

ЗБІЖНІСТЬ МЕТОДУ РІТЦА В ЗАДАЧІ ПРО ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ТОНКОСТІННОЇ СФЕРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ЗА РІЗНИХ ГРАНИЧНИХ УМОВ ЇЇ КРІПЛЕННЯ

Юрій Троценко

Інститут математики НАН України

вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна

e-mail: trots@imath.kiev.ua

We use the Ritz method for determination of eigenforms and eigenfrequencies of nonaxially symmetric vibrations of thin-walled isotropic spherical shells. Eigenfrequencies for a sphere are calculated for different geometric parameters and boundary conditions of its attachment.

Для знаходження власних форм і частот неосесиметричних коливань тонкостінних ізотропних сферичних оболонок застосовано метод Рітца. Наведено розрахунки власних частот для сфери при різних геометричних параметрах і граничних умовах її кріплення.

Вступ. Цю роботу присвячено розробці методу Рітца для задачі про вільні коливання тонкостінної сферичної оболонки для різних граничних умов кріплення сфери. У деякому сенсі вона є продовженням [1], де розглянуто аналогічну задачу для вільного кріплення сфери, а також наведено досить великий огляд літератури, що стосується коливань сферичних оболонок (з цього приводу, за необхідності, пропонуємо читачеві звернутися до [1]). На підставі цього огляду літератури можна зробити висновок, що досі не вирішено проблеми, коли відомий параметр оболонки $r = 0$, що призводить до виродження деяких коефіцієнтів відповідних диференціальних рівнянь, які описують її коливання. При чисельному інтегруванні цих рівнянь у літературі є різні рекомендації наближеного характеру, що дозволяють обійти цю складність. Пропонуємо вважати, що в полюсі оболонки є отвір малого радіуса з відповідними граничними умовами на його контурі. Такий підхід дозволяє з певною точністю обчислювати частоти та форми коливань оболонки. У цій статті досліджено питання впливу малості отвору та можливих граничних умов на частоти коливань оболонки.

Також слід зауважити, що роботи, які містять числові результати розрахунків, мають їх лише для випадку, коли кількість хвиль у круговому напрямку оболонки $n = 2$. У цій роботі також виправлено вказаний недолік.

Розглянемо вільні неосесиметричні коливання сферичної тонкостінної оболонки. Побудову розв'язків задачі будемо здійснювати на основі методу Рітца.

1. Варіаційне формулювання задачі. Розглянемо тонкостінну пружну оболонку, серединна поверхня якої є поверхнею обертання (рис. 1). У такої оболонки лініями головних кривин будуть її меридіани і паралелі. Відповідно до цього, серединну поверхню оболонки

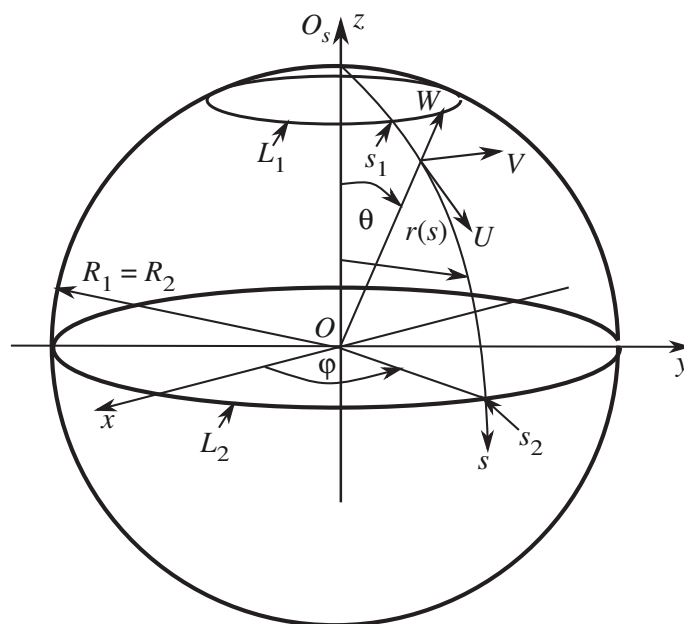


Рис. 1. Основні параметри сферичної оболонки.

віднесемо до ортогональної системи криволінійних координат s і φ , де φ — полярний кут, що відраховується від осі Ox за годинниковою стрілкою, якщо дивитися в бік зростання координати z , s — довжина дуги меридіана, яка відраховується від деякої початкової паралелі або полюса для замкненої оболонки.

Проекції переміщення точок серединної поверхні на додатні напрямки меридіана і паралелі, а також на зовнішню нормаль до поверхні оболонки позначимо через u , v і w відповідно.

Будемо вважати надалі, що переміщення настільки малі, що можна знехтувати членами другого і більш високого порядку малості порівняно з лінійними. Також вважатимемо, що для оболонки справедливі гіпотези Кірхгофа – Лява.

Рівняння рівноважного стану оболонки, що знаходиться під дією сил інерції, можна отримати з використанням будь-якого варіаційного принципу механіки. Такий підхід дозволить сформулювати варіаційну постановку задачі, яку надалі буде використано при побудові її наближеного розв'язку.

Скористаємося принципом можливих переміщень, згідно з яким

$$\delta\Pi = \delta A, \quad (1)$$

де $\delta\Pi$ — варіація потенціальної енергії пружної деформації оболонки, δA — робота сил інерції на можливих переміщеннях, яку можна подати у вигляді

$$\delta A = - \iint_{\Sigma} \rho h \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} \delta \vec{U} d\Sigma, \quad (2)$$

де Σ , ρ і h — серединна поверхня, густина матеріалу і товщина оболонки відповідно, $\vec{U}$ — вектор із компонентами u , v і w .

