Присутність ризику над першим числом залежить від орієнтації межі області. Оскільки орієнтація площини визначається орієнтацією зовнішньої траєкторії, то орієнтація межі завжди та ж сама (проти годинникової стрілки) і над першим числом немає

риски. Штрих біля першого числа також відсутній, оскільки векторне поле не визначене зовні від межі 2-диску.

Приклад 2. Для коду $3\overline{10}20'\overline{1}'\overline{0}0'$ набір списків буде таким: $s_0 = \{3\}$, $s_1 = \{\overline{10}2\}$, $s_2 = \{0'\}$, $s_3 = \{\}$, $s_4 = \{\overline{1}'\overline{0}\}$, $s_5 = \{\}$, $s_6 = \{0'\}$, $s_7 = \{\}$, $s_8 = \{\}$. В списку $s_1 = \{\overline{10}2\}$ елементи $b_2 = \overline{0}$ та $b_3 = 2$ є особливими.

Теорема 4. Код 1-потoku $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ із n сепаратрисами має такі властивості:

- 1) кількість усіх елементів коду (чисел) дорівнює $n + 1$ і $\sum_{i=0}^n a_i = n$;
- 2) перший елемент b_0 не має штриха або підкреслення;
- 3) для кожного $k \leq n$

$$\sum_{i=0}^k a_i \geq k; \quad (1)$$

4) у кожному списку може бути не більше ніж один елемент b_i зі штрихом. Якщо такий елемент є, то всі елементи списку не є особливими, тобто вони одночасно або а) не мають верхніх рисок, або б) всі вони мають верхню риску. В першому випадку їхній батько має риску, а в другому не має. Якщо в якомусь списку відсутні елементи зі штрихом, то особливих елементів у цьому списку не більше ніж 2.

Теорема 5 (теорема реалізації). Якщо задано впорядковану множину $n + 1$ чисел, деяка частина з них має риску та/або штрих і ця множина задовольняє властивості 1)–4) теореми 4, то вона є кодом деякого 1-потoku на 2-диску.

3. Доведення основних результатів.

Доведення теореми 1. Розглянемо структуру кліткового простору на D^2 , що задається особливими точками та сепаратрисами. 0-клітинками є особливі точки, прості траєкторії межі та сепаратрис є 1-клітинками, області, на які вони розбивають D^2 , є 2-клітинками. Відрізняючий граф є двоїстим графом до 1-кістяка цієї кліткової структури. Якщо у відрізняючому графі є простий цикл, то, за побудовою, він лежить усередині D^2 . Тому існує грань $F \subset D^2$ відрізняючого графа, яка лежить усередині D^2 . Цій грані відповідає 0-клітинка (що є особливою точкою) початкової кліткової структури, що лежить у внутрішності F . А це суперечить тому, що всі особливі точки лежать на межі. З того, що дві довільні точки D^2 можна з'єднати шляхом всередині D^2 , випливає, що дві вершини відрізняючого графа можна з'єднати шляхом. Отже, відрізняючий граф — дерево.

Доведення теореми 2. Необхідність випливає з побудови, тому що гомеоморфізм, який є орієнтованою топологічною еквівалентністю, породжує ізоморфізм кліткових розбиттів, двоїстих графів, а отже, й відрізняючих графів. Доведемо достатність. Ізоморфізм відрізняючих графів задає відповідність між сепаратрисами, а орієнтація ребер — напрямком руху за сепаратрисами та траєкторіями межі. Тобто можемо побудувати гомеоморфізми сепаратрис і траєкторій межі. Виділені листки задають траєкторії межі, а пари сусідніх півребер (сектори відрізняючого графа) — виділені сектори на сепаратрисній діаграмі. Звідси сепаратрисні діаграми ізоморфні, а отже, потоки є топологічно траєкторно еквівалентними [7, 21, 22]. Збереження орієнтації площини випливає з того, що ізоморфізм відрізняючих графів продовжується до гомеоморфізму площини, що зберігає орієнтацію.

Доведення наслідку 1. Оскільки орієнтація 2-диска визначається орієнтацією одновимірної траєкторії межі, то топологічна траєкторна еквівалентність 1-потoku зберігає напрямком руху за цією траєкторією, а отже, й орієнтацію 2-диска. Тому для 1-потokів вона є орієнтованою топологічною еквівалентністю.

