

МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦІЇ АДОМЯНА В ТЕОРІЇ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ У ВИПАДКУ ПАРАМЕТРИЧНОГО РЕЗОНАНСУ

Олександр Бойчук

*Інститут математики НАН України
вул. Терещенківська 3, Київ, 01601, Україна*

Сергій Чуйко

*Донбаський державний педагогічний університет
Слов'янськ, 84112, Донецька обл., Україна
e-mail: chujko-slav@ukr.net, відповідальний за листування*

Віктор Чуйко

*Київській національний університет імені Тараса Шевченка
вул. Володимирська, 64, Київ, Україна
e-mail: chujko-slav@ukr.net*

We obtain constructive conditions for the solvability and develop a scheme for construction of solutions of a nonlinear boundary-value problem with concentrated delay in the case of parametric resonance by using the Adomian decomposition method. The original function of the differential system with delay contains an unknown eigenfunction that ensures the solvability of the weakly nonlinear boundary-value problem. By employing the Adomian decomposition method, we derive conditions of solvability and construct a new iterative scheme to find solutions of the weakly nonlinear boundary-value problem for a system of differential equations with delay, as well as its eigenfunction in the case of parametric resonance. We obtain constructive convergence conditions for the constructed iterative scheme for the solution of the weakly nonlinear boundary-value problem as well as its eigenfunction.

Отримано конструктивні умови розв'язності та розроблено схему побудови розв'язків нелінійної крайової задачі із зосередженим запізненням у випадку параметричного резонансу з використанням методу декомпозиції Адомяна. Початкова функція диференціальної системи з запізненням містить невідому власну функцію, яка забезпечує розв'язність слабконелінійної крайової задачі. З використанням методу декомпозиції Адомяна отримано умови розв'язності та побудовано нову ітераційну техніку для знаходження розв'язків слабконелінійної крайової задачі для системи диференціальних рівнянь із запізненням, а також її власної функції у випадку параметричного резонансу. Отримано конструктивні умови збіжності побудованої ітераційної схеми до розв'язку слабконелінійної крайової задачі, а також її власної функції.

1. Постановка задачі. Досліджуємо задачу про побудову розв'язку [1, 2]

$$z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1\{[\Delta, T] \setminus \{k\Delta\}_I\},$$

$$T := (q+1)\Delta, \quad k = 1, 2, \dots, q+1, \quad z(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

нелінійної крайової задачі із зосередженим запізненням

$$z'(t, \varepsilon) = A(t)z(t, \varepsilon) + B(t)z(t - \Delta, \varepsilon) + f(t) + \varepsilon Z(z(t, \varepsilon), z(t - \Delta, \varepsilon), h(\varepsilon), t, \varepsilon), \quad (1)$$

$$\ell z(\cdot, \varepsilon) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m, \quad (2)$$

неперервного в точках $t = k\Delta$, з початковою функцією

$$z(t, \varepsilon) := \varphi(t, h_0) + \varepsilon \psi(t, h(\varepsilon), \varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \Delta],$$

залежного від власного вектора

$$h(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0], \quad h_0 := h(0)$$

крайової задачі (1), (2). Розв'язок крайової задачі (1), (2) із зосередженим запізненням шукаємо у малому околі розв'язку [1, 3]

$$z_0(t) \in \mathbb{C}^1\{[\Delta, T] \setminus \{k\Delta\}_I\}, \quad k = 1, 2, \dots, q+1,$$

породжуючої нетерової ($m \neq n$) крайової задачі

$$z'_0(t) = A(t)z_0(t) + B(t)z_0(t - \Delta) + f(t), \quad t \in [\Delta, T] \setminus \{k\Delta\}_I, \quad t \neq k\Delta, \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha, \quad (3)$$

неперервного в точках $t = k\Delta$, з початковою функцією

$$z_0(t) := \varphi(t, h_0) \in \mathbb{C}^1[0, \Delta],$$

залежного від власного вектора $h_0 \in \mathbb{R}^n$ породжуючої крайової задачі (3). У точках $t = k\Delta$, $k = 1, 2, \dots, q$, розв'язок крайової задачі (1), (2) із зосередженим запізненням, можливо, зазнає обмеженого розриву похідної [1, 3]. Тут

$$A(t), \quad B(t) \in \mathbb{C}[\Delta, T], \quad f(t) \in \mathbb{C}[\Delta, T].$$

Нелінійна вектор-функція $Z(z(t, \varepsilon), z(t - \Delta, \varepsilon), h(\varepsilon), t, \varepsilon)$ аналітична за невідомими $z(t, \varepsilon)$, $z(t - \Delta, \varepsilon)$ і $h(\varepsilon)$ у малому околі розв'язку породжуючої крайової задачі (3), функції $z_0(t - \Delta)$ та константи h_0 . Крім того, вектор-функція $Z(z(t, \varepsilon), z(t - \Delta, \varepsilon), h(\varepsilon), t, \varepsilon)$ неперервна за малим параметром ε на відрізку $[0, \varepsilon_0]$, а також неперервна за незалежною змінною t на відрізку $[\Delta, T]$. Функцію $\psi(t, h(\varepsilon), \varepsilon)$, яка визначає початкову функцію, припускаємо аналітичною за власним вектором $h(\varepsilon)$ крайової задачі (1), (2) у малому околі власного вектора $h_0 \in \mathbb{R}^n$ породжуючої крайової задачі (3) та неперервною за малим параметром ε на відрізку $[0, \varepsilon_0]$. Функцію $\varphi(t, h_0)$ припускаємо лінійною функцією вектора h_0 ,

$$\ell z(\cdot, \varepsilon) : \mathbb{C}^1\{[\Delta, T] \setminus \{k\Delta\}_I\} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

— лінійний обмежений векторний функціонал [1, 2].