Варіацію потенціальної енергії деформації серединної поверхні оболонки можна представити у вигляді [2]

$$\delta\Pi = \iint_{\Sigma} (T_1\delta\varepsilon_1 + T_2\delta\varepsilon_2 + S\delta\omega + M_1\delta\kappa_1 + M_2\delta\kappa_2 + 2H\delta\tau) d\Sigma, \quad (3)$$

де

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2), & T_2 &= \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1), \\ M_1 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\kappa_1 + \nu\kappa_2), & M_2 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\kappa_2 + \nu\kappa_1), \\ S &= \frac{Eh}{2(1+\nu)}\omega, & H &= \frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\tau, \end{aligned} \quad (4)$$

E і ν — модуль пружності та коефіцієнт Пуассона матеріалу оболонки відповідно. Компоненти тензора деформацій серединної поверхні оболонки ε_1 , ε_2 , κ_1 , κ_2 , ω , τ пов'язані з компонентами вектора переміщень такими співвідношеннями [2]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R_1}, & \varepsilon_2 &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\cos \vartheta}{r} u + \frac{\sin \vartheta}{r} w, \\ \omega &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\cos \vartheta}{r} v, & \kappa_1 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u}{R_1} \right), \\ \kappa_2 &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\sin \vartheta}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\cos \vartheta}{r} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\cos \vartheta}{r} \frac{u}{R_1}, \\ \tau &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{R_1 \partial \varphi} - \frac{\cos \vartheta \sin \vartheta}{r^2} v + \frac{\cos \vartheta}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\sin \vartheta}{r} \frac{\partial v}{\partial s}, \end{aligned} \quad (5)$$

де $R_1(s)$ — радіус кривини меридіана оболонки; $\vartheta(s)$ — кут, утворений нормаллю до серединної поверхні та віссю обертання оболонки Oz , $r(s)$ — радіус кола, утвореного паралелями оболонки.

Будемо далі розглядати незамкнену оболонку обертання, обмежену контурами L_1 і L_2 , як показано на рис. 1.

Скориставшись формулами інтегрування за частинами для подвійних інтегралів, після ряду перетворень з урахуванням співвідношень (2)–(5) варіаційне рівняння (1) можна навести у вигляді

$$\begin{aligned} &\iint_{\Sigma} \left[\left(-\frac{\partial T_1}{\partial s} + \frac{\cos \vartheta}{r} (T_2 - T_1) - \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial \varphi} - \frac{1}{rR_1} \frac{\partial}{\partial s} (M_1 r) + M_2 \frac{\cos \vartheta}{rR_1} - \frac{2}{rR_1} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right) \delta u \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial S}{\partial s} - \frac{2 \cos \vartheta}{r} S - \frac{\sin \vartheta}{r^2} \frac{\partial M_2}{\partial \varphi} - 2H \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial s} (H \sin \vartheta) \right) \delta v \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{T_1}{R_1} + T_2 \frac{\sin \vartheta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial s^2} (M_1 r) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 M_2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} (M_2 \cos \vartheta) - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 H}{\partial s \partial \varphi} \right. \\
& \left. - \frac{2 \cos \vartheta}{r^2} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right) \delta w \Big] d\Sigma + \oint_{L_2} \left[\left(T_1 + \frac{M_1}{R_1} \right) \delta u + \left(S + 2H \frac{\sin \vartheta}{r} \right) \delta v \right. \\
& \left. + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} (M_1 r) - M_2 \frac{\cos \vartheta}{r} + \frac{2}{r} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right) \delta w - M_1 \frac{\partial \delta w}{\partial s} \right] dL_2 - \oint_{L_1} \left[\left(T_1 + \frac{M_1}{R_1} \right) \delta u \right. \\
& \left. + \left(S + 2H \frac{\sin \vartheta}{r} \right) \delta v + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} (M_1 r) - M_2 \frac{\cos \vartheta}{r} + \frac{2}{r} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right) \delta w - M_1 \frac{\partial \delta w}{\partial s} \right] dL_1 \\
& = - \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right) \rho h r ds d\varphi. \tag{6}
\end{aligned}$$

Враховуючи незалежність варіацій δu , δv і δw в області Σ , з варіаційного рівняння (6) отримаємо три рівняння, які описують рух оболонки під впливом її інерційних сил. Якщо в цих рівняннях перейти від зусиль до переміщень відповідно до формул (4) і (5), то отримаємо рівняння щодо переміщень u , v і w , які з огляду на їхню достатню громіздкість тут не наводимо. З рівняння (6) впливають також і граничні умови задачі. Так, у разі жорсткого кріплення краю оболонки одержимо

$$u = v = w = \frac{\partial w}{\partial s} = 0. \tag{7}$$

Відповідно на вільному краї оболонки повинні виконуватися граничні умови

$$\begin{aligned}
T_1 = 0, \quad M_1 = 0, \quad S + 2H \frac{\sin \vartheta}{r} = 0, \\
\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} (M_1 r) - M_2 \frac{\cos \vartheta}{r} + \frac{2}{r} \frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0. \tag{8}
\end{aligned}$$

В інших випадках кріплення краю оболонки використовуємо лінійні комбінації умов (7) і (8). Слід особливо відзначити, що найбільш складні силові граничні умови (8) є природними граничними умовами для відповідного функціонала, отриманого за допомогою принципу можливих переміщень. Отже, пошук його мінімуму можна здійснювати на класі функцій, що задовольняють лише кінематичні граничні умови.

2. Побудова розв'язків. Малість параметрів руху оболонки і її симетрія дозволяють загальний рух розкласти на незалежні складові в напрямку і навколо поздовжньої осі, а також у двох взаємно перпендикулярних площинах Oxz і Oyz . Надалі будемо розглядати поперечні коливання оболонки в одній із площин симетрії, за яку, зокрема, приймемо площину Oxz . У цьому випадку переміщення серединної поверхні оболонки будемо шукати у вигляді

$$\begin{aligned}
u(s, \varphi, t) &= e^{i\omega t} U_n(s) \cos n\varphi, \\
v(s, \varphi, t) &= e^{i\omega t} V_n(s) \sin n\varphi, \\
w(s, \varphi, t) &= e^{i\omega t} W_n(s) \cos n\varphi,
\end{aligned} \tag{9}$$

де n — число хвиль у круговому напрямку оболонки.

Перейдемо до безрозмірних величин, які пов'язані з відповідними розмірними величинами співвідношеннями

$$\begin{aligned}
\{U_n, V_n, W_n\} &= R_0 \{\bar{U}_n, \bar{V}_n, \bar{W}_n\}, \quad \{r, s, R_1\} = R_0 \{\bar{r}, \bar{s}, \bar{R}_1\}, \\
c^2 &= \frac{h^2}{12R_0^2}, \quad \bar{\omega}^2 = \frac{R^2 \rho (1 - \nu^2)}{E} \omega^2,
\end{aligned} \tag{10}$$

де R_0 — характерна для оболонки постійна величина, що має розмірність довжини, h — товщина оболонки.

