

ЛІНІЙНІ РОЗШИРЕННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА ТОРІ З ВИРОДЖЕНОЮ МАТРИЦЕЮ

Віктор Кулик

*Сілезький технологічний університет, Глівіце, Польща
e-mail: viktor.kulyk@polsl.pl, відповідальний за листування*

Ганна Кулик, Наталія Степаненко

*Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”
Берестейський просп., 37, Київ, 03056, Україна
e-mail: ganna_1953@ukr.net,
nataliya.stepanenko@iit.kpi.ua*

We propose structures of regular linear extensions of dynamical systems with an identically degenerate variable matrix of normal variables. We give the explicit form of some exponentially dichotomous linear systems with an identically degenerate periodic matrix of coefficients.

Запропоновано конструкції регулярних лінійних розширень динамічних систем із тотожно виродженою змінною матрицею при нормальних змінних. Наведено явний вигляд деяких експоненціально дихотомічних лінійних систем із тотожно виродженою періодичною матрицею коефіцієнтів.

1. Вступ. У математичній теорії керування, а також у теорії нелінійних коливань часто виникають задачі існування обмежених на всій осі $R = (-\infty, +\infty)$ розв’язків або множин таких розв’язків для диференціальних рівнянь або систем таких рівнянь. Не завжди легко вдається знайти такі розв’язки або дослідити їхнє існування. Важливим питанням є задача експоненціальної дихотомічності лінійних систем диференціальних рівнянь $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ (такі системи часто називають гіперболічними). Дослідженню властивості гіперболічності лінійних систем присвячено багато цікавих робіт (див., наприклад, [1 – 16]). Не зважаючи на глибокі дослідження гіперболічності лінійних систем у різних функціональних просторах, залишається не дослідженим питання: чи може бути гіперболічною лінійна нестационарна система у випадку, коли визначник змінної матриці $A(t)$ тотожно дорівнює нулю? Якщо це так, то виникає питання: чи може бути, що ранг змінної матриці тотожно дорівнює одиниці і система є гіперболічною? Далі виникає ще ряд цікавих питань, пов’язаних зі зміною незалежної $t \rightarrow \varphi(t)$. Такі ж самі питання виникають і для лінійних розширень динамічних систем на торі, що є дуже важливим, оскільки за допомогою таких систем описуються багаточастотні нелінійні коливання, які виникають у задачах математичної фізики.

У цій статті запропоновано конструкції регулярних лінійних розширень динамічних систем на торі з тотожно виродженою матрицею при нормальних змінних. Сподіваємося, що наведені дослідження стануть у нагоді науковцям, які вивчають теорію нелінійних коливань.

2. Основні позначення і означення. Будемо розглядати системи диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x, \quad (1)$$

де позначено $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Вектор-функція $a(\varphi) = \{a_1(\varphi), \dots, a_m(\varphi)\}$, $m \geq 1$, є неперервною і 2π -періодичною за кожною змінною φ_i , $i = \overline{1, m}$. Матриця $A(\varphi) \in (n \times n)$ -вимірною, елементами якої є неперервні, дійсні, скалярні функції, 2π -періодичні за кожною змінною φ_i , $i = \overline{1, m}$, $A(\varphi) \in C^0(\mathbb{T}^m)$. Часто матрицю $A(\varphi)$ називають матрицею при нормальних змінних, а φ — круговими змінними. Додатково припускаємо, що вектор-функція $a(\varphi)$ задовольняє умову Ліпшиця: $a(\varphi) \in C_{\text{Lip}}(\mathbb{T}^m)$. Розв'язок задачі Коші $\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi)$, $\varphi|_{t=0} = \varphi_0$ позначимо через $\varphi_t(\varphi_0)$. Матрицант лінійної системи $\frac{dx}{dt} = A(\varphi_t(\varphi_0))x$ із вектором параметрів φ_0 , позначимо через $\Omega_\tau^t(\varphi_0)$. Він є нормованим у точці $t = \tau$: $\Omega_\tau^t(\varphi_0)|_{t=\tau} = I_n$, де I_n — одинична n -вимірна матриця.

Надалі будемо використовувати такі позначення: $\langle y, x \rangle = \sum_{i=1}^n y_i x_i$ — скалярний добуток у R^n , $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$, $\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$ — норма матриці A , $C^0(\mathbb{T}^m)$ — простір дійсних функцій $F(\varphi)$, неперервних і 2π -періодичних за кожною змінною φ_i , $i = \overline{1, m}$, $C^1(\mathbb{T}^m)$ — підпростір $C^0(\mathbb{T}^m)$ неперервно диференційовних функцій.

Означення 1. Система (1) має функцію Гріна – Самойленка $G_0(\tau, \varphi)$ задачі про інваріант-ні торі, якщо існує така матриця $C(\varphi) \in C^0(\mathbb{T}^m)$, при якій функція

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi)C(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau \leq 0, \\ \Omega_\tau^0(\varphi)[C(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n], & \tau > 0, \end{cases}$$

задовольняє нерівності $\|G_0(\tau, \varphi)\| \leq K \exp\{-\gamma|\tau|\}$, де $K, \gamma = \text{const} > 0$.

Означення 2. Система (1) називається **регулярною**, якщо для неї існує єдина функція Гріна – Самойленка. Якщо ж існує безліч різних таких функцій, то систему (1) називають **слабко регулярною**.