Актуальність вивчення крайової задачі (1), (2) пов'язана з широким застосуванням подібних задач при вивченні неізотермічних хімічних реакцій. Приклади моделювання таких реакцій наведено в статтях [4, 5]. У статті [3] доведено існування єдиного розв'язку

$$z_0(t) = K[f(s); \varphi(s)](t) \in \mathbb{C}^1\{[\Delta, T] \setminus \{k\Delta\}_I\}, \quad k = 1, 2, \dots, q + 1,$$

породжуючої системи (3) з фіксованою початковою функцією $\varphi(t)$, а також умови розв'язності лінійної нетерової крайової задачі для породжуючої системи (3).

У статтях [6, 7] знайдено наближення до розв'язків нелінійних крайових задач, зокрема періодичних крайових задач. При побудові розв'язків нелінійних крайових задач виникає проблема неможливості знаходження розв'язків в елементарних функціях, яка до того ж зумовлює великі похибки розв'язків нелінійних крайових задач. Подібну проблему було продемонстровано для періодичної задачі для рівняння, яке визначає рух супутника на еліптичній орбіті [8].

Крім того, побудова розв'язків нелінійних крайових задач із використанням методу простих ітерацій [1] значно ускладнюється обчисленням похідних нелінійностей. У статтях [6, 7] прискорення збіжності ітераційних схем досягнуто обчисленням похідних нелінійностей на кожному кроці. Враховуючи зазначене, спрощення обчислень похідних нелінійностей і можливість знаходження розв'язків нелінійних крайових задач, зокрема періодичних крайових задач, в елементарних функціях можуть бути досягнуті з використанням методу декомпозиції Адомяна [9, 10]. Приклад такого спрощення буде наведено далі.

2. Необхідна умова. Функцію $\varphi(t, h_0)$, лінійну щодо вектора h_0 , можна подати у вигляді

$$\varphi(t, h_0) = \Phi(t) h_0, \quad \Phi(t) \in \mathbb{C}[0, \Delta].$$

Позначимо матрицю

$$Q := \ell K[0, \Phi(s)](\cdot) \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Розв'язок

$$z_0(t) = K[f(s); \varphi(s, h_0)](t)$$

породжуючої задачі (3) у критичному випадку $P_{Q^*} \neq 0$ задовольняє крайову умову (3) у випадку [3]:

$$P_{Q_d^*} \{\alpha - \ell K[f(s); 0]\}(\cdot) = 0, \quad (4)$$

при цьому породжуюча задача (3) має r -параметричну сім'ю розв'язків

$$z_0(t, c_0) = \Phi_r(t) c_0 + G[f(s); \varphi(s, h_0)](t), \quad c_0 \in \mathbb{R}^r.$$

Тут

$$\Phi_r(t) := \Phi(t) P_{Q_r}$$

— матриця, утворена з r лінійно незалежних розв'язків породжуючої задачі (3). Матриця P_{Q_r} утворена з r лінійно незалежних стовпців матриці-ортопроектора

$$P_Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}(Q).$$

Матриця $P_{Q_d^*}$ утворена з d лінійно незалежних рядків матриці-ортопроектора

$$P_{Q^*}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{N}(Q^*).$$

Крім того [3],

$$G[f(s); \varphi(s, h_0)](t) := K[f(s); \Phi(s) h_0(c_0)](t), \quad t \in [\Delta, T],$$

— узагальнений оператор Гріна породжуючої крайової задачі (3),

$$h_0(c_0) = P_{Q^+} c_0 + Q^+ \{ \alpha - \ell K[f(s); 0](\cdot) \}, \quad c_0 \in \mathbb{R}^r,$$

— власний вектор породжуючої крайової задачі (3), Q^+ — псевдообернена за Муром–Пенроузом матриця [1].

Розв’язок крайової задачі (1), (2) шукаємо у вигляді

$$z(t, \varepsilon) := z_0(t) + u_1(t, \varepsilon) + \dots + u_k(t, \varepsilon) + \dots,$$

$$h(\varepsilon) = h_0 + \xi_1(\varepsilon) + \xi_2(\varepsilon) + \dots + \xi_k(\varepsilon) + \dots$$

Нелінійна вектор-функція $Z(z(t, \varepsilon), z(t - \Delta, \varepsilon), h(\varepsilon), t, \varepsilon)$ аналітична за невідомими $z(t, \varepsilon)$, $z(t - \Delta, \varepsilon)$ і $h(\varepsilon)$ у малому околі розв’язку породжуючої крайової задачі (3), функції $z_0(t - \Delta)$ і константи h_0 , тому у зазначеному околі існує розклад [9, с. 502]

$$\begin{aligned} & Z(z(t, \varepsilon), z(t - \Delta, \varepsilon), h(\varepsilon), t, \varepsilon) \\ &= Z_0(z_0(t, c_0), z_0(t - \Delta, c_0), h_0, t) \\ &+ Z_1(z_0(t, c_0), u_1(t, \varepsilon), z_0(t - \Delta, c_0), u_1(t - \Delta, \varepsilon), h_0, \xi_1(\varepsilon), t, \varepsilon) + \dots \\ &+ Z_k(z_0(t, c_0), u_1(t, \varepsilon), \dots, u_k(t, \varepsilon), z_0(t - \Delta, c_0), u_1(t - \Delta, \varepsilon), \dots, u_k(t - \Delta, \varepsilon), \\ &h_0, \xi_1(\varepsilon), \dots, \xi_k(\varepsilon), t, \varepsilon) + \dots \end{aligned}$$