Розрізняючий граф 1-потoku був отриманий з розрізняючого графа 1-потoku як потoku зі скінченним числом особливих точок на межі 2-диска. Покажемо як зробити обернене перетворення. По-перше, нагадаємо, що канонічна орієнтація ребер кореневого дерева задається напрямком руху від кореня. Якщо ребро має колір $(+1)$, то залишаємо її без змін, а якщо (-1) , — то змінюємо на протилежний. Таким чином, отримуємо орієнтації всіх ребер. По-друге, до кореня додаємо листок, який робимо виділеним. По-третє, якщо вершина вузол має серед нижніх ребер ребро з міткою, то воно задає перше півребро пари, яка визначає сектор. Якщо такого ребра не існує, то першим півребром є верхнє півребро. Друге півребро є сусіднім до першого і таким, що напрямок обертання від першого півребра до другого задає еліптичний сектор і протилежний (збігається з) до орієнтації D^2 , якщо нижнє ребро має колір $+1$ (-1).

Зрештою, порядок нижніх півребер, доповнений верхнім ребром, задає циклічний порядок у кожній вершині. Це визначає систему обертання, яка задає однозначне вкладення графа на площину [23]. Подальше застосування теореми 1 доводить наслідок.

Доведення теореми 3. Необхідність є наслідком того, що за вкладенням у півплощину кореневим деревом код будується однозначно.

Достатність. Нехай задано код $b_0 b_1 b_2 \dots b_n$. Позначимо через v_i вершину, що відповідає b_i , $0 \leq i \leq n$. Тоді нащадками v_i є вершини $v_{j+1}, \dots, v_{j+a_i}$, де $j = \sum_{k=1}^{i-1} a_k$.

Отже, вершина разом із кожним зі своїх нащадків утворюють пару, яка задає ребро на відрізняючому графі (нижнє ребро для цієї вершини). З рівності кодів впливає існування бієкції між вершинами (за рівністю номерів) і ребрами, яка задає ізоморфізм графів. Порядок нижніх ребер задається порядком вершин за зростанням індексів. Риси або їх відсутність визначають орієнтацію ребер, а штрихи задають виділені сектори. Тому якщо коди однакові, то відрізняючі графи еквівалентні, і згідно з теоремою 2 потоки топологічно еквівалентні.

Доведення теореми 4. 1. За означенням сума всіх чисел рівна кількості нижніх ребер. Оскільки кожне ребро є верхнім тільки для однієї вершини, ця сума рівна кількості ребер, тобто n . Кожне число відповідає вершині, тобто їхня повна кількість $n + 1$.

2. Пояснено при визначенні 1-потoku у зауваженні.

3. Оскільки кількість нащадків a_i дорівнює кількості нижніх ребер, то при $k = n$ для дерева маємо, що кількість всіх ребер $\sum_{i=0}^n a_i = n$ (на одиницю менша за число вершин $n + 1$). Така сама рівність справедлива для підграфа G^k , що містить вершини $v_0, \dots, v_k$. Але оскільки у цих вершин можуть бути нащадки, що не належать G^k , то загальне число нащадків буде більше або рівне k . Тому виконується нерівність (1).

4. Ця властивість є наслідком того, що існує два типи клітинок: циклічні та полярні. Для циклічної клітинки орієнтації ребер узгоджені з межею. У полярної клітинки є лише два параболічні сектори, яким відповідають особливі елементи списку.

Доведення теореми 5. Нехай задано код $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$, де b_i , $0 \leq i \leq n$, є одним із чотирьох виразів: 1) a_i ; 2) $\bar{a}_i$; 3) a'_i ; 4) $\bar{a}'_i$, $a_i \in \mathbb{Z}$, $a_i \geq 0$.