Нагадаємо відоме твердження:

Теорема 1 [10]. Нехай існує не вироджена квадратична форма $\langle S(\varphi)x, x \rangle$, $x \in R^n$, $S(\varphi) \in C^1(\mathbb{T}^m)$, $\det S(\varphi) \neq 0$, похідна якої вздовж розв'язків системи (1) є додатно визначеною, тобто виконується нерівність

$$\left\langle \left[\sum_{i=1}^m \frac{\partial S(\varphi)}{\partial \varphi_i} a_i(\varphi) + S(\varphi)A(\varphi) + A^T(\varphi)S(\varphi) \right] x, x \right\rangle \geq \|x\|^2.$$

Тоді система (1) має єдину функцію Гріна – Самойленка, тобто є регулярною.

Зауваження 1. При деяких змінних матрицях $A(\varphi)$ можна знайти таку постійну симетричну матрицю S , при якій сума добутків $SA(\varphi) + A^T(\varphi)S$ є додатно визначеною. Тоді, очевидно, $\det S \neq 0$ і система (1) буде регулярною.

2.1. Конструкція регулярних систем із виродженою матрицею при нормальних змінних, $n = 2$. Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= a(\varphi), \\ \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ \sin \psi & -\cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ \sin \psi & -\cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2)$$

де $a(\varphi) = \{a_1(\varphi), \dots, a_m(\varphi)\}$, $\varphi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$, $\psi = \sum_{j=1}^m k_j \varphi_j$, k_j — деякі фіксовані цілі числа.

Теорема 2. Нехай виконується нерівність

$$\theta(\varphi) = \sum_{j=1}^m k_j a_j(\varphi) \neq 0 \quad \forall \varphi \in \mathbb{T}^m.$$

Тоді система (2) буде регулярною.

Доведення. У системі (2) перейдемо до нових змінних $y \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ \sin \psi & -\cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Отримаємо нову систему зі змінними коефіцієнтами

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\theta(\varphi) \\ \theta(\varphi) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Якщо система (4) є регулярною, то, очевидно, і система (2) буде регулярною. Позначимо $\begin{pmatrix} 1 & -\theta(\varphi) \\ \theta(\varphi) & 0 \end{pmatrix} = B(\varphi)$. Для того щоб переконатися в регулярності системи (4), досить знайти таку постійну симетричну матрицю S , щоб похідна квадратичної форми $\langle Sy, y \rangle$ вздовж розв'язків системи (4) була додатно визначеною:

$$\langle [SB(\varphi) + B^T(\varphi)S]y, y \rangle \geq \varepsilon \|y\|^2, \quad \varepsilon = \text{const} > 0,$$

або від'ємно визначеною:

$$\langle [SB(\varphi) + B^T(\varphi)S]y, y \rangle \leq -\varepsilon \|y\|^2.$$

Пропонуємо вибрати постійну симетричну матрицю S у вигляді $S = \begin{pmatrix} s & -1 \\ -1 & s \end{pmatrix}$. Підраховуючи відповідну суму добутків, отримуємо

$$SB(\varphi) + B^T(\varphi)S = \begin{pmatrix} 2(s - \theta(\varphi)) & -1 \\ -1 & 2\theta(\varphi) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Звідси бачимо, що якщо $\theta(\varphi) > 0$, то при виборі $s > \theta(\varphi) + \frac{1}{4\theta(\varphi)}$ матриця (5) буде додатно визначеною. Якщо ж $\theta(\varphi) < 0$, то при виборі $s < \theta(\varphi) + \frac{1}{4\theta(\varphi)}$ матриця (5) буде від'ємно визначеною. Таким чином, якщо функція $\theta(\varphi)$ не набуває нульових значень, тобто виконується умова (2), то система (4), а отже, й система (2) будуть регулярними.

Теорему 2 доведено.

Зауваження 2. Додатна визначеність матриці (5) вказує на те, що похідна квадратичної форми

$$s(y_1^2 + y_2^2) - 2y_1y_2 \quad (6)$$

вздовж розв'язків системи (4) при виборі постійного значення $s > \theta(\varphi) + \frac{1}{4\theta(\varphi)}$, $\theta(\varphi) > 0$, буде додатно визначеною. Переходячи в квадратичній формі (6) до змінних x_j за формулою (3), приходимо до висновку, що похідна квадратичної форми

$$(x_1^2 + x_2^2) + 2x_1x_2 \cos(2\psi) + (x_2^2 - x_1^2) \sin(2\psi)$$

вздовж розв'язків системи (2) буде додатно визначеною.

2.2. Регулярні системи з виродженою матрицею при нормальних змінних, $n = 3$. Розглянемо змінну матрицю

$L(\varphi)$

$$= \begin{bmatrix} (p_1 - p_2 \cos \varphi - p_3 \sin \varphi) & (-\sqrt{2}p_3 \cos \varphi + \sqrt{2}p_2 \sin \varphi) & (p_1 + p_2 \cos \varphi + p_3 \sin \varphi) \\ (-\sqrt{2}p_3 \cos \varphi + \sqrt{2}p_2 \sin \varphi) & (2p_2 \cos \varphi + 2p_3 \sin \varphi) & (\sqrt{2}p_3 \cos \varphi - \sqrt{2}p_2 \sin \varphi) \\ (p_1 + p_2 \cos \varphi + p_3 \sin \varphi) & (\sqrt{2}p_3 \cos \varphi - \sqrt{2}p_2 \sin \varphi) & (p_1 - p_2 \cos \varphi - p_3 \sin \varphi) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

де p_j — довільні дійсні параметри, для яких виконуються нерівності $p_1 \neq 0$ і $p_2^2 + p_3^2 \neq 0$. Квадрат цієї матриці є невиродженою постійною матрицею

$$L^2(\varphi) = \begin{bmatrix} m & 0 & k \\ 0 & n & 0 \\ k & 0 & m \end{bmatrix} = Q, \quad (8)$$