Функція $\psi(t, h(\varepsilon))$, яка визначає початкову функцію, аналітична за власним вектором $h(\varepsilon)$ крайової задачі (1), (2) у малому околі власного вектора $h_0 \in \mathbb{R}^n$ породжуючої крайової задачі (3), тому у зазначеному околі існує розклад [9, 10]

$$\begin{aligned} \psi(h(\varepsilon), t, \varepsilon) &= \psi_0(t, h_0) + \psi_1(h_0, \xi_1(\varepsilon), t, \varepsilon) \\ &+ \psi_2(h_0, \xi_1(\varepsilon), \xi_2(\varepsilon), t, \varepsilon) + \dots + \psi_k(h_0, \xi_1(\varepsilon), \dots, \xi_k(\varepsilon), t, \varepsilon) + \dots \end{aligned}$$

Перше наближення до розв’язку нелінійної періодичної крайової задачі (1), (2) у критичному випадку

$$z_1(t, \varepsilon) := z_0(t, c_0) + u_1(t, \varepsilon),$$

$$u_1(t, \varepsilon) = \Psi_r(t) c_1 + \varepsilon G[Z_0(z_0(s, c_0), z_0(s - \Delta, c_0), h_0, s); \psi_0(s, h_0)](t)$$

визначає розв’язок нелінійної періодичної крайової задачі першого наближення

$$\frac{du_1(t, \varepsilon)}{dt} = A u_1(t, \varepsilon) + \varepsilon Z_0(z_0(t, c_0), z_0(t - \Delta, c_0), h_0, t), \quad \ell u_1(\cdot, \varepsilon) = 0$$

із початковою функцією $\psi_0(h_0, t)$. Умова розв’язності крайової задачі першого наближення приводить до рівняння

$$P_{Q_d^*} \ell K[Z_0(z_0(s, c_0), z_0(s - \Delta, c_0), h_0(c_0), s); \psi_0(h_0(c_0), s)](\cdot) = 0.$$

Необхідні умови існування розв’язку задачі (1), (2) у критичному випадку визначає така лема.

Лема. Припустимо, що для крайової задачі (1), (2) із зосередженим запізненням наявний критичний випадок ($P_{Q^*} \neq 0$), до того ж виконано умову (4), а породжуюча задача (3) має r -параметричну сім'ю розв'язків

$$z_0(t, c_0) = \Psi_r(t)c_0 + G[f(s); \varphi(s, h_0(c_0))](t), \quad c_0 \in \mathbb{R}^r.$$

Припустимо також, що крайова задача (1), (2) із зосередженим запізненням в околі породжуючого розв'язку $z_0(t, c_0^*)$ має розв'язок

$$z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1\{[\Delta, T] \setminus \{k\Delta\}_I\}, \quad T := (q+1)\Delta, \quad k = 1, 2, \dots, q+1, \quad z(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0].$$

За цих умов справджується рівність

$$F_0(c_0^*) := P_{Q_d^*} \ell K \left[Z_0(z_0(s, c_0^*), z_0(s - \Delta, c_0), h_0(c_0^*), s); \psi_0(h_0(c_0^*), s) \right](\cdot) = 0. \quad (5)$$

Рівняння (5) будемо далі називати рівнянням для породжуючих констант крайової задачі (1), (2) із зосередженим запізненням у випадку параметричного резонансу. Якщо для крайової задачі (1), (2) із зосередженим запізненням наявний критичний випадок ($P_{Q^*} \neq 0$), до того ж умову (4) не виконано, то вона може бути регуляризована аналогічно [11, 12].

3. Достатня умова. Припустимо, що рівняння для породжуючих констант (5) має дійсні корені. Фіксуємо один із дійсних розв'язків

$$c_0^* \in \mathbb{R}^r, \quad h_0^* := h_0(c_0^*) \in \mathbb{R}$$

рівняння (5), приходимо до задачі про побудову розв'язку нелінійної крайової задачі (1), (2) у малому околі розв'язку

$$z_0(t, c_0^*) = \Phi_r(t)c_0^* + G[f(s); \varphi(s, h_0(c_0^*))](t), \quad c_0^* \in \mathbb{R}^r,$$

породжуючої крайової задачі. Традиційною умовою розв'язності крайової задачі (1), (2) із зосередженим запізненням у малому околі розв'язку породжуючої задачі (3) є вимога простоти коренів [1, 10]

$$P_{B_0^*} P_{Q_d^*} \neq 0, \quad B_0 := F'_{c_0}(c_0) \in \mathbb{R}^{r \times r}$$