Зафіксуємо вершину на межі 2-диску. Побудуємо всередині диска в заданій вершині a_0 петель, що не перетинаються й не лежать одна в іншій. Петлі пронумеруємо, рухаючись межею околу вершини проти годинникової стрілки, починаючи від межі. Потім всередині першої петлі будуюмо a_1 петель, наступної — a_2 петель тощо. Знову нумеруємо побудовані петлі і всередині них будуюмо нові петлі відповідно до коду. Процес побудови петель закінчується на останньому числі коду. Встановимо орієнтацію петель залежно від наявності

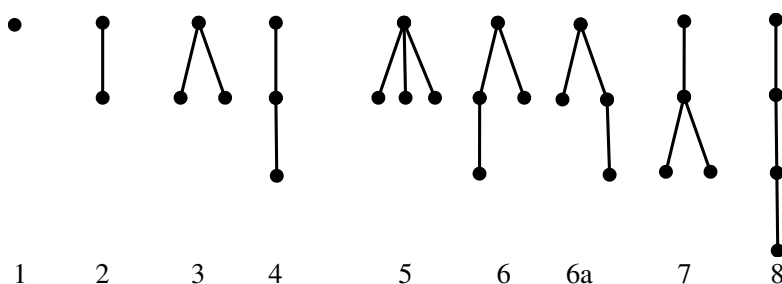


Рис. 4. Упорядковані дерева з не більш ніж 3 ребрами.

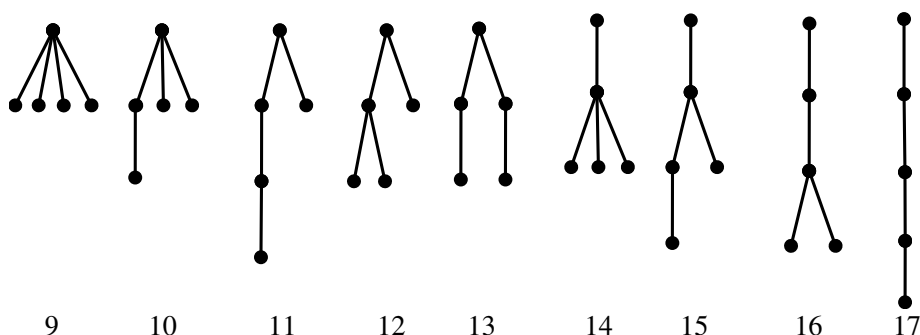


Рис. 5. Кореневі дерева з 4 ребрами.

риски. Петлі розбивають 2-диск на клітинки. Ті з них, що мають орієнтований цикл на межі, є циклічними. В циклічних клітинках ми виберемо еліптичний сектор відповідно до штриха.

Отже, отримано сепаратрисну діаграму, що задає шуканий 1-потік на 2-диску [21, 22].

4. Приклади. Всі можливі вкладені в нижню півплощину кореневі дерева з не більш ніж трьома ребрами зображено на рис. 4.

Наведемо коди для перших чотирьох дерев (1-потоків із не більш ніж 2 сепаратрисами):

- 1) 0;
- 2) 10; $1\bar{0}$, $1\bar{0}'$;
- 3) 200, $2\bar{0}\bar{0}$, $2\bar{0}\bar{0}'$, $2\bar{0}\bar{0}''$, $2\bar{0}\bar{0}'''$;
- 4) 110, $11\bar{0}$, $11\bar{0}'$, $11\bar{0}''$, $11\bar{0}'''$, $11\bar{0}''''$, $11\bar{0}'''''$, $11\bar{0}''''''$, $11\bar{0}'''''''$, $11\bar{0}''''''''$.

Усі можливі вкладені в півплощину кореневі дерева з 4 ребрами зображено на рис. 5, а з 5 ребрами — на рис. 6. Якщо всі ребра на наведених рисунках мають канонічну орієнтацію та не відмічені, то коди відповідних 1-потоків дано в другій колонці таблиць 1 і 2.

Зафіксуємо одне з корневих дерев. Для того щоб порахувати кількість топологічно нееквівалентних потоків для кожного вкладення в півплощину кореневого дерева, знайдемо кількість таких потоків у кожній клітині із заданою орієнтацією нижньої сторони. Нехай клітина має n нижніх сторін (сепаратрис). Якщо орієнтація всіх їх протилежна до орієнтації верхньої сторони, то клітина буде циклічною та кожен сектор може бути еліптичним. Отже, матимемо $n + 1$ таких потоків. Якщо орієнтація хоча б однієї нижньої сепаратриси збігається з орієнтацією верхньої сепаратриси, то ця клітина має полярний тип. Сектор джерела може бути вибраний n різними способами. При вибраному секторі джерела сектор стоку може знаходитися на будь-якій вершині на шляху від цього сектора до верхнього ребра з напрямком руху проти орієнтації межі, заданої верхнім ребром. Враховуючи також