де позначено

$$m = 2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2), \quad n = 4(p_2^2 + p_3^2), \quad k = 2(p_1^2 - p_2^2 - p_3^2). \quad (9)$$

Обернена матриця до матриці (8) має вигляд

$$Q^{-1} = \frac{1}{m^2 - k^2} \begin{bmatrix} m & 0 & -k \\ 0 & \frac{m^2 - k^2}{n} & 0 \\ -k & 0 & m \end{bmatrix}, \quad m^2 - k^2 = 16p_1^2(p_2^2 + p_3^2) \neq 0.$$

З рівності (8) випливає, що обернену матрицю до $L(\varphi)$ можна записати у вигляді добутку

$$L^{-1}(\varphi) = Q^{-1}L(\varphi).$$

Розглянемо тепер систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = [L(\psi)JL^{-1}(\psi)]x, \quad (10)$$

де $a(\varphi) \in C_{\text{Lip}}(\mathbb{T}^m)$, $x \in R^3$, матриця $L(\psi)$ має вигляд (7), у ній замінено φ на ψ , $\psi = \sum_{j=1}^m k_j \varphi_j$, k_j — деякі фіксовані цілі числа

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Теорема 3. Нехай виконується нерівність

$$\sum_{j=1}^m k_j a_j(\varphi) \neq 0 \quad \forall \varphi \in \mathbb{T}^m. \quad (12)$$

Тоді система (10) буде регулярною, тобто матиме єдину функцію Гріна – Самойленка.

Доведення. Система (10) при заміні змінних $x = L(\psi)y$ переходить у таку:

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dy}{dt} = \left[J - L^{-1}(\psi) \frac{dL(\psi)}{d\psi} \left(\sum_{j=1}^m k_j a_j(\varphi) \right) \right] y. \quad (13)$$

Обчислюючи добуток $L(\psi) \frac{d}{d\psi} L(\psi)$, отримуємо

$$L(\psi) \frac{d}{d\psi} L(\psi) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} [2\sqrt{2}(p_2^2 + p_3^2)].$$

Таким чином, маємо

$$\begin{aligned} L^{-1}(\psi) \frac{d}{d\psi} L(\psi) &= Q^{-1}L(\psi) \frac{d}{d\psi} L(\psi) \\ &= \frac{1}{m^2 - k^2} \begin{bmatrix} 0 & -(m+k) & 0 \\ \frac{m^2 - k^2}{n} & 0 & -\frac{m^2 - k^2}{n} \\ 0 & (m+k) & 0 \end{bmatrix} [2\sqrt{2}(p_2^2 + p_3^2)]. \end{aligned}$$

Позначимо

$$\frac{1}{m-k} [2\sqrt{2}(p_2^2 + p_3^2)] \left(\sum_{j=1}^m k_j a_j(\varphi) \right) = \theta(\varphi).$$

Оскільки з позначень (9) видно, що $n = m - k$, то систему (13) можна записати у вигляді

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \theta(\varphi) & 0 \\ -\theta(\varphi) & 0 & \theta(\varphi) \\ 0 & -\theta(\varphi) & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Покажемо, що існують додатно визначені, постійні та симетричні матриці S такі, що похідна вздовж розв'язків системи (14) квадратичної форми $V = \langle Sy, y \rangle$ буде додатно визначеною. Вибираємо постійну матрицю S у вигляді

$$S = \begin{bmatrix} s & 2 & 0 \\ 2 & s & 1 \\ 0 & 1 & s \end{bmatrix} \quad (15)$$

і обчислюємо суму добутоків

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} s & 2 & 0 \\ 2 & s & 1 \\ 0 & 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \theta(\varphi) & 0 \\ -\theta(\varphi) & 0 & \theta(\varphi) \\ 0 & -\theta(\varphi) & 0 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 1 & \theta(\varphi) & 0 \\ -\theta(\varphi) & 0 & \theta(\varphi) \\ 0 & -\theta(\varphi) & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} s & 2 & 0 \\ 2 & s & 1 \\ 0 & 1 & s \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 2(s - 2\theta(\varphi)) & 2 & \theta(\varphi) \\ 2 & 2\theta(\varphi) & 0 \\ \theta(\varphi) & 0 & 2\theta(\varphi) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Звідси маємо, що при виконанні нерівності $\theta(\varphi) > 0$ похідна квадратичної форми

$$V = \langle Sy, y \rangle = s(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + 4y_1y_2 + 2y_2y_3 \quad (16)$$

вздовж розв'язків системи (14) буде додатно визначеною при виборі постійного значення s із нерівності $s > \frac{9}{4}\theta(\varphi) + \frac{1}{\theta(\varphi)}$. Якщо ж $\theta(\varphi) < 0$, то похідна квадратичної форми (16)

вздовж розв'язків системи (14) буде від'ємно визначеною при виборі $s < \frac{9}{4}\theta(\varphi) + \frac{1}{\theta(\varphi)}$.

Таким чином, система (14), а отже, й система (10) будуть регулярними.

Теорему 3 доведено.

Тепер припустимо, що для параметрів p_j , які входять у структуру матриці $L(\varphi)$, виконується рівність

$$p_2^2 + p_3^2 = p_1^2.$$

Тоді з позначень (9) одержуємо $m = n = 4p_1^2$, $k = 0$. Позначимо таку матрицю через $\bar{L}(\varphi)$ і розглянемо систему

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = [\bar{L}(\psi)J\bar{L}(\psi)]x, \quad (17)$$

де використано позначення (11).

Теорема 4. При виконанні нерівності (12) система (17) буде регулярною, тобто матиме єдину функцію Гріна – Самойленка.