Далі для скорочення запису риску над безрозмірними величинами будемо опускати.

Тоді варіаційне рівняння задачі про усталені вільні коливання оболонки обертання можна представити у вигляді

$$\begin{aligned}
\delta I &= \int_{s_1}^{s_2} \left[\Psi_{11}(U_n, \delta U_n) + \Psi_{12}(V_n, \delta U_n) + \Psi_{13}(W_n, \delta U_n) \right. \\
&\quad + \Psi_{12}(\delta V_n, U_n) + \Psi_{22}(V_n, \delta V_n) + \Psi_{23}(W_n, \delta V_n) \\
&\quad \left. + \Psi_{13}(\delta W_n, U_n) + \Psi_{23}(\delta W_n, V_n) + \Psi_{33}(W_n, \delta W_n) \right] r ds \\
&\quad - \omega^2 \int_{s_1}^{s_2} (U_n \delta U_n + V_n \delta V_n + W_n \delta W_n) r ds = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Введені тут диференціальні оператори $\Psi_{ij}(p, q)$, де p і q — довільні функції, у випадку застосування загальної теорії тонкостінних оболонок Новожилова [2] мають вигляд

$$\begin{aligned}
\Psi_{11}(p, q) &= \left(\frac{\cos^2 \vartheta}{r^2} + \frac{\nu_1 n^2}{r^2} + \frac{c^2 \cos^2 \vartheta}{r^2 R_1^2} + \frac{2(1 - \nu) c^2 n^2}{r^2 R_1^2} \right) pq \\
&\quad + \left(\frac{dp}{ds} + \frac{\nu \cos \vartheta}{r} p \right) \frac{dq}{ds} + \frac{\nu \cos \vartheta}{r} \left[\frac{dp}{ds} + \frac{c^2}{R_1} \frac{d}{ds} \left(\frac{p}{R_1} \right) \right] q \\
&\quad + c^2 \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{p}{R_1} \right) + \frac{\nu \cos \vartheta}{r R_1} p \right] \frac{d}{ds} \left(\frac{q}{R_1} \right), \\
\Psi_{12}(p, q) &= \frac{n \cos \vartheta}{r^2} \left(1 + \frac{c^2 \sin \vartheta}{r R_1} \right) pq + \frac{\nu n}{r} \left[\frac{dq}{ds} + \frac{c^2 \sin \vartheta}{r} \frac{d}{ds} \left(\frac{q}{R_1} \right) \right] p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\left(\frac{\nu_1 n}{r} + \frac{2(1-\nu)c^2 n \sin \vartheta}{r^2 R_1} \right) \left(\frac{\cos \vartheta}{r} p - \frac{dp}{ds} \right) \right] q, \\
\Psi_{13}(p, q) &= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu \sin \vartheta}{r} \right) p \frac{dq}{ds} \\
& + \frac{\cos \vartheta}{r} \left(\frac{\sin \vartheta}{r} + \frac{\nu}{R_1} + \frac{c^2 n^2}{r^2 R_1} \right) pq - c^2 \left(\frac{d^2 p}{ds^2} - \frac{\nu n^2}{r^2} p + \frac{\nu \cos \vartheta}{r} \frac{dp}{ds} \right) \frac{d}{ds} \left(\frac{q}{R_1} \right) \\
& - \frac{c^2 \cos \vartheta}{r R_1} \left(\frac{\cos \vartheta}{r} \frac{dp}{ds} + \nu \frac{d^2 p}{ds^2} \right) q + \frac{2(1-\nu)c^2 n^2}{r^2 R_1} \left(\frac{\cos \vartheta}{r} p - \frac{dp}{ds} \right) q, \\
\Psi_{22}(p, q) &= \frac{1}{r^2} \left(n^2 + \nu_1 \cos^2 \vartheta + \frac{c^2 n^2 \sin^2 \vartheta}{r^2} \right) pq \\
& - \frac{\nu_1 \cos \vartheta}{r} \left(\frac{dp}{ds} q + p \frac{dq}{ds} \right) \\
& + \nu_1 \frac{dp}{ds} \frac{dq}{ds} + \frac{2(1-\nu)c^2 \sin^2 \vartheta}{r^2} \left[\left(\frac{\cos \vartheta}{r} q - \frac{dq}{ds} \right) \left(\frac{\cos \vartheta}{r} p - \frac{dp}{ds} \right) \right], \\
\Psi_{23}(p, q) &= \left(\frac{n \sin \vartheta}{r^2} + \frac{\nu n}{r R_1} + \frac{c^2 n^3 \sin \vartheta}{r^4} \right) pq - \frac{c^2 n \sin \vartheta}{r^2} \left(\nu \frac{d^2 p}{ds^2} + \frac{\cos \vartheta}{r} \frac{dp}{ds} \right) q \\
& + 2(1-\nu)c^2 \left[\frac{n \sin \vartheta}{r^2} \left(\frac{dp}{ds} - \frac{\cos \vartheta}{r} p \right) \left(\frac{dq}{ds} - \frac{\cos \vartheta}{r} q \right) \right], \\
\Psi_{33}(p, q) &= c^2 \left[\frac{d^2 p}{ds^2} \frac{d^2 q}{ds^2} + \frac{\nu \cos \vartheta}{r} \left(\frac{d^2 p}{ds^2} \frac{dq}{ds} + \frac{d^2 q}{ds^2} \frac{dp}{ds} \right) - \frac{\nu n^2}{r^2} \left(\frac{d^2 p}{ds^2} q + \frac{d^2 q}{ds^2} p \right) \right. \\
& + \left. \frac{\cos^2 \vartheta + 2(1-\nu)n^2}{r^2} \frac{dp}{ds} \frac{dq}{ds} - \frac{n^2 \cos \vartheta (3-2\nu)}{r^3} \left(\frac{dq}{ds} p + \frac{dp}{ds} q \right) \right] \\
& + \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} + \frac{2\nu \sin \vartheta}{r R_1} + \frac{c^2 n^4 + 2(1-\nu)c^2 n^2 \cos^2 \vartheta}{r^4} \right) pq,
\end{aligned}$$

де $\nu_1 = (1-\nu)/2$.