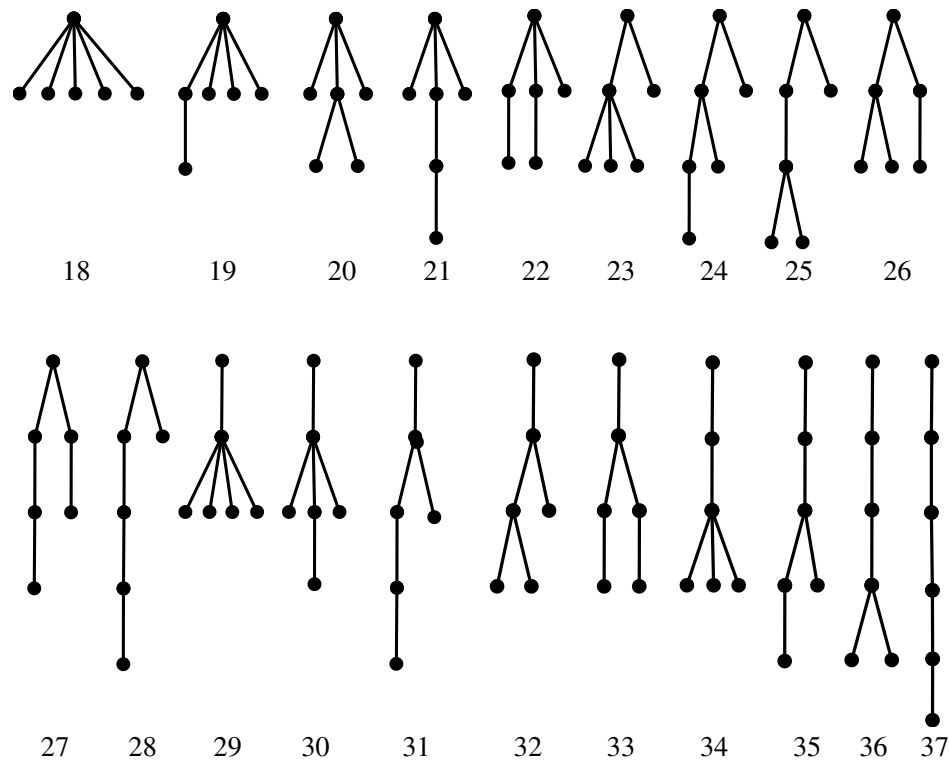


Рис. 6. Кореневі дерева з 5 ребрами.

Таблиця 1. Число структур 1-потоків з не більш ніж 4 сепаратрисами

Дерево	Код	Число потоків	Вкладення дерева	Загальне число
1	0	1	1	1
2	10	3	1	3
3	200	6	1	6
4	110	9	1	9
5	3000	10	1	10
6	2100	18	2	36
7	1200	18	1	18
8	1110	27	1	27
9	40000	15	1	15
10	30100	30	3	90
11	21010	54	2	108
12	22000	36	2	72
13	21100	54	1	54
14	13000	30	1	30
15	12100	54	2	108
16	11200	54	1	54
17	11110	81	1	81

Таблиця 2. Число структур 1-потоків з 5 сепаратрисами

Дерево	Код	Число потоків	Вкладення дерева	Загальне число
18	500000	21	1	21
19	410000	45	4	180
20	302000	60	3	180
21	301010	90	3	270
22	311000	90	3	270
23	230000	60	2	120
24	220100	108	4	432
25	210200	108	2	216
26	221000	108	2	216
27	211100	162	2	324
28	210110	162	2	324
29	140000	45	1	45
30	130100	90	3	270
31	121010	162	2	324
32	122000	108	2	216
33	121100	162	1	162
34	113000	90	1	90
35	112100	162	2	324
36	111200	162	1	162
37	111110	243	1	243

$n + 1$ конфігурацію з циклічної клітинки, одержимо, що для клітини з цією орієнтацією верхньої сепаратриси буде

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (2)$$

різних структур потоків усередині клітинки. Кожна структура в клітинці визначає орієнтацію нижньої сепаратриси. Оскільки ці сепаратриси є верхніми для клітини на нижньому рівні, то на цій новій клітині можемо прийняти, що орієнтацію верхнього ребра задано. Отже, кількість можливих потоків із заданим вкладеним графом (деревом) дорівнює добутку кількостей потоків у клітинках. І тому що кількість нижніх сепаратрис дорівнює відповідному числу коду, то за кодом можна обчислити число відповідних потоків. Для графів, зображених на рис. 4, 5 і 6, результати таких обчислень наведено у табл. 1 і 2.