Доведення. У системі (17) зробимо заміну змінних $x = \bar{L}(\psi)y$. Отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= a(\varphi), \\ \frac{dy}{dt} &= [J\bar{L}^2(\psi) - \bar{L}^{-1}(\psi)\dot{\bar{L}}(\psi)]y = \begin{bmatrix} 4p_1^2 & \theta(\varphi) & 0 \\ -\theta(\varphi) & 0 & \theta(\varphi) \\ 0 & -\theta(\varphi) & 0 \end{bmatrix} y, \end{aligned} \quad (18)$$

де

$$\theta(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{j=1}^m k_j a_j(\varphi).$$

Вибираючи постійну симетричну матрицю вигляду (15), обчислюємо суму добутоків

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} s & 2 & 0 \\ 2 & s & 1 \\ 0 & 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4p_1^2 & \theta(\varphi) & 0 \\ -\theta(\varphi) & 0 & \theta(\varphi) \\ 0 & -\theta(\varphi) & 0 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 4p_1^2 & \theta(\varphi) & 0 \\ -\theta(\varphi) & 0 & \theta(\varphi) \\ 0 & -\theta(\varphi) & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} s & 2 & 0 \\ 2 & s & 1 \\ 0 & 1 & s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4(2sp_1^2 - \theta(\varphi)) & 8p_1^2 & \theta(\varphi) \\ 8p_1^2 & 2\theta(\varphi) & 0 \\ \theta(\varphi) & 0 & 2\theta(\varphi) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

При $\theta(\varphi) > 0$ записана матриця буде додатно визначеною, якщо виконується нерівність $s > \frac{9}{16p_1^2} \theta(\varphi) + \frac{4p_1^2}{\theta(\varphi)}$. Якщо ж $\theta(\varphi) < 0$, то ця матриця буде від'ємно визначеною, якщо постійну s вибрати з нерівності $s < \frac{9}{16p_1^2} \theta(\varphi) + \frac{4p_1^2}{\theta(\varphi)}$.

Таким чином, похідна квадратичної форми (16) вздовж розв'язків системи (18) буде знаковизначеною при відповідному виборі постійного значення параметра s . Це і вказує на те, що обидві системи (17), (18) є регулярними.

Теорему 4 доведено.

Тепер розглянемо частинний випадок системи (17), а саме припустимо, що $m = 1$, $a(\varphi) \equiv 1$, $\varphi = \psi$, $\theta(\varphi) \equiv 1 > 0$, $p_1 = \sqrt{p_2^2 + p_3^2}$. Тоді симетрична змінна матриця $\bar{L}(t)$ матиме вигляд $\bar{L}(t) = \{\sigma_{ij}(t)\}_{ij=1}^3$, де позначено

$$\begin{aligned}\sigma_{11}(t) &= -p_2 \cos t - p_3 \sin t + \sqrt{p_2^2 + p_3^2}, \\ \sigma_{21}(t) &= -\sqrt{2}p_3 \cos t + \sqrt{2}p_2 \sin t, \\ \sigma_{31}(t) &= p_2 \cos t + p_3 \sin t + \sqrt{p_2^2 + p_3^2}, \\ \sigma_{23}(t) &= \sqrt{2}p_3 \cos t - \sqrt{2}p_2 \sin t, \\ \sigma_{22}(t) &= 2p_2 \cos t + 2p_3 \sin t, \\ \sigma_{33}(t) &\equiv \sigma_{11}(t), \\ \sigma_{ij}(t) &\equiv \sigma_{ji}(t),\end{aligned}\tag{19}$$

p_2, p_3 — довільні дійсні параметри, для яких виконується нерівність $p_2^2 + p_3^2 \neq 0$.

Обчислюючи добуток матриць $\bar{L}(t)J\bar{L}(t) = A(t)$, отримуємо тотожно вироджену матрицю

$$A(t) = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2(t) & (\sigma_{11}(t)\sigma_{12}(t)) & (\sigma_{11}(t)\sigma_{13}(t)) \\ (\sigma_{21}(t)\sigma_{11}(t)) & \sigma_{21}^2(t) & (\sigma_{21}(t)\sigma_{13}(t)) \\ (\sigma_{31}(t)\sigma_{11}(t)) & (\sigma_{31}(t)\sigma_{12}(t)) & \sigma_{31}^2(t) \end{bmatrix},$$

де $\sigma_{ij}(t) \equiv \sigma_{ji}(t)$.

Таким чином, з теореми 4 випливає таке твердження.

Наслідок 1. Система трьох лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \sigma_{11}^2(t)x_1 + [\sigma_{11}(t)\sigma_{12}(t)]x_2 + [\sigma_{11}(t)\sigma_{13}(t)]x_3 + f_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} &= [\sigma_{21}(t)\sigma_{11}(t)]x_1 + \sigma_{21}^2(t)x_2 + [\sigma_{21}(t)\sigma_{13}(t)]x_3 + f_2(t), \\ \frac{dx_3}{dt} &= [\sigma_{31}(t)\sigma_{11}(t)]x_1 + [\sigma_{31}(t)\sigma_{12}(t)]x_2 + \sigma_{31}^2(t)x_3 + f_3(t)\end{aligned}\tag{20}$$

при кожній фіксованій функції $f_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, неперервній і обмеженій на всій осі $R = (-\infty, +\infty)$, має єдиний обмежений розв'язок і його можна записати в інтегральному вигляді

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^*(t) \\ x_2^*(t) \\ x_3^*(t) \end{pmatrix} = - \int_t^{+\infty} \Omega_\tau^t \begin{pmatrix} f_1(\tau) \\ f_2(\tau) \\ f_3(\tau) \end{pmatrix} d\tau,\tag{21}$$

де Ω_τ^t — матрицант відповідної однорідної системи (20) $f_i(t) \equiv 0$, нормований у точці $t = \tau$: $\Omega_\tau^t|_{t=\tau} = I_3$.