рівняння для породжуючих констант (5); тут $P_{B_0^*}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{N}(B_0^*)$ — матриця-ортопроектор [1]. Ключова при дослідженні крайової задачі (1), (2) із зосередженим запізненням матриця B_0 набуває вигляду

$$B_0 = P_{Q_d^*} \ell K [\mathcal{A}_0(s)\Phi_r(s) + \mathcal{A}_1(s)\Phi_r(s - \Delta) + \mathcal{A}_2(s)P_{Q_r} + \mathcal{A}_3(s)P_{Q_r}](\cdot),$$

де

$$\mathcal{A}_0(t) = \frac{\partial Z(z(t, \varepsilon), z(t - \Delta, \varepsilon), h(\varepsilon), t, \varepsilon)}{\partial z(t, \varepsilon)} \bigg|_{\substack{z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_0^*), \\ z(t - \Delta, \varepsilon) = z_0(t - \Delta, c_0^*), \\ h(\varepsilon) = h_0(c_0^*), \\ \varepsilon = 0,}},$$

$$\mathcal{A}_1(t) = \frac{\partial Z(z(t, \varepsilon), z(t - \Delta, \varepsilon), h(\varepsilon), t, \varepsilon)}{\partial z(t - \Delta, \varepsilon)} \bigg|_{\substack{z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_0^*), \\ z(t - \Delta, \varepsilon) = z_0(t - \Delta, c_0^*), \\ h(\varepsilon) = h_0(c_0^*), \\ \varepsilon = 0,}},$$

$$\mathcal{A}_2(t) = \frac{\partial Z(z(t, \varepsilon), z(t - \Delta, \varepsilon), h(\varepsilon), t, \varepsilon)}{\partial h(\varepsilon)} \bigg|_{\substack{z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_0^*), \\ z(t - \Delta, \varepsilon) = z_0(t - \Delta, c_0^*), \\ h(\varepsilon) = h_0(c_0^*), \\ \varepsilon = 0,}}$$

$$\mathcal{A}_2(t) = \frac{\partial \psi(h(\varepsilon), t, \varepsilon)}{\partial h(\varepsilon)} \bigg|_{\substack{h(\varepsilon) = h_0(c_0^*), \\ \varepsilon = 0}}$$

— $(n \times n)$ -вимірні матриці. Друге наближення до розв'язку нелінійної періодичної крайової задачі (1), (2) із зосередженим запізненням у критичному випадку

$$z_2(t, \varepsilon) := z_0(t, c_0^*) + u_1(t, \varepsilon) + u_2(t, \varepsilon)$$

визначає розв'язок

$$u_2(t, \varepsilon) = \Phi_r(t) c_2 + \varepsilon G \left[Z_1 \left(z_0(s, c_0), u_1(s, \varepsilon), z_0(s - \Delta, c_0), \right. \right. \\ \left. \left. u_1(s - \Delta, \varepsilon), h_0^*, \xi_1(\varepsilon), s, \varepsilon) \right); \psi_1(h_0^*, \xi_1(\varepsilon), s, \varepsilon) \right](t), \quad c_2 \in \mathbb{R}^r,$$

нелінійної періодичної крайової задачі другого наближення

$$\frac{du_2(t, \varepsilon)}{dt} = A u_2(t, \varepsilon) + \varepsilon Z_1(z_0(t, c_0), u_1(t, \varepsilon), z_0(t - \Delta, c_0), u_1(t - \Delta, \varepsilon), h_0^*, \xi_1(\varepsilon), t, \varepsilon), \\ \ell u_2(\cdot, \varepsilon) = 0$$

з початковою функцією $\psi_1(h_0^*, \xi_1(\varepsilon), t, \varepsilon)$. Умова розв'язності крайової задачі другого наближення

$$F_1(c_1) := P_{Q_d^*} \ell K \left[Z_1 \left(z_0(s, c_0), u_1(s, \varepsilon), z_0(s - \Delta, c_0), \right. \right. \\ \left. \left. u_1(s - \Delta, \varepsilon), h_0^*, \xi_1(\varepsilon), s, \varepsilon) \right); \psi_1(h_0^*, \xi_1(\varepsilon), s, \varepsilon) \right](\cdot) = 0$$

являє собою лінійне рівняння

$$F_1(c_1) = B_0 c_1 + d_1 = 0,$$

принаймні однозначно розв'язне у випадку простоти коренів рівняння для породжуючих констант (5); тут

$$B_0 = F_1'(c_1) \in \mathbb{R}^{d \times r}, \quad d_1 := F_1(c_1) - B_0 c_1.$$

Справді, позначимо вектор-функції [13, 14]

$$v(t, \varepsilon, \mu) := z_0(t, c_0^*) + \mu u_1(t, \varepsilon) + \dots + \mu^k u_k(t, \varepsilon) + \dots, \\ g(\varepsilon, \mu) := h_0 + \mu \xi_1(\varepsilon) + \mu^2 \xi_2(\varepsilon) + \dots + \mu^k \xi_k(\varepsilon) + \dots,$$