На рис. 4 зображено два різні вкладення одного й того ж кореневого дерева 6 та 6а. Решта корених дерев на цьому рисунку мають по одному вкладенню. Для корених дерев з 4 та 5 сепаратрисами на рис. 5 і 6 зображено лише по одному з можливих вкладень на площину (в яких корінь — найвища вершина). Для того аби отримати всі можливі вкладення у вершинах, можна змінювати порядок нижніх до неї ребер. Наприклад, для графа 10 зміна порядку нижніх ребер у вершині v_0 приведе до трьох різних вкладень. Із інших вершин виходить менше двох нижніх ребер, тому немає можливості змінити їхній порядок. У графі 18 зміна порядку ребер не змінює графа, тому існує одне вкладення

такого графа. У графі 24 можливо по два різні порядки у вершинах v_0 і v_1 . Тому існує всього 4 різні вкладення цього графі. За аналогією знаходимо число вкладень усіх інших графів. Ці числа наведено у четвертому стовпчику таблиць 1 і 2.

Для різних вкладень графів коди мають ті ж самі елементи, що розміщені в іншому порядку. Тому число потоків для різних вкладень буде однаковим. Отже, загальне число потоків цього графа (в останньому стовпчику таблиць) дорівнює добутку чисел у третьому та четвертому стовпчиків.

Підсумовуючи відповідні числа, отримуємо такий результат.

Теорема 6. *Кількість топологічно траєкторно нееквівалентних 1-потоків на двовимірному диску без сепаратрис дорівнює 1, з однією сепаратрисою — 3, з двома — 15, з трьома — 91, з чотирма — 612, з п'ятьма — 4389.*

5. Висновок. Побудований у статті відрізняючий граф дозволяє проводити класифікацію потоків з особливими точками на межі компактної однозв'язної області площини. Код, побудований для потоків з однією особливою точкою, є ефективним інваріантом, що показано в наведених прикладах. На відміну від стандартних кодувань вкладень графів за допомогою систем обертання [23] або НСС-графів [24], застосований нами код виписується за потоком однозначно і дозволяє описувати всі можливі структури 1-потоків.

Результати роботи можуть бути застосовані для вирішення таких проблем:

- 1) топологічної класифікації потоків корозмірності 1 на двовимірному диску;
- 2) побудови топологічних інваріантів потоків з особливими точками на межі компактних поверхонь.

Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів. Усі необхідні дані містяться в статті. Всі автори зробили рівномірний внесок у цю роботу, а також заявляють про відсутність спеціального фінансування для її виконання.

Література

1. О. О. Пришляк, *Векторные поля с заданным набором особых точек*, Укр. мат. журн., **49**, № 10, 1373–1384 (1997); **English translation:** Ukr. Math. J., **49**, № 10, 1548–1558 (1997).
2. M. Brunella, M. Miari, *Topological equivalence of a plane vector field with its principal part defined through Newton Polyhedra*, J. Differential Equations, **85**, 338–366 (1990).
3. M. Cobo, C. Gutierrez, J. Llibre, *Flows without wandering points on compact connected surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **362**, 4569–4580 (2010); DOI: 10.1090/S0002-9947-10-05113-5.
4. F. Dumortier, *Singularities of vector fields on the plane*, J. Differential Equations, **23**, 53–106 (1977).
5. S. Maksymenko, *∞ -Jets of diffeomorphisms preserving orbits of vector fields*, Cent. Eur. J. Math., **7**, № 2, 272–298 (2009); <https://doi.org/10.2478/s11533-009-0010-y>.
6. S. Maksymenko, *Symmetries of degenerate center singularities of plane vector field*, Нелін. коливання, **12**, № 4, 507–526 (2009); **English translation:** Nonlinear Oscil., **12**, № 4, 522–542 (2009); DOI: <https://doi.org/10.1007/s11072-010-0092-2>.
7. A. A. Oshemkov, V. V. Sharko, *Classification of Morse–Smale flows on two-dimensional manifolds*, Sb. Math., **189**, № 8, 93–140 (1998); DOI: 10.1070/SM1998v189n08ABEH000341.
8. M. M. Peixoto, *On the classification of flows of 2-manifolds*, Dynamical Systems (Proc. Sympos., Univ. Bahia, Salvador, 1971), Academic Press, New York, London (1973), pp. 389–419.
9. A. Prishlyak, A. Prus, S. Huraka, *Flows with collective dynamics on a sphere*, Proc. Int. Geom. Cent., **14**, № 1, 61–80 (2021); DOI: <http://dx.doi.org/10.15673/tmgc.v14i1.1902>.
10. A. Prishlyak, M. Loseva, *Topology of optimal flows with collective dynamics on closed orientable surfaces*, Proc. Int. Geom. Cent., **13**, № 2, 50–67 (2020); DOI: <http://dx.doi.org/10.15673/tmgc.v13i2.1731>.