Зауваження 3. З системи (20) випливає, що система

$$\begin{aligned} \left[\frac{dx_1}{dt} - f_1(t) \right] \sigma_{21}(t) - \left[\frac{dx_2}{dt} - f_2(t) \right] \sigma_{11}(t) &= 0, \\ \left[\frac{dx_2}{dt} - f_2(t) \right] \sigma_{31}(t) - \left[\frac{dx_3}{dt} - f_3(t) \right] \sigma_{21}(t) &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

має обмежені розв'язки (21) при будь-яких фіксованих функціях $f_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, неперервних і обмежених на R .

Зауваження 4. Якщо в системі (17) замінити матрицю $J = \text{diag}\{1, 0, 0\}$ іншою матрицею $J = \text{diag}\{1, 1, 0\}$, то при виконанні нерівності (12) нова система буде також регулярною.

У цьому можна переконатися, проводячи в новій системі заміну змінних $x = \bar{L}(\psi)y$, після якої одержуємо систему

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dy}{dt} = \begin{bmatrix} 4p_1^2 & \theta(\varphi) & 0 \\ -\theta(\varphi) & 4p_1^2 & \theta(\varphi) \\ 0 & -\theta(\varphi) & 0 \end{bmatrix} y, \quad (23)$$

яка при виконанні нерівності $|\theta(\varphi)| > 0$ буде регулярною. Причому похідна вздовж розв'язків системи (23) квадратичної форми з постійними коефіцієнтами $V = s(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + 2y_2y_3$ буде знаковизначеною при відповідному виборі постійного параметра s .

Наслідок 2. Лінійна система диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = B(t)x, \quad x \in R^3, \quad (24)$$

з тотожно виродженою матрицею

$$B(t) = \begin{bmatrix} (\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2) & (\sigma_{11}\sigma_{12} + \sigma_{12}\sigma_{22}) & (\sigma_{11}\sigma_{13} + \sigma_{12}\sigma_{23}) \\ (\sigma_{21}\sigma_{11} + \sigma_{22}\sigma_{21}) & (\sigma_{12}^2 + \sigma_{22}^2) & (\sigma_{21}\sigma_{13} + \sigma_{22}\sigma_{23}) \\ (\sigma_{31}\sigma_{11} + \sigma_{32}\sigma_{21}) & (\sigma_{31}\sigma_{12} + \sigma_{32}\sigma_{22}) & (\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \end{bmatrix},$$

де використано позначення (19), є регулярною, тобто неоднорідна система $\frac{dx}{dt} = B(t)x + f(t)$ при кожній неперервній і обмеженій на осі R вектор-функції $f(t)$ матиме єдиний обмежений на R розв'язок. Цей розв'язок також можна записати в інтегральному вигляді (21), оскільки всі нетривіальні розв'язки системи (24) експоненціально зростають на $+\infty$ і прямують до нуля на $-\infty$.

2.3. Побудова регулярних систем із виродженою матрицею при нормальних змінних, $n = 4$. У цьому пункті пропонуємо конструкцію регулярних систем (1) із виродженою матрицею $A(\varphi)$ розмірності 4×4 .

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = [L(\psi_1, \psi_2) J L(\psi_1, \psi_2)]x, \quad x \in R^4, \quad (25)$$

де

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m), \quad \psi_1 = \sum_{j=1}^m k_j^{(1)} \varphi_j, \quad \psi_2 = \sum_{j=1}^m k_j^{(2)} \varphi_j,$$

$k_j^{(i)}$ — деякі фіксовані дійсні цілі числа, $J = \text{diag} \{1, 0, 0, 0\}$, $L(\psi_1, \psi_2) = L_1(\psi_1) + L_2(\psi_2)$,

$$L_1(\psi_1) = \begin{bmatrix} \cos \psi_1 & \sin \psi_1 & \cos \psi_1 & \sin \psi_1 \\ \sin \psi_1 & -\cos \psi_1 & \sin \psi_1 & -\cos \psi_1 \\ \cos \psi_1 & \sin \psi_1 & \cos \psi_1 & \sin \psi_1 \\ \sin \psi_1 & -\cos \psi_1 & \sin \psi_1 & -\cos \psi_1 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

$$L_2(\psi_2) = \begin{bmatrix} \cos \psi_2 & \sin \psi_2 & -\cos \psi_2 & -\sin \psi_2 \\ \sin \psi_2 & -\cos \psi_2 & -\sin \psi_2 & \cos \psi_2 \\ -\cos \psi_2 & -\sin \psi_2 & \cos \psi_2 & \sin \psi_2 \\ -\sin \psi_2 & \cos \psi_2 & \sin \psi_2 & -\cos \psi_2 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Записані симетричні змінні матриці (26), (27) такі, що їхній квадрат є постійною матрицею, а їхній добуток тотожно дорівнює нульовій матриці:

$$L_1(\psi_1)L_1(\psi_1) \equiv 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L_2(\psi_2)L_2(\psi_2) \equiv 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$L_1(\psi_1)L_2(\psi_2) \equiv L_2(\psi_2)L_1(\psi_1) \equiv 0.$$

Звідси випливає тотожність

$$L(\psi_1, \psi_2)L(\psi_1, \psi_2) = [L_1(\psi_1) + L_2(\psi_2)]^2 \equiv 4I_4, \quad (28)$$

де I_4 — одинична матриця розмірності 4×4 .

Позначимо

$$\theta_1(\varphi) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m k_j^{(1)} a_j(\varphi), \quad \theta_2(\varphi) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m k_j^{(2)} a_j(\varphi).$$

Має місце таке твердження.