при цьому

$$F_1(c_1) := P_{Q_d^*} \ell K \left[Z_1 \left(z_0(s, c_0), u_1(s, \varepsilon), z_0(s - \Delta, c_0), \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& u_1(s - \Delta, \varepsilon), h_0^*, \xi_1(\varepsilon), s, \varepsilon); \psi_1(h_0, \xi_1(\varepsilon), s, \varepsilon)](\cdot) \\
& = P_{Q_d^*} \ell K [Z'_\mu(v(t, \varepsilon, \mu), v(t - \Delta, \varepsilon, \mu), h(\varepsilon), t, \varepsilon); \psi'_\mu(t, g(\varepsilon, \mu), \varepsilon))(\cdot)]_{\mu=0} \\
& = P_{Q_d^*} \ell K [\mathcal{A}_0(s)u_1(s, \varepsilon) + \mathcal{A}_1(s)u_1(s - \Delta, \varepsilon); \mathcal{A}_2(s)\xi_1(\varepsilon) + \mathcal{A}_3(s)\xi_1(\varepsilon)](\cdot).
\end{aligned}$$

Отже,

$$B_0 = F'_1(c_1).$$

Таким чином, за умови простоти коренів рівняння для породжуючих констант (5) отримемо принаймні один розв'язок крайової задачі першого наближення

$$\begin{aligned}
z_1(t, \varepsilon) &:= z_0(t, c_0^*) + u_1(t, \varepsilon), \quad c_1 = -B_0^+ d_1, \\
u_1(t, \varepsilon) &= \Phi_r(t)c_1 + \varepsilon G \left[Z_0(z_0(s, c_0^*), z_0(s - \Delta, c_0^*), h_0(c_0^*), s); \psi_0(s, h_0^*) \right](t).
\end{aligned}$$

Умови розв'язності крайових задач подальших наближень

$$\begin{aligned}
F_j(c_j) &:= P_{Q_d^*} \ell K \left[Z_j(z_0(s, c_0^*), u_1(t, \varepsilon), \dots, u_j(s, \varepsilon), z_0(s - \Delta, c_0^*), u_1(s - \Delta, \varepsilon), \dots, \right. \\
& \left. u_j(s - \Delta, \varepsilon), h_0(c_0^*), \xi_1(\varepsilon), \dots, \xi_j(\varepsilon), s, \varepsilon); \psi_k(h_0(c_0^*), \xi_1(\varepsilon), \dots, \xi_j(\varepsilon), s, \varepsilon) \right](\cdot) = 0
\end{aligned}$$

являють собою лінійні рівняння

$$F_j(c_j) = B_0 c_j + d_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

де

$$B_0 = F'(c_j) \in \mathbb{R}^{d \times r}, \quad d_j := F(c_j) - B_0 c_j, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

У випадку простоти коренів рівняння (5) для породжуючих констант періодичної задачі (1), (2) останнє рівняння принаймні однозначно розв'язне. Послідовність наближень до розв'язку нелінійної періодичної крайової задачі (1), (2) у критичному випадку визначає ітераційна схема

$$\begin{aligned}
z_1(t, \varepsilon) &:= z_0(t, c_0^*) + u_1(t, \varepsilon), \quad c_1 = -B_0^+ d_1, \\
u_1(t, \varepsilon) &= \Phi_r(t)c_1 + \varepsilon G \left[Z_0(z_0(s, c_0^*), z_0(s - \Delta, c_0^*), h_0(c_0^*), s); \psi_0(s, h_0) \right](t), \\
z_{k+1}(t, \varepsilon) &:= z_0(t, c_0^*) + u_1(t, \varepsilon) + \dots + u_{k+1}(t, \varepsilon), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\
c_{k+1} &= -B_0^+ d_{k+1}, \\
u_{k+1}(t, \varepsilon) &= \Phi_r(t)c_{k+1} + \varepsilon G \left[Z_k(z_0(s, c_0^*), u_1(t, \varepsilon), \dots, u_k(s, \varepsilon), \right. \\
& \left. z_0(s - \Delta, c_0^*), u_1(s - \Delta, \varepsilon), \dots, u_k(s - \Delta, \varepsilon), h_0(c_0^*), \right. \\
& \left. \xi_1(\varepsilon), \dots, \xi_k(\varepsilon), s, \varepsilon); \psi_k(h_0(c_0^*), \xi_1(\varepsilon), \dots, \xi_k(\varepsilon), s, \varepsilon) \right](t).
\end{aligned} \tag{6}$$

Теорема. У критичному випадку ($P_{Q^*} \neq 0$) породжуюча T -періодична крайова задача (3) за умови (4) має r -параметричну сім'ю розв'язків

$$z_0(t, c_0) = \Phi_r(t)c_0 + G[f(s); \varphi(s, h_0(c_0))](t), \quad c_0 \in \mathbb{R}^r.$$

У випадку простоти коренів рівняння (5) для породжуючих констант періодичної задачі (1), (2) у малому околі породжуючого розв'язку $z_0(t, c_0^*)$ і константи $h_0(c_0^*)$ задача (1), (2) має принаймні єдиний розв'язок. Послідовність наближень до розв'язку нелінійної крайової задачі (1), (2) із зосередженням запізненням визначає ітераційна схема (6). Якщо існують константи $0 < \gamma < 1$ і $0 < \delta < 1$, для яких виконуються нерівності

$$\begin{aligned} \|u_1(t, \varepsilon)\| &\leq \gamma \|z_0(t, c_r^*)\|, & \|u_{k+1}(t, \varepsilon)\| &\leq \gamma \|u_k(t, \varepsilon)\|, \\ \|\xi_1(\varepsilon)\| &\leq \delta |h_0^*|, & |\xi_{k+1}(\varepsilon)| &\leq \delta |\xi_k(\varepsilon)|, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (7)$$

то ітераційна схема (6) збігається до розв'язку нелінійної крайової задачі (1), (2) із зосередженням запізненням.