У разі застосування технічної теорії оболонок Власова [3] замість наведених вище формул слід скористатися такими виразами для $\Psi_{ij}(p, q)$:

$$\begin{aligned}
\Psi_{11}(p, q) &= \left(\frac{\cos^2 \vartheta}{r^2} + \frac{\nu_1 n^2}{r^2} \right) pq \\
& + \left(\frac{dp}{ds} + \frac{\nu \cos \vartheta}{r} p \right) \frac{dq}{ds} + \frac{\nu \cos \vartheta}{r} \frac{dp}{ds} q,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{12}(p, q) &= \left(\frac{n \cos \vartheta}{r^2} + \frac{\nu_1 n \cos \vartheta}{r^2} \right) pq + \frac{\nu n}{r} p \frac{dq}{ds} - \frac{\nu_1 n}{r} q \frac{dp}{ds}, \\ \Psi_{13}(p, q) &= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu \sin \vartheta}{r} \right) p \frac{dq}{ds} + \left(\frac{\cos \vartheta \sin \vartheta}{r^2} + \frac{\nu \cos \vartheta}{r R_1} \right) pq, \\ \Psi_{22}(p, q) &= \left(\frac{n^2}{r^2} + \frac{\nu_1 \cos^2 \vartheta}{r^2} \right) pq + \left(\nu_1 \frac{dp}{ds} - \frac{\nu_1 \cos \vartheta}{r} p \right) \frac{dq}{ds} - \frac{\nu_1 \cos \vartheta}{r} \frac{dp}{ds} q, \\ \Psi_{23}(p, q) &= \left(\frac{n \sin \vartheta}{r^2} + \frac{\nu n}{r R_1} \right) pq,\end{aligned}$$

Вираз для $\Psi_{33}(p, q)$ залишається без змін.

Розв'язки, що задовольняють рівняння (11), повинні бути підпорядковані певним граничним умовам. Далі розглянемо ряд можливих варіантів граничних умов:

а) шарнірний, вільний у нормальному напрямку торець

$$U_n(s) = V_n(s) = \big|_{s=s_1, s_2} = 0;$$

б) шарнірний, нерухомий у нормальному напрямку торець

$$U_n(s) = V_n(s) = W_n(s) = \big|_{s=s_1, s_2} = 0;$$

в) абсолютно жорстко закріплений торець

$$U_n(s) = V_n(s) = W_n(s) = \frac{dW_n(s)}{ds} \bigg|_{s=s_1, s_2} = 0. \quad (12)$$

Наведені варіанти граничних умов аж ніяк не вичерпують усіх можливостей. Залежно від властивостей опор, на яких оболонка розташована, граничні умови можуть бути досить різноманітні.

Пошук мінімуму функціонала, варіація якого представлена у вигляді (11), на класі функцій, що задовольняють кінематичні граничні умови, будемо здійснювати за допомогою методу Рітца, згідно з яким компоненти переміщень оболонки подамо у вигляді скінченних рядів вигляду

$$U_n(s) = \sum_{j=1}^N a_j u_j(s), \quad V_n(s) = \sum_{j=1}^N b_j v_j(s), \quad W_n(s) = \sum_{j=1}^N c_j w_j(s), \quad (13)$$

де a_j , b_j і c_j — сталі, які слід визначити.

Для задоволення граничних умов (12) координатні функції $u_j(s)$, $v_j(s)$ і $w_j(s)$ можна навести у вигляді

$$x = \frac{2(s - s_2)}{(s_2 - s_1)} + 1,$$

$$\begin{aligned}\text{а) } u_j(s) &= v_j(s) = (s - s_1)(s - s_2)P_j(x), \quad w_j(s) = P_j(x), \\ \text{б) } u_j(s) &= v_j(s) = w_j(s) = (s - s_1)(s - s_2)P_j(x), \\ \text{в) } u_j(s) &= v_j(s) = (s - s_1)(s - s_2)P_j(x), \quad w_j(s) = (s - s_1)^2(s - s_2)^2P_j(x), \\ j &= 1, 2, \dots, N.\end{aligned} \quad (14)$$

Тут $P_j(x)$ — зміщені на одиницю за індексом j многочлени Лежандра, обчислення яких і їхніх перших двох похідних можна проводити за допомогою рекурентних співвідношень

$$\begin{aligned} P_{j+2}(x) &= \frac{1}{j+1} [(2j+1)xP_{j+1}(x) - jP_j(x)], \\ P'_{j+2}(x) &= xP'_{j+1}(x) + (j+1)P_{j+1}(x), \\ P''_{j+2}(x) &= xP''_{j+1}(x) + (j+2)P'_{j+1}(x), \\ P_1(x) &= 1, \quad P_2(x) = x, \quad j = 1, 2, \dots, N-2. \end{aligned} \quad (15)$$

При такому представленні розклади (13) задовольняють відповідні умови кріплення торців оболонки (12) при будь-яких значеннях вектора

$$\vec{X} = [a_1, a_2, \dots, a_N, b_1, b_2, \dots, b_N, c_1, c_2, \dots, c_N].$$

При цьому забезпечено повноту і лінійну незалежність функцій, що входять у розклади (13).

Компоненти вектора $\vec{X}$ надалі визначаємо з умови стаціонарності відповідного функціонала I . При цьому вихідна задача зводиться до розв'язування однорідної алгебраїчної системи

$$(A - \omega^2 B) \vec{X}^T = 0, \quad (16)$$

де $\vec{X}^T$ — транспонований вектор $\vec{X}$, A і B — симетричні матриці порядку $3N$.