Теорема 5. Нехай виконуються нерівності

$$\theta_1(\varphi) + \theta_2(\varphi) > 0, \quad \theta_1(\varphi) \theta_2(\varphi) < 0 \quad (29)$$

для всіх $\varphi \in \mathbb{T}^m$. Тоді система (25) буде регулярною.

Доведення. У системі (25) зробимо заміну змінних $x = L(\psi_1, \psi_2)y$, $y \in R^4$. Отримаємо

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dy}{dt} = \left[JL^2(\psi_1, \psi_2) - L^{-1}(\psi_1, \psi_2) \frac{dL(\psi_1, \psi_2)}{dt} \right] y. \quad (30)$$

Враховуючи тотожність (28), запишемо добуток

$$\begin{aligned} & L^{-1}(\psi_1, \psi_2) \frac{dL(\psi_1, \psi_2)}{dt} \\ &= \frac{1}{4} L(\psi_1, \psi_2) \left[\frac{dL_1(\psi_1)}{d\psi_1} \frac{d\psi_1}{dt} + \frac{dL_2(\psi_2)}{d\psi_2} \frac{d\psi_2}{dt} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[L(\psi_1, \psi_2) \frac{dL_1(\psi_1)}{d\psi_1} \sum_{j=1}^m k_j^{(1)} a_j(\varphi) + L(\psi_1, \psi_2) \frac{dL_2(\psi_2)}{d\psi_2} \sum_{j=1}^m k_j^{(2)} a_j(\varphi) \right]. \end{aligned}$$

Обчислимо добутки матриць

$$\begin{aligned} L(\psi_1, \psi_2) \frac{dL_1(\psi_1)}{d\psi_1} &= [L_1(\psi_1) + L_2(\psi_2)] \frac{dL_1(\psi_1)}{d\psi_1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \\ L(\psi_1, \psi_2) \frac{dL_2(\psi_2)}{d\psi_2} &= [L_1(\psi_1) + L_2(\psi_2)] \frac{dL_2(\psi_2)}{d\psi_2} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Позначимо

$$\eta_1(\varphi) = \theta_1(\varphi) + \theta_2(\varphi), \quad \eta_2(\varphi) = \theta_1(\varphi) - \theta_2(\varphi) \quad (31)$$

і запишемо систему (30) у вигляді

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dy}{dt} = B(\varphi)y, \quad y \in R^4, \quad (32)$$

де

$$B(\varphi) = \begin{bmatrix} 4 & -\eta_1(\varphi) & 0 & -\eta_2(\varphi) \\ \eta_1(\varphi) & 0 & \eta_2(\varphi) & 0 \\ 0 & -\eta_2(\varphi) & 0 & -\eta_1(\varphi) \\ \eta_2(\varphi) & 0 & \eta_1(\varphi) & 0 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Покажемо, що при виконанні нерівностей (29) система (32) буде регулярною. Для цього досить знайти таку постійну симетричну матрицю S , для якої сума

$$SB(\varphi) + B^T(\varphi)S \quad (34)$$

буде додатно визначеною. Пропонуємо вибирати таку постійну симетричну матрицю S у вигляді

$$S = \begin{bmatrix} p_1 & -1 & 0 & p_2 \\ -1 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_1 & 1 \\ p_2 & 0 & 1 & p_1 \end{bmatrix}, \quad (35)$$

підбираючи відповідно постійні параметри p_1 , p_2 . З матрицями (33), (35) обчислюємо суму (34). Далі отримуємо

$$SB(\varphi) + B^T(\varphi)S = \begin{bmatrix} 2l_1 & -4 & p_2\eta_1 & 4p_2 \\ -4 & 2\eta_1 & 0 & -p_2\eta_1 \\ p_2\eta_1 & 0 & 2\eta_1 & 0 \\ 4p_2 & -p_2\eta_1 & 0 & 2l_2 \end{bmatrix}, \quad (36)$$

де позначено $l_1 = 4p_1 - \eta_1 + p_2\eta_2$, $l_2 = -p_2\eta_2 - \eta_1$.

Для того щоб симетрична матриця (36) була додатно визначеною, необхідно й достатньо, щоб її головні мінори були додатними:

$$2l_2 = 2(-p_2\eta_2 - \eta_1) > 0, \quad (37)$$

$$\begin{vmatrix} 2\eta_1 & 0 \\ 0 & 2l_2 \end{vmatrix} = 4\eta_1(-p_2\eta_2 - \eta_1) > 0, \quad (38)$$

$$\begin{vmatrix} 2\eta_1 & 0 & -p_2\eta_1 \\ 0 & 2\eta_1 & 0 \\ -p_2\eta_1 & 0 & 2l_2 \end{vmatrix} = 8\eta_1^2(-p_2\eta_2 - \eta_1) - 2\eta_1^3p_2^2 > 0, \quad (39)$$

$$\det[SB(\varphi) + B^T(\varphi)S] = 2(4p_1 - \eta_1 + p_2\eta_2) \begin{vmatrix} 2\eta_1 & 0 & -p_2\eta_1 \\ 0 & 2\eta_1 & 0 \\ -p_2\eta_1 & 0 & 2l_2 \end{vmatrix} + p_2^4\eta_1^4 + 4p_2^3\eta_1\eta_2 + 4p_2^3\eta_1^5 + 64p_2\eta_1\eta_2 + 64\eta_1^2 > 0. \quad (40)$$