Отримана умова збіжності ітераційної схеми (6) дозволяє оцінити проміжок значень малого параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $0 \leq \varepsilon_* \leq \varepsilon_0$, для яких зберігається збіжність ітераційної схеми (6), проте відрізняється від наведеної у [15].

Приклад. Продемонструємо ефективність доведеної теореми на прикладі задачі про знаходження 2π -періодичних розв'язків

$$z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1\{[0, T] \setminus \{\Delta\}_I\}, \quad T := 2\pi, \quad \Delta := \pi, \quad z(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0],$$

нелінійного рівняння

$$z''(t, \varepsilon) + z(t, \varepsilon) = z(t - \Delta, \varepsilon) + \varepsilon (1 - z^2(t, \varepsilon)) z'(t, \varepsilon), \quad t \in [\Delta, T], \quad (8)$$

з початковою функцією

$$\begin{aligned} z(t, \varepsilon) &:= \varphi(t, h_0) + \varepsilon \psi(t, h(\varepsilon), \varepsilon) := h_0 \cos 3t + h(\varepsilon) \sin \varepsilon, \quad t \in [0, \pi], \\ h(\varepsilon) &\in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0], \quad h(0) := h_0. \end{aligned}$$

Розв'язок періодичної задачі (8) із зосередженням запізненням шукаємо у малому околі розв'язку

$$z_0(t) \in \mathbb{C}^1\{[0, 2\pi] \setminus \{\Delta\}_I\}$$

породжуючої задачі для рівняння

$$z_0''(t) + z_0(t) = z_0(t - \Delta), \quad t \in [\Delta, 2\Delta],$$

з початковою функцією

$$z_0(t) = h_0 \cos 3t, \quad t \in [0, \pi].$$

Періодичні розв'язки нелінійного рівняння (8)

$$z(t, \varepsilon) := \begin{cases} h(\varepsilon), & t \in [0, \pi], \\ x(t, \varepsilon), & t \in [\pi, 2\pi], \end{cases}$$

будемо шукати в околі розв'язку

$$z_0(t, c_0) := \begin{cases} \varphi(t, h_0), & t \in [0, \pi], \\ x_0(t), & t \in [\pi, 2\pi], \end{cases}$$

лінійної частини цього рівняння. Для періодичної задачі для нелінійного рівняння (8) наявний критичний випадок

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P_{Q^*} = P_Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

при цьому породжуюча задача для нелінійного рівняння (8) має однопараметричну сім'ю розв'язків

$$z_0(t, c_0) = \Phi_r(t) c_0 + G[f(s); \varphi(s, h_0)](t), \quad c_0 \in \mathbb{R}^1.$$

Тут

$$\Phi_r(t) := \Phi(t) = \cos t, \quad P_{Q_d^*} = P_{Q_r^*} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix},$$

до того ж

$$G[f(s); \varphi(s, h_0)](t) = \frac{h_0}{8} (7 \cos t + \cos 3t), \quad t \in [\pi, 2\pi].$$

Для знаходження амплітуди c_0 породжуючого розв'язку та власного вектора h_0 , $h_0 \in \mathbb{R}$, породжуючої задачі отримуємо рівняння

$$F_0(h_0) = -\frac{7\pi}{2048} (-128 h_0 + 29 h_0^3) = 0.$$

Рівняння (5) для породжуючих амплітуд періодичної задачі для нелінійного рівняння (8) має єдиний простий

$$B_0 = -\frac{7\pi}{8}$$

дійсний корінь

$$c_0^* = h_0^* = 8 \sqrt{\frac{2}{29}},$$

при цьому

$$x_0(t) = \sqrt{\frac{2}{29}} (7 \cos t + \cos 3t), \quad \varphi(t, h_0) = 8 \sqrt{\frac{2}{29}} \cos 3t.$$

Використовуючи ітераційну схему (6), на першому кроці отримуємо

$$z_1(t, \varepsilon) = z_0(t, c_0^*) + u_1(t, \varepsilon), \quad t \in [\pi, 2\pi],$$

де

$$u_1(t, \varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{6\,960 \sqrt{58}} \left(-111\,360 - 57\,736 \sin t + 13\,980 \sin 3t + 2\,800 \sin 5t + 245 \sin 7t + 9 \sin 9t \right), \quad c_1 = \xi_1 = 0.$$

Використовуючи ітераційну схему (6), на другому кроці маємо

$$z_2(t, \varepsilon) = z_0(t, c_0^*) + u_1(t, \varepsilon) + u_2(t, \varepsilon), \quad t \in [\pi, 2\pi],$$

де

$$\begin{aligned} u_2(t, \varepsilon) = & \frac{\varepsilon^2 \sin t}{678\,182\,400 \sqrt{58}} \left(-37\,402\,705\,920 - 1\,624\,661\,640\pi \right. \\ & + 1\,624\,661\,640t - 34\,352\,332\,800 \cos t - 2\,922\,086\,400 \cos 3t \\ & - 128\,286\,720 \cos 5t - 2\,243\,844\,195 \sin 2t + 371\,972\,505 \sin 4t \\ & + 187\,639\,405 \sin 6t + 28\,271\,315 \sin 8t + 2\,191\,961 \sin 10t \\ & \left. + 98\,485 \sin 12t + 2\,025 \sin 14t \right), \quad c_2 = \xi_2 = 0. \end{aligned}$$