Елементи матриць A і B , розташовані на головній діагоналі і вище неї, обчислимо за формулами

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= \int_{s_1}^{s_2} \Psi_{11}(u_j, u_i) r ds, & a_{i,j+N} &= \int_{s_1}^{s_2} \Psi_{12}(v_j, u_i) r ds, \\ a_{i,j+2N} &= \int_{s_1}^{s_2} \Psi_{13}(w_j, u_i) r ds, & a_{i+N,j+N} &= \int_{s_1}^{s_2} \Psi_{22}(v_j, v_i) r ds, \\ a_{i+N,j+2N} &= \int_{s_1}^{s_2} \Psi_{23}(w_j, v_i) r ds, & a_{i+2N,j+2N} &= \int_{s_1}^{s_2} \Psi_{33}(w_j, w_i) r ds, \\ b_{i,j} &= \int_{s_1}^{s_2} u_j u_i r ds, & b_{i,j+N} &= b_{i,j+2N} = b_{i+N,j+2N} = 0, \\ b_{i+N,j+N} &= \int_{s_1}^{s_2} v_j v_i r ds, & b_{i+2N,j+2N} &= \int_{s_1}^{s_2} w_j w_i r ds. \end{aligned}$$

При виведенні цих виразів було використано представлення для варіації функціонала δI у формі (11), що забезпечило простоту їх отримання і значні зручності при програмуванні пропонованого алгоритму розв'язування цієї задачі.

3. Деякі результати розрахунків. Наведені вище формули справедливі для довільної тонкостінної оболонки обертання. Щоб перейти до сферичної оболонки, покладемо $R_0 = R_1$, $r = \sin \vartheta$ і $\vartheta = s$. Введемо до розгляду позначення $\vartheta_1 = s_1$, $\vartheta_2 = s_2$ і $\delta = R_1/h$. В усіх наведених розрахунках коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$.

У статті всі розрахунки проводилися з використанням загальної теорії тонких оболонок [2].

Для перевірки достовірності отримуваних результатів у табл. 1 наведено значення частот $c_{n,1} = \omega_{n,1}\delta\sqrt{2(1+\nu)/(1-\nu^2)}$ першої форми коливань сферичної оболонки залежно від кута ϑ_2 для граничних умов (12) (випадки б) і в)) при числі хвиль у круговому напрямку оболонки $n = 2$, отримані у цій роботі (перший рядок), а також обчислені в [4] (другий рядок). Порівняння наведених результатів вказує на їхню гарну узгодженість. Слід зазначити, що як і для випадку вільного кріплення оболонки [1], отримання результатів табл. 1 із заданою точністю не вимагає великої кількості наближень у розкладах Рітца (13).

Так, для отримання цих частот із точністю до шести значущих цифр у розкладах утримувалося лише двадцять координатних функцій. Зауважимо, що при обчисленні інтегралів для визначення коефіцієнтів матриць A і B алгебраїчної системи (16) використовувався чисельний метод Гауса, що дозволило проводити інтегрування безпосередньо від 0 до ϑ_2 , уникаючи при цьому особливості, коли $r = 0$.

Таблиця 1. Значення частот $c_{n,1}$
першої форми коливань сферичної оболонки
при $\delta = 100$, $n = 2$, $\vartheta_1 = 0^\circ$, отримані у цій статті (перший рядок),
а також обчислені в [4] (другий рядок)

ϑ_2	Граничні умови (12)	
	б)	в)
60°	156,755	157,152
	156,774	157,170
90°	145,191	145,317
	145,198	145,324
120°	132,660	132,740
	132,664	132,743
150°	123,401	123,545
	123,405	123,547

У табл. 2–7 наведено значення перших п'яти безрозмірних частот ω_i , $i = \overline{1,5}$, неосесиметричних коливань ($n = 1$) оболонки залежно від числа членів N у розкладах (13) при $\vartheta_1 = [0.1^\circ; 1^\circ; 2^\circ; 3^\circ]$, $\vartheta_2 = 180^\circ - \vartheta_1$ для двох значень параметра $\delta = [100; 1000]$ і всіх трьох варіантів граничних умов з (12). Граничні умови для ϑ_1 та ϑ_2 вважали однаковими.

Таблиця 2. Значення перших п'яти частот ω_i коливань оболонки ($n = 1$) залежно від числа членів N у розкладах (13) при $\delta = 100$, $\vartheta_2 = 180^\circ - \vartheta_1$, $U = V = 0|_{\vartheta_1, \vartheta_2}$

N	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$\vartheta_1 = 0,1^\circ$					
22	0,27403	0,33150	0,74828	0,85216	0,90969
26	0,27099	0,32817	0,74724	0,85182	0,90924
30	0,26891	0,32589	0,74652	0,85160	0,90894
34	0,26747	0,32431	0,74604	0,85144	0,90873
38	0,26645	0,32320	0,74570	0,85133	0,90858
42	0,26574	0,32242	0,74545	0,85125	0,90847
46	0,26522	0,32185	0,74528	0,85119	0,90840
50	0,26483	0,32143	0,74515	0,85115	0,90834
54	0,26454	0,32112	0,74506	0,85112	0,90830
58	0,26440	0,32101	0,74502	0,85110	0,90829
62	0,26399	0,32053	0,74488	0,85106	0,90822
$\vartheta_1 = 0,5^\circ$					
22	0,29778	0,35854	0,75709	0,85462	0,91308
26	0,29718	0,35797	0,75690	0,85456	0,91300
30	0,29687	0,35769	0,75680	0,85453	0,91297
34	0,29671	0,35754	0,75675	0,85451	0,91294
38	0,29663	0,35746	0,75672	0,85450	0,91293
42	0,29658	0,35741	0,75670	0,85450	0,91293
46	0,29655	0,35738	0,75669	0,85449	0,91292
50	0,29654	0,35736	0,75668	0,85449	0,91292
54	0,29652	0,35735	0,75668	0,85449	0,91292
58	0,29652	0,35735	0,75668	0,85449	0,91292
$\vartheta_1 = 1^\circ$					
22	0,31485	0,37723	0,76351	0,85626	0,91508
26	0,31467	0,37708	0,76345	0,85624	0,91506
30	0,31459	0,37701	0,76342	0,85623	0,91505
34	0,31456	0,37697	0,76341	0,85623	0,91504
38	0,31454	0,37696	0,76341	0,85622	0,91504
42	0,31453	0,37695	0,76340	0,85622	0,91504
46	0,31453	0,37695	0,76340	0,85622	0,91504
$\vartheta_1 = 2^\circ$					
22	0,33662	0,40012	0,77161	0,85809	0,91684
26	0,33659	0,40009	0,77160	0,85809	0,91684
30	0,33657	0,40008	0,77160	0,85809	0,91684
34	0,33657	0,40008	0,77159	0,85808	0,91684
$\vartheta_1 = 3^\circ$					
22	0,35287	0,41654	0,77769	0,85930	0,91763
26	0,35286	0,41654	0,77769	0,85930	0,91763
30	0,35286	0,41654	0,77769	0,85930	0,91763