11. О. О. Пришляк, А. А. Прус, *Триколовий граф потоку Морса на компактній поверхні з межею*, Нелін. коливання, **249**, № 4, 250 – 261 (2020); **English translation:** J. Math. Sci., **249**, № 4, 661 – 672 (2020); DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s10958-020-04964-1>.
12. О. О. Пришляк, М. В. Лосева, *Оптимальні потоки Морса – Смейла з особливостями на межі поверхні*, Нелін. коливання, **21**, № 2, 231 – 237 (2018); **English translation:** J. Math. Sci., **243**, № 2, 279 – 286 (2019).
13. А. О. Пришляк, *Топологическая эквивалентность векторных полей Морса – Смейла с beh2 на трехмерных многообразиях*, Укр. мат. журн., **54**, № 4, 492 – 500 (2002); **English translation:** Ukr. Math. J., **54**, № 4, 603 – 612 (2002).
14. A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, *Integrable Hamiltonian systems*, Geometry, Topology, Classification, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL (2004).
15. А. О. Пришляк, *Сопряженность функций Морса на поверхностях со значениями на прямой и окружности*, Укр. мат. журн., **52**, № 10, 1421 – 1425 (2000); DOI: <http://dx.doi.org/10.1023/A:1010461319703>.
16. G. Reeb, *Sur les points singuliers d'une forme de pfaff compltement intgrable ou d'une fonction numrique*, C. R. Acad. Sci. Paris, **222**, 847 – 849, (1946).
17. B. I. Hladysh, A. O. Prishlyak, *Simple Morse functions on an oriented surface with boundary*, J. Math. Phys. Anal. Geom., **15**, № 3, 354 – 368 (2019); DOI: <http://dx.doi.org/10.15407/mag15.03.354>.
18. C. Gutierrez, W. de Melo, *The connected components of Morse – Smale vector fields on 2-manifolds*, Lecture Notes in Math., **597**, 230 – 251 (1977).
19. D. Neumann, *Smoothing continuous flows on 2-manifolds*, J. Differential Equations, **28**, № 3, 327 – 344 (1978); DOI: [10.1016/0022-0396\(78\)90131-6](https://doi.org/10.1016/0022-0396(78)90131-6).
20. А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер, *Качественная теория динамических систем второго порядка*, Наука, Москва (1966); **English translation:** A. A. Andronov, E. A. Leontovich, L. L. Gordon, A. G. Maier, *Qualitative theory of dynamical systems of the second order*, Halstead Press, New York, Toronto; Israel Program for Sci. Translations, Jerusalem, London (1973).
21. Е. А. Леонтович, А. Г. Майер, *О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории*, Докл. АН СССР, **14**, № 5, 251 – 254 (1937).
22. D. Neumann, T. O'Brien, *Global structure of continuous flows on 2-manifolds*, J. Differential Equations, **22**, № 1, 89 – 110 (1976); DOI: [10.1016/0022-0396\(76\)90006-1](https://doi.org/10.1016/0022-0396(76)90006-1).
23. Bojan Mohar, Carsten Thomassen. *Graphs on surfaces*, Johns Hopkins Stud. Math. Sci., Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD (2001).
24. А. О. Prishlyak, *On graphs embedded in a surface*, Russian Math. Surveys, **52**, № 4, 844 – 000 (1997); DOI: <http://dx.doi.org/10.1070/RM1997v052n04ABEH002074>.

Одержано 09.09.24,
після доопрацювання — 14.02.25