Аналогічно на третьому кроці отримуємо

$$z_3(t, \varepsilon) = z_0(t, c_0^*) + u_1(t, \varepsilon) + u_2(t, \varepsilon) + u_3(t, \varepsilon), \quad t \in [\pi, 2\pi],$$

де

$$\begin{aligned} u_3(t, \varepsilon) = & -\sqrt{\frac{2}{29}} \frac{4}{3} + \sqrt{\frac{2}{29}} \frac{564\,970\,816 \cos t}{81\,177\,525} + \frac{15\,950\,395\,737 \pi \cos t}{499\,486\,720 \sqrt{58}} \\ & - \frac{15\,950\,395\,737 t \cos t}{499\,486\,720 \sqrt{58}} + \sqrt{\frac{2}{29}} \frac{8\,508 \cos 2t}{4\,205} - \sqrt{\frac{2}{29}} \frac{36\,736 \cos 3t}{4\,205} \\ & - \frac{94\,771\,929 \pi \cos 3t}{124\,871\,680 \sqrt{58}} + \frac{94\,771\,929 t \cos 3t}{124\,871\,680 \sqrt{58}} - \sqrt{\frac{2}{29}} \frac{785\,122 \cos 4t}{189\,225} \\ & - \sqrt{\frac{2}{29}} \frac{68\,224 \cos 5t}{52\,983} - \frac{8\,381\,191 \pi \cos 5t}{74\,923\,008 \sqrt{58}} + \frac{8\,381\,191 t \cos 5t}{74\,923\,008 \sqrt{58}} \\ & - \sqrt{\frac{2}{29}} \frac{134\,952 \cos 6t}{147\,175} - \sqrt{\frac{2}{29}} \frac{2624 \cos 7t}{37\,845} - \frac{4\,512\,949 \pi \cos 7t}{749\,230\,080 \sqrt{58}} \\ & + \frac{4\,512\,949 t \cos 7t}{749\,230\,080 \sqrt{58}} - \sqrt{\frac{2}{29}} \frac{68\,744 \cos 8t}{794\,745} - \frac{4}{957} \sqrt{\frac{2}{29}} \cos 10t \\ & - \frac{414 \sqrt{\frac{2}{29}} \cos 12t}{4\,209\,205} + \frac{4\,985\,946\,418\,1217\,707 \sin t}{1\,246\,119\,469\,056\,000 \sqrt{58}} + \sqrt{\frac{2}{29}} \frac{20\,992 \pi \sin t}{4\,205} \\ & + \frac{13\,538\,847 \pi^2 \sin t}{62\,435\,840 \sqrt{58}} - \sqrt{\frac{2}{29}} \frac{20\,992 t \sin t}{4\,205} - \frac{13\,538\,847 \pi t \sin t}{31\,217\,920 \sqrt{58}} \\ & + \frac{13\,538\,847 t^2 \sin t}{62\,435\,840 \sqrt{58}} - \frac{20\,818\,143\,119 \sin 3t}{9\,989\,734\,400 \sqrt{58}} - \frac{190\,250\,571\,569 \sin 5t}{377\,611\,960\,320 \sqrt{58}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{37\,644\,390\,877 \sin 7t}{539\,445\,657\,600\sqrt{58}} + \frac{16\,197\,931\,731 \sin 9t}{699\,281\,408\,000\sqrt{58}} + \frac{5\,001\,452\,863 \sin 11t}{674\,307\,072\,000\sqrt{58}} \\
& + \frac{1\,897\,369\,253 \sin 13t}{1\,888\,059\,801\,600\sqrt{58}} + \frac{1\,137\,333 \sin 15t}{13\,985\,628\,160\sqrt{58}} + \frac{13\,496\,929 \sin 17t}{3\,236\,673\,945\,600\sqrt{58}} \\
& + \frac{65\,987 \sin 19t}{505\,730\,304\,000\sqrt{58}} + \frac{1053 \sin 21}{5\,494\,375\,392\,000\sqrt{58}}, \quad c_3 = \xi_3 = 0.
\end{aligned}$$

Відзначимо, що для будь-яких $0 < \varepsilon_0 < \gamma < 1$ на відріжку $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ виконуються нерівності (7), які свідчать про практичну збіжність отриманих наближень до розв'язку періодичної задачі для нелінійного рівняння (8) із зосередженим запізненням. Зауважимо також, що знайдені наближення задовольняють крайову умову.

Точність знайдених наближень до розв'язку періодичної задачі для нелінійного рівняння (8) визначають нев'язки

$$\Delta_k(\varepsilon) := \|z_k''(t, \varepsilon) + z_k(t, \varepsilon) - z_k(t - \Delta, \varepsilon) - \varepsilon(1 - z_k^2(t, \varepsilon))z_k'(t, \varepsilon)\|, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Зокрема,

$$\begin{aligned}
\Delta_0(0,1) &\approx 0,322\,362, & \Delta_1(0,1) &\approx 0,135\,750, \\
\Delta_2(0,1) &\approx 0,0585\,787, & \Delta_3(0,1) &\approx 0,0209\,515, \\
\Delta_0(0,01) &\approx 0,0322\,362, & \Delta_1(0,01) &\approx 0,00121\,674, \\
\Delta_2(0,01) &\approx 0,0000\,472\,672, & \Delta_3(0,01) &\approx 1,81\,790 \times 10^{-6}, \\
\Delta_0(0,001) &\approx 0,00322\,362, & \Delta_1(0,001) &\approx 0,0000\,122\,788, \\
\Delta_2(0,001) &\approx 4,61\,892 \times 10^{-8}, & \Delta_3(0,001) &\approx 1,78\,800 \times 10^{-10}.
\end{aligned}$$