З нерівностей (37) і (38) випливає $\eta_1 > 0$. Обидві частини нерівності (39) поділимо на $2\eta_1^2 > 0$:

$$4(-p_2\eta_2 - \eta_1) - \eta_1p_2^2 > 0. \quad (41)$$

Якщо виконується нерівність (41) при значенні $\eta_1 > 0$, то, очевидно, звідси випливає виконання нерівностей (37) і (38). Нерівність (40) завжди буде виконуватися при виборі достатньо великого значення параметра $p_1 > 0$. У нерівності (41) перейдемо до $\theta_i(\varphi)$ за позначенням (31); отримаємо

$$-4p_2(\theta_1 - \theta_2) - 4(\theta_1 + \theta_2) - p_2^2(\theta_1 + \theta_2) = -\theta_1(p_2 + 2)^2 - \theta_2(p_2 - 2)^2 > 0.$$

Остання нерівність буде виконуватися за умов

$$\begin{cases} \theta_1 < 0, \\ p_2 = 2 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \theta_2 < 0, \\ p_2 = -2. \end{cases}$$

Таким чином, при одночасному виконанні двох нерівностей $\theta_1 + \theta_2 > 0$ і $\theta_1 \dots \theta_2 < 0$ матриця (36) буде додатно визначеною, а це означає, що системи (32) і (25) будуть регулярними.

Теорему 5 доведено.

Зауваження 5. У теоремі 5 першу нерівність (29) можна замінити протилежною $\theta_1(\varphi) + \theta_2(\varphi) < 0$ і тоді при виконанні другої нерівності $\theta_1(\varphi) \theta_2(\varphi) < 0$ системи (25) і (32) будуть регулярними.

Розглянемо частинний випадок системи (25), поклавши $\psi_i = \varphi_i$, $i = 1, 2$, і припускаючи, що функції $a_i(\varphi_1, \varphi_2) \equiv a_{i0}$ є постійними. Отримуємо систему

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = a_{10}, \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = a_{20}, \quad \frac{dx}{dt} = [L(\varphi_1, \varphi_2)JL(\varphi_1, \varphi_2)]x, \quad (42)$$

яка буде регулярною при одночасному виконанні двох нерівностей

$$a_{10} + a_{20} \neq 0, \quad a_{10} a_{20} < 0. \quad (43)$$

У системі (42) розв'язки перших двох рівнянь $\varphi_{1t} = a_{10}t$, $\varphi_{2t} = a_{20}t$ підставимо у третє рівняння. Одержуємо нестационарну систему, яка складається з чотирьох рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = [L(a_{10}t, a_{20}t)JL(a_{10}t, a_{20}t)]x. \quad (44)$$

Оскільки система (42) при виконанні умов (43) є регулярною, то лінійна система (44) при цих же умовах є гіперболічною (експоненціально дихотомічною) на всій осі R . У цьому можна переконатись і безпосередньо, провівши в системі (44) заміну змінних Ляпунова $x = L(a_{10}t, a_{20}t)y$. Після цієї заміни система (44) переходить у систему з постійними коефіцієнтами

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -\eta_1 & 0 & -\eta_2 \\ \eta_1 & 0 & \eta_2 & 0 \\ 0 & -\eta_2 & 0 & -\eta_1 \\ \eta_2 & 0 & \eta_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}, \quad (45)$$

де

$$\eta_1 = \frac{1}{2}(a_{10} + a_{20}), \quad \eta_2 = \frac{1}{2}(a_{10} - a_{20}).$$

Характеристичне рівняння для системи (45) має вигляд

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 2(\eta_1^2 + \eta_2^2)\lambda^2 - 4(\eta_1^2 + \eta_2^2)\lambda + (\eta_1^2 - \eta_2^2)^2 = 0$$

і не матиме нульових і чисто уявних розв'язків $\lambda = \beta i$ при виконанні двох умов

$$\eta_1 \eta_2 = \frac{1}{4}(a_{10}^2 - a_{20}^2) \neq 0, \quad \eta_1^2 - \eta_2^2 = a_{10} a_{20} \neq 0.$$

Таким чином, при виконанні нерівностей (43) неоднорідна система

$$\frac{dx}{dt} = [L(a_{10}t, a_{20}t)JL(a_{10}t, a_{20}t)]x + f(t) \quad (46)$$

матиме єдиний обмежений на всій осі R розв'язок $x = x^*(t) = (x_1^*(t), \dots, x_4^*(t))$ при кожній фіксованій неперервній і обмеженій на R вектор-функції $f(t) = (f_1(t), \dots, f_4(t))$. Розпишемо систему (46) з урахуванням позначень (26), (27); отримаємо

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_1 \sigma_3 & \sigma_1 \sigma_4 \\ \sigma_2 \sigma_1 & \sigma_2^2 & \sigma_2 \sigma_3 & \sigma_2 \sigma_4 \\ \sigma_3 \sigma_1 & \sigma_3 \sigma_2 & \sigma_3^2 & \sigma_3 \sigma_4 \\ \sigma_4 \sigma_1 & \sigma_4 \sigma_2 & \sigma_4 \sigma_3 & \sigma_4^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \\ f_4(t) \end{pmatrix}, \quad (47)$$

де

$$\sigma_1 = \sigma_1(t) = \cos(a_{10}t) + \cos(a_{20}t) = 2 \cos\left(\frac{a_{10} + a_{20}}{2} t\right) \cos\left(\frac{a_{10} - a_{20}}{2} t\right),$$

$$\sigma_2 = \sigma_2(t) = \sin(a_{10}t) + \sin(a_{20}t) = 2 \sin\left(\frac{a_{10} + a_{20}}{2} t\right) \cos\left(\frac{a_{10} - a_{20}}{2} t\right),$$

$$\sigma_3 = \sigma_3(t) = \cos(a_{10}t) - \cos(a_{20}t) = -2 \sin\left(\frac{a_{10} + a_{20}}{2} t\right) \sin\left(\frac{a_{10} - a_{20}}{2} t\right),$$

$$\sigma_4 = \sigma_4(t) = \sin(a_{10}t) - \sin(a_{20}t) = 2 \cos\left(\frac{a_{10} + a_{20}}{2} t\right) \sin\left(\frac{a_{10} - a_{20}}{2} t\right).$$