Таблиця 3. Значення перших п'яти частот ω_i коливань оболонки ($n = 1$) залежно від числа членів N у розкладах (13) при $\delta = 100$, $\vartheta_2 = 180^\circ - \vartheta_1$, $U = V = W = 0|_{\vartheta_1, \vartheta_2}$

N	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$\vartheta_1 = 0,1^\circ$					
22	0,27232	0,32997	0,74578	0,84802	0,89733
26	0,26934	0,32671	0,74482	0,84774	0,89708
30	0,26729	0,32448	0,74416	0,84756	0,89691
34	0,26587	0,32292	0,74371	0,84742	0,89679
38	0,26488	0,32183	0,74340	0,84733	0,89671
42	0,26417	0,32105	0,74317	0,84727	0,89665
46	0,26365	0,32049	0,74301	0,84722	0,89660
50	0,26327	0,32007	0,74289	0,84718	0,89657
54	0,26298	0,31975	0,74279	0,84715	0,89654
58	0,26283	0,31964	0,74276	0,84714	0,89653
62	0,26243	0,31915	0,74262	0,84710	0,89649
$\vartheta_1 = 0,5^\circ$					
22	0,29716	0,35875	0,75504	0,85037	0,89969
26	0,29655	0,35818	0,75485	0,85032	0,89964
30	0,29625	0,35790	0,75475	0,85029	0,89962
34	0,29609	0,35775	0,75470	0,85027	0,89961
38	0,29601	0,35766	0,75467	0,85027	0,89960
42	0,29596	0,35761	0,75466	0,85026	0,89960
46	0,29593	0,35758	0,75465	0,85026	0,89959
50	0,29591	0,35757	0,75464	0,85026	0,89959
54	0,29590	0,35755	0,75464	0,85026	0,89959
58	0,29590	0,35755	0,75464	0,85026	0,89959
$\vartheta_1 = 1^\circ$					
22	0,31551	0,37917	0,76229	0,85211	0,90141
26	0,31533	0,37901	0,76223	0,85210	0,90140
30	0,31525	0,37894	0,76220	0,85209	0,90139
34	0,31521	0,37890	0,76219	0,85208	0,90139
38	0,31519	0,37889	0,76218	0,85208	0,90139
42	0,31519	0,37888	0,76218	0,85208	0,90139
46	0,31518	0,37887	0,76218	0,85208	0,90139
50	0,31518	0,37887	0,76218	0,85208	0,90139
$\vartheta_1 = 2^\circ$					
22	0,33992	0,40522	0,77261	0,85451	0,90384
26	0,33989	0,40519	0,77260	0,85451	0,90384
30	0,33987	0,40518	0,77260	0,85451	0,90384
34	0,33987	0,40517	0,77260	0,85451	0,90384
$\vartheta_1 = 3^\circ$					
22	0,35831	0,42399	0,78100	0,85643	0,90587
26	0,35830	0,42399	0,78100	0,85643	0,90587
30	0,35829	0,42398	0,78100	0,85643	0,90587
34	0,35829	0,42398	0,78100	0,85643	0,90587

Таблиця 4. Значення перших п'яти частот ω_i коливань оболонки ($n = 1$) залежно від числа членів N у розкладах (13) при $\delta = 100$, $\vartheta_2 = 180^\circ - \vartheta_1$, $U = V = W = dW/ds = 0|_{\vartheta_1, \vartheta_2}$.

N	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$\vartheta_1 = 0,1^\circ$					
22	0,27323	0,33117	0,74632	0,84818	0,89757
26	0,27010	0,32774	0,74528	0,84788	0,89728
30	0,26796	0,32540	0,74457	0,84767	0,89709
34	0,26648	0,32378	0,74409	0,84753	0,89695
38	0,26544	0,32264	0,74375	0,84743	0,89686
42	0,26471	0,32184	0,74351	0,84736	0,89679
46	0,26418	0,32126	0,74334	0,84731	0,89675
50	0,26379	0,32083	0,74321	0,84727	0,89671
54	0,26350	0,32052	0,74312	0,84725	0,89669
58	0,26336	0,32041	0,74309	0,84723	0,89668
$\vartheta_1 = 0,5^\circ$					
22	0,29853	0,36061	0,75604	0,85064	0,90012
26	0,29784	0,35995	0,75580	0,85057	0,90006
30	0,29750	0,35963	0,75568	0,85053	0,90003
34	0,29732	0,35946	0,75562	0,85051	0,90001
38	0,29723	0,35936	0,75559	0,85051	0,90000
42	0,29717	0,35931	0,75557	0,85050	0,90000
46	0,29714	0,35928	0,75556	0,85050	0,89999
50	0,29713	0,35926	0,75555	0,85049	0,89999
54	0,29712	0,35925	0,75555	0,85049	0,89999
58	0,29711	0,35925	0,75555	0,85049	0,89999
$\vartheta_1 = 1^\circ$					
22	0,31758	0,38199	0,76400	0,85253	0,90216
26	0,31736	0,38179	0,76392	0,85251	0,90213
30	0,31727	0,38171	0,76389	0,85250	0,90212
34	0,31723	0,38167	0,76387	0,85250	0,90212
38	0,31721	0,38165	0,76386	0,85249	0,90212
42	0,31721	0,38165	0,76386	0,85249	0,90212
46	0,31720	0,38164	0,76386	0,85249	0,90212
50	0,31720	0,38164	0,76386	0,85249	0,90212
$\vartheta_1 = 2^\circ$					
22	0,34303	0,40946	0,77560	0,85517	0,90514
26	0,34299	0,40942	0,77558	0,85516	0,90513
30	0,34297	0,40941	0,77558	0,85516	0,90513
34	0,34297	0,40941	0,77558	0,85516	0,90513
$\vartheta_1 = 3^\circ$					
22	0,36204	0,42914	0,78500	0,85722	0,90761
26	0,36203	0,42913	0,78499	0,85722	0,90761
30	0,36203	0,42913	0,78499	0,85722	0,90761