На відміну від результатів Г. Адомяна для нелінійної системи з запізненням [16] ми отримали умови розв'язності та побудови розв'язків наближень до розв'язку нелінійної крайової задачі (1), (2) із зосередженим запізненням. Запропоновану у статті схему дослідження умов розв'язності та побудови розв'язків наближень до розв'язку крайової задачі (1), (2) із зосередженим запізненням можна перенести на матричні крайові задачі [17], у тому числі із зосередженим запізненням [18, 19].

Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів. Усі необхідні дані містяться в статті. Всі автори зробили рівномірний внесок у цю роботу, а також заявляють про відсутність спеціального фінансування для її виконання.

Література

1. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, 2nd ed., De Gruyter, Berlin, Boston (2016).
2. Н. В. Азбелев, Н. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина, *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений*, Наука, Москва (1991).
3. С. М. Чуйко, *Нетеровы краевые задачи с сосредоточенным запаздыванием в случае параметрического резонанса*, Материалы конференции, посвященной 95-летию со дня рождения профессора Н. В. Азбелева (Пермь, 17 – 19 мая 2017 г.), 287 – 294 (2017).

4. P. Benner, A. Seidel-Morgenstern, A. Zuyev, *Periodic switching strategies for an isoperimetric control problem with application to nonlinear chemical reactions*, Appl. Math. Modell., **69**, 287–300 (2019).
5. P. Benner, S. Chuiko, A. Zuyev, *A periodic boundary-value problem with switchings under nonlinear perturbations*, Bound. Value Probl., Article 50, 1–12 (2023).
6. О. А. Бойчук, С. М. Чуйко, *Про наближене розв'язання нелінійних крайових задач за методом Ньютона – Канторовича*, Нелін. коливання, **23**, № 2, 162–183 (2020); **English translation:** J. Math. Sci., **258**, № 5, 594–617 (2021).
7. О. А. Бойчук, С. М. Чуйко, *Про наближене розв'язання слабконелінійних крайових задач методом Ньютона – Канторовича*, Нелін. коливання, **23**, № 3, 321–331 (2020); **English translation:** J. Math. Sci., **261**, № 2, 228–240 (2022).
8. А. М. Самойленко, С. М. Чуйко, О. В. Несмелова, *Нелінійні крайові задачі, не розв'язані щодо похідної*, Укр. мат. журн., **72**, № 8, 1106–1118 (2020); **English translation:** Ukr. Math. J., **72**, № 8, 1280–1293 (2020).
9. G. Adomian, *A review of the decomposition method in applied mathematics*, J. Math. Anal. Appl., **135**, 501–544 (1988).
10. С. М. Чуйко, О. С. Чуйко, М. В. Попов, *Метод декомпозиції Адомяна у теорії нелінійних періодичних крайових задач*, Нелін. коливання, **25**, № 4, 413–425 (2022); **English translation:** J. Math. Sci., **277**, № 2, 338–351 (2023).
11. А. А. Бойчук, Л. М. Шегда, *Условия бифуркации решений вырожденных краевых задач*, Нелін. коливання, **12**, № 2, 147–154 (2009).
12. С. М. Чуйко, *О регуляризации матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи*, Укр. мат. вісн., **13**, № 1, 76–90 (2016); **English translation:** J. Math. Sci., **220**, № 5, 591–602 (2017).
13. M. Mac, C. S. Leung, T. Harko, *A brief introduction to the Adomian decomposition method*, Rom. Astron. J., **1**, № 1, 1–41 (2019).
14. Олександр Бойчук, Сергій Чуйко, Дар'я Д'яченко, *Метод декомпозиції Адомяна в теорії нелінійних автономних крайових задач*, Укр. мат. журн., **75**, № 8, 1053–1067 (2023); **English translation:** Ukr. Math. J., **75**, № 8, 1203–1218 (2023).
15. С. М. Чуйко, *Область збіжності ітераційної процедури для автономної крайової задачі*, Нелін. коливання, **9**, № 3, 416–432 (2006); **English translation:** Nonlinear Oscill. (N.Y.), **9**, № 3, 405–422 (2006).
16. G. Adomian, R. Rach, *Nonlinear stochastic differential delay equations*, J. Math. Anal. Appl., **91**, 94–101 (1983).
17. S. M. Chuiko, *Nonlinear matrix differential-algebraic boundary-value problem*, Lobachevskii J. Math., **38**(2), 236–244 (2017).
18. A. A. Boichuk, J. Diblik, D. Ya. Khusainov, M. Ruzickova, *Fredholm's boundary-value problems for differential systems with a single delay*, Nonlinear Anal., **72**, 2251–2258 (2010).
19. С. М. Чуйко, Д. В. Сисоев, *Матричні періодичні крайові задачі із зосередженим запізненням*, Нелін. коливання, **21**, № 2, 273–283 (2018); **English translation:** J. Math. Sci., **243**, № 2, 326–337 (2019).

Одержано 02.11.24