Із системи (47) випливає, що система

$$\begin{aligned} \left[\frac{dx_1}{dt} - f_1(t) \right] \sigma_2(t) - \left[\frac{dx_2}{dt} - f_2(t) \right] \sigma_1(t) &= 0, \\ \left[\frac{dx_2}{dt} - f_2(t) \right] \sigma_3(t) - \left[\frac{dx_3}{dt} - f_3(t) \right] \sigma_2(t) &= 0, \\ \left[\frac{dx_3}{dt} - f_3(t) \right] \sigma_4(t) - \left[\frac{dx_4}{dt} - f_4(t) \right] \sigma_3(t) &= 0 \end{aligned} \quad (48)$$

матиме обмежений на всій осі R розв'язок $x = x^*(t) = (x_1^*(t), \dots, x_4^*(t))$ при кожній фіксованій неперервній і обмеженій на R вектор-функції $f(t) = (f_1(t), \dots, f_4(t))$. Можливо, цей обмежений розв'язок не єдиний.

3. Висновки.

I. Запропоновані конструкції регулярних систем (2), (10), (17), (25) переконують нас у тому, що:

1) існують гіперболічні (експоненціально дихотомічні) лінійні системи зі змінними коефіцієнтами $\frac{dx}{dt} = A(t)x$, у яких $\det A(t) \equiv 0 \quad \forall t \in R$;

2) можливим також є випадок, коли $\text{rank } A(t) \equiv 1 \quad \forall t \in R$ і система $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ буде гіперболічною, $x \in R^n$, $n = 2, 3, 4$;

3) існують системи диференціальних рівнянь (1), які мають єдину функцію Гріна – Самойленка $G_0(\tau, \varphi)$ задачі про інваріантнітори, і при цьому $\det A(\varphi) \equiv 0$;

4) конструкції (17), (25) указують на існування регулярних систем (1), у яких

$$\operatorname{rank} A(\varphi) \equiv 1 \quad \forall \varphi \in \mathbb{T}^m, \quad x \in R^n, \quad n = 3, 4.$$

II. Було б цікаво дослідити системи вигляду (22), (48). Є гіпотеза, що такі системи мають не єдиний обмежений розв'язок, а цілу сім'ю таких розв'язків.

III. Для матриці (33) вдалося знайти постійну симетричну матрицю (35), для якої сума (34) є додатно визначеною. Цікаво було б дослідити більш загальний випадок, коли для матриць $B(\varphi) = J + M(\varphi)$, $M^T(\varphi) \equiv -M(\varphi)$ існує постійна симетрична матриця S , для якої сума (34) буде додатно визначеною.

Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів і спеціального фінансування цієї роботи. Усі необхідні дані містяться в статті. Усі автори зробили рівномірний внесок у цю роботу.

Література

1. R. J. Saker, *The splitting index for linear differential systems*, J. Differential Equations, **33**, 368–405 (1979).
2. R. J. Saker, G. R. Sell, *Existence of dichotomies and invariant splittings for differential systems*, J. Differential Equations, **37**, 106–137 (1978).
3. W. A. Coppel, *Dichotomies and Lyapunov functions*, J. Differential Equations, **52**, 58–65 (1984).
4. K. J. Palmer, *Exponential dichotomies and transversal homoclinic points*, J. Differential Equations, **55**, 225–256 (1984).
5. J. Kenneth, K. J. Palmer, *On the reducibility of almost periodic systems of linear differential systems*, J. Differential Equations, **36**, 374–390 (1980).
6. S. Elaydi, O. Hajek, *Exponential trihotomy of differential systems*, J. Math. Anal. Appl., **129**, № 2, 362–374 (1998).
7. J. K. Hale, *Theory of functional differential equations*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg (1977).
8. J. Mallet-Paret, *The Fredholm alternative for functional-differential equations of mixed type*, J. Dynam. Differential Equations, **11**, № 1, 1–47 (1999).
9. A. Ben-Israel, T. N. E. Greville, *Generalized inverses. Theory and applications. Second ed.*, Springer-Verlag, New York (2003).
10. Yu. A. Mitropolsky, A. M. Samoilenko, V. L. Kulik, *Dichotomies and stability in nonautonomous linear systems*, Taylor & Francis, London (2003).
11. В. Л. Кулик, Г. М. Кулик, Н. В. Степаненко, *Про деякі конструкції регулярних лінійних розширень динамічних систем на торі*, Nelin. Kolyvannya, **26**, № 1, 77–94 (2023); **English translation**: J. Math. Sci. (N.Y.), **278**, № 6, 1013–1033 (2024).
12. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, VSP, Utrecht (2004).
13. S. S. Muni, *Ergodic and resonant torus doubling bifurcation in a three-dimensional quadratic map*, Nonlinear Dyn., **112**, 4651–4661 (2024).
14. H. K. Khalil, *Nonlinear systems*, Michigan State University (1996).
15. J. Xie, W. Ding, *Hopf–Hopf bifurcation and invariant torus $\mathbb{T}^2$ of a vibro-impact system*, Internat. J. Non-Linear Mech., **40**, № 4, 531–543 (2005).
16. X.-B. Lin, *Exponential dichotomies and homoclinic orbits in functional differential equations*, J. Differential Equations, **63**, 227–254 (1986).

Одержано 27.06.24,
після доопрацювання — 19.10.24