Таблиця 5. Значення перших п'яти частот ω_i коливань оболонки ($n = 1$) залежно від числа членів N у розкладах (13) при $\delta = 1000$, $\vartheta_2 = 180^\circ - \vartheta_1$, $U = V = 0|_{\vartheta_1, \vartheta_2}$

N	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$\vartheta_1 = 0,1^\circ$					
22	0,26252	0,31803	0,73876	0,84428	0,89092
26	0,25985	0,31509	0,73807	0,84410	0,89081
30	0,25801	0,31307	0,73760	0,84398	0,89073
34	0,25674	0,31167	0,73727	0,84389	0,89067
38	0,25585	0,31069	0,73704	0,84383	0,89064
42	0,25521	0,30999	0,73688	0,84379	0,89061
46	0,25475	0,30949	0,73676	0,84376	0,89059
50	0,25441	0,30912	0,73668	0,84373	0,89057
54	0,25416	0,30884	0,73661	0,84372	0,89056
58	0,25403	0,30874	0,73659	0,84371	0,89056
62	0,25367	0,30831	0,73649	0,84368	0,89054
$\vartheta_1 = 0,5^\circ$					
22	0,28346	0,34223	0,74451	0,84555	0,89171
26	0,28290	0,34166	0,74435	0,84551	0,89169
30	0,28259	0,34138	0,74428	0,84549	0,89168
34	0,28245	0,34124	0,74425	0,84548	0,89167
38	0,28237	0,34117	0,74423	0,84548	0,89167
42	0,28233	0,34113	0,74422	0,84548	0,89167
46	0,28231	0,34111	0,74421	0,84547	0,89166
50	0,28229	0,34109	0,74421	0,84547	0,89166
54	0,28229	0,34108	0,74421	0,84547	0,89166
58	0,28228	0,34108	0,74421	0,84547	0,89166
$\vartheta_1 = 1^\circ$					
22	0,29955	0,36022	0,74914	0,84654	0,89232
26	0,29937	0,36004	0,74907	0,84652	0,89231
30	0,29928	0,35996	0,74905	0,84652	0,89230
34	0,29925	0,35993	0,74905	0,84651	0,89230
38	0,29924	0,35992	0,74904	0,84651	0,89230
42	0,29923	0,35992	0,74904	0,84651	0,89230
46	0,29923	0,35992	0,74904	0,84651	0,89230
$\vartheta_1 = 2^\circ$					
22	0,32378	0,38643	0,75730	0,84838	0,89357
26	0,32375	0,38640	0,75728	0,84837	0,89356
30	0,32374	0,38639	0,75728	0,84837	0,89356
34	0,32374	0,38639	0,75727	0,84837	0,89356
$\vartheta_1 = 3^\circ$					
22	0,34345	0,40692	0,76523	0,85030	0,89505
26	0,34344	0,40691	0,76523	0,85029	0,89505
30	0,34344	0,40691	0,76523	0,85029	0,89505

Таблиця 6. Значення перших п'яти частот ω_i коливань оболонки ($n = 1$) залежно від числа членів N у розкладах (13) при $\delta = 1000$, $\vartheta_2 = 180^\circ - \vartheta_1$, $U = V = W = 0|_{\vartheta_1, \vartheta_2}$

N	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$\vartheta_1 = 0,1^\circ$					
22	0,26214	0,31748	0,73842	0,84402	0,89051
26	0,25943	0,31466	0,73766	0,84381	0,89037
30	0,25750	0,31252	0,73715	0,84369	0,89029
34	0,25622	0,31108	0,73683	0,84360	0,89024
38	0,25533	0,31010	0,73661	0,84355	0,89020
42	0,25470	0,30941	0,73645	0,84350	0,89018
46	0,25423	0,30891	0,73634	0,84347	0,89016
50	0,25389	0,30854	0,73625	0,84345	0,89014
54	0,25363	0,30826	0,73618	0,84343	0,89013
58	0,25349	0,30815	0,73616	0,84342	0,89012
62	0,25313	0,30771	0,73605	0,84339	0,89010
$\vartheta_1 = 0,5^\circ$					
22	0,28533	0,34450	0,74543	0,84575	0,89177
26	0,28474	0,34392	0,74522	0,84569	0,89173
30	0,28439	0,34358	0,74514	0,84568	0,89172
34	0,28424	0,34344	0,74511	0,84567	0,89172
38	0,28417	0,34337	0,74509	0,84566	0,89171
42	0,28412	0,34332	0,74507	0,84566	0,89171
46	0,28410	0,34330	0,74507	0,84566	0,89171
50	0,28408	0,34328	0,74506	0,84566	0,89171
54	0,28407	0,34327	0,74506	0,84565	0,89171
58	0,28407	0,34327	0,74506	0,84565	0,89171
$\vartheta_1 = 1^\circ$					
22	0,30346	0,36483	0,75147	0,84723	0,89287
26	0,30323	0,36457	0,75135	0,84719	0,89285
30	0,30306	0,36441	0,75132	0,84719	0,89285
34	0,30301	0,36437	0,75131	0,84719	0,89285
38	0,30299	0,36436	0,75131	0,84718	0,89285
42	0,30299	0,36436	0,75131	0,84718	0,89285
46	0,30298	0,36435	0,75130	0,84718	0,89285
50	0,30298	0,36435	0,75130	0,84718	0,89285
$\vartheta_1 = 2^\circ$					
22	0,32882	0,39222	0,76114	0,84961	0,89480
26	0,32866	0,39203	0,76102	0,84958	0,89478
30	0,32853	0,39192	0,76099	0,84958	0,89478
34	0,32851	0,39190	0,76099	0,84958	0,89478
38	0,32851	0,39190	0,76099	0,84958	0,89478
$\vartheta_1 = 3^\circ$					
22	0,34826	0,41234	0,76949	0,85168	0,89658
26	0,34809	0,41217	0,76936	0,85165	0,89656
30	0,34798	0,41207	0,76934	0,85165	0,89656
34	0,34797	0,41206	0,76934	0,85165	0,89656
38	0,34797	0,41206	0,76934	0,85165	0,89656

Таблиця 7. Значення перших п'яти частот ω_i коливань оболонки ($n = 1$) залежно від числа членів N у розкладах (13) при $\delta = 1000$, $\vartheta_2 = 180^\circ - \vartheta_1$,
 $U = V = W = dW/ds = 0|_{\vartheta_1, \vartheta_2}$

N	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$\vartheta_1 = 0,1^\circ$					
22	0,26597	0,32200	0,74006	0,84455	0,89101
26	0,26153	0,31712	0,73860	0,84415	0,89071
30	0,25891	0,31422	0,73786	0,84396	0,89058
34	0,25737	0,31249	0,73745	0,84385	0,89050
38	0,25637	0,31138	0,73717	0,84377	0,89044
42	0,25566	0,31060	0,73698	0,84372	0,89040
46	0,25516	0,31004	0,73684	0,84368	0,89037
50	0,25479	0,30964	0,73674	0,84365	0,89035
54	0,25451	0,30934	0,73667	0,84363	0,89034
58	0,25437	0,30923	0,73664	0,84362	0,89033
$\vartheta_1 = 0,5^\circ$					
22	0,28945	0,34891	0,74740	0,84641	0,89240
26	0,28729	0,34678	0,74661	0,84619	0,89224
30	0,28645	0,34599	0,74638	0,84614	0,89220
34	0,28617	0,34574	0,74631	0,84611	0,89219
38	0,28606	0,34563	0,74627	0,84610	0,89218
42	0,28600	0,34557	0,74625	0,84610	0,89217
46	0,28596	0,34554	0,74624	0,84609	0,89217
50	0,28595	0,34552	0,74624	0,84609	0,89217
54	0,28593	0,34551	0,74623	0,84609	0,89217
58	0,28593	0,34551	0,74623	0,84609	0,89217
$\vartheta_1 = 1^\circ$					
22	0,30762	0,36923	0,75381	0,84800	0,89367
26	0,30607	0,36781	0,75322	0,84785	0,89356
30	0,30560	0,36741	0,75311	0,84782	0,89355
34	0,30550	0,36734	0,75309	0,84781	0,89354
38	0,30548	0,36732	0,75308	0,84781	0,89354
42	0,30547	0,36731	0,75307	0,84781	0,89354
46	0,30546	0,36730	0,75307	0,84781	0,89354
50	0,30546	0,36730	0,75307	0,84781	0,89354
$\vartheta_1 = 2^\circ$					
22	0,33265	0,39632	0,76381	0,85047	0,89578
26	0,33156	0,39539	0,76339	0,85037	0,89571
30	0,33132	0,39520	0,76334	0,85036	0,89571
34	0,33130	0,39519	0,76334	0,85036	0,89571
38	0,33130	0,39519	0,76334	0,85036	0,8957
$\vartheta_1 = 3^\circ$					
22	0,35173	0,41614	0,77231	0,85255	0,89766
26	0,35090	0,41544	0,77198	0,85248	0,89762
30	0,35075	0,41532	0,77195	0,85248	0,89761
34	0,35075	0,41531	0,77195	0,85248	0,89761
38	0,35075	0,41531	0,77195	0,85248	0,89761

Дані таблиць свідчать про те, що при зменшенні кута ϑ_1 збіжність обчислювального процесу суттєво погіршується. Додаткові обчислення показали, що у випадку $\vartheta_1 = 0^\circ$ вдається досягти точності лише до двох значущих цифр для першої частоти коливань при $N = 60$. Подальше нарощування числа членів у розкладах Рітца призводить до втрати стійкості обчислювального процесу при розв'язанні алгебраїчної системи (16). Граничні умови суттєво не впливають на швидкість збіжності.

Результати таблиць також показують, що при $n = 1$ запропоновані координатні функції дозволяють розраховувати з високим ступенем точності нижчі частоти коливань, як для оболонок середньої товщини $\delta = 100$, так і для досить тонких оболонок $\delta = 1000$ при невеликій кількості наближень у методі Рітца за прийнятих граничних умов лише при $\vartheta_1 > 1^\circ$.

Використання при розрахунках технічної теорії оболонок [3] не приводить до суттєвих змін у числових результатах стосовно загальної теорії оболонок [2], тому тут не наводиться.

Висновки. У цій статті на основі методу Рітца запропоновано підхід до розв'язування задачі про вільні неосесиметричні коливання пружної тонкостінної сферичної оболонки.

Для прийнятих граничних умов двох варіантів шарнірного та абсолютно жорсткого кріплення торців оболонки показано, що при числі хвиль у круговому напрямку $n = 1$ значно погіршується збіжність обчислювального процесу у методі Рітца щодо випадку, коли $n = 2$ при $r \rightarrow 0$. Одним із можливих шляхів вирішення цієї проблеми може бути використання результатів робіт [5, 6]. Також показано, що за даних граничних умов товщина оболонки не впливає на швидкість збіжності обчислювального процесу.

Достовірність отриманих у цій роботі результатів підтверджується їхнім порівнянням із результатами з [4].

Автор заявляє про відсутність конфлікту інтересів і спеціального фінансування цієї роботи. Всі необхідні дані містяться в статті.

Література

1. Ю. В. Троценко, *Вільні коливання тонкостінних сферичних оболонок*, Нелін. коливання, **26**, № 4, 528–542 (2023).
2. В. В. Новожилов, *Теория тонких оболочек*, Судостроение, Ленинград (1962).
3. В. З. Власов, *Общая теория оболочек и ее приложения в технике*, Гостехиздат, Москва, Ленинград (1949).
4. F. I. Niordson, *Free vibrations of thin elastic spherical shells*, Int. J. Solids Structures, **20**, № 7, 667–687 (1984).
5. В. А. Троценко, Ю. В. Троценко, *Решение задачи о собственных колебаниях незамкнутой оболочки вращения в условиях ее сингулярного возмущения*, Нелін. коливання, **8**, № 3, 415–432 (2005); **English translation:** Nonlinear Oscil., **8**, 414–429 (2005).
6. Ю. В. Троценко, *О построении координатных функций для метода Ритца при расчете неосесимметричных собственных колебаний оболочки вращения в форме купола*, Нелін. коливання, **18**, № 4, 555–574 (2015); **English translation:** J. Math. Sci., **220**, 514–532 (2017).

Одержано 24.10.24,
після доопрацювання — 07.11.24