

ПРО ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З КУСКОВО-СТАЛИМИ ОПЕРАТОРНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Михайло Городній

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

вул. Володимирська, 64, Київ, 01033, Україна

e-mail: horodnii@gmail.com

Passing to the corresponding difference equation, we obtain a criterion for the existence of a unique solution bounded on the entire real axis of a linear differential equation with piecewise constant operator coefficients.

За допомогою переходу до відповідного різницевого рівняння отримано критерій існування єдиного обмеженого на всій числовій осі розв'язку лінійного диференціального рівняння з кусково-сталими операторними коефіцієнтами.

1. Постановка задачі. Нехай $(X, \|\cdot\|)$ — комплексний банахів простір, $L(X)$ — банахів простір лінійних обмежених операторів, що діють із X у X , I — одиничний оператор у X , $C_b(\mathbb{R}, X)$ — банахів простір усіх неперервних і обмежених на $\mathbb{R}$ функцій $x: \mathbb{R} \rightarrow X$ із нормою $\|x\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|$.

Зафіксуємо натуральне число p , оператори $A, B; A_n, 1 \leq n \leq p$, із $L(X)$, дійсні числа $t_0 < t_1 < \dots < t_p$, покладемо $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \setminus \{t_0, t_1, \dots, t_p\}$ і розглянемо диференціальне рівняння

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + y(t), & t \geq t_p, \\ x'(t) = A_n x(t) + y(t), & t_{n-1} \leq t < t_n, \quad 1 \leq n \leq p, \\ x'(t) = Bx(t) + y(t), & t < t_0, \end{cases} \quad (1)$$

у якому y — фіксована функція з $C_b(\mathbb{R}, X)$. Обмеженим розв'язком рівняння (1) будемо називати таку функцію $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$, що для кожного $t \in \hat{\mathbb{R}}$ існує $x'(t)$ і виконується рівність (1).

Мета цієї статті — отримати необхідні й достатні умови для операторних коефіцієнтів $A, B; A_n, 1 \leq n \leq p$, які забезпечують виконання такої умови.

Умова обмеженості. Для довільної функції $y \in C_b(\mathbb{R}, X)$ диференціальне рівняння (1) має єдиний обмежений розв'язок.

Для диференціального рівняння зі змінним операторним коефіцієнтом умову обмеженості досліджували, зокрема, в [1–3] у скінченновимірному просторі, в [4, 5] у довільному банаховому просторі для випадку обмежених і в [6, 7] — необмежених операторних коефіцієнтів із використанням умови експоненціальної дихотомії на $\mathbb{R}$ для відповідного однорідного диференціального рівняння. Про використання більш слабкої умови експоненціальної дихотомії на півосях і фредгольмовості відповідного оператора для розв'язування

задач про обмежені на $\mathbb{R}$ розв'язки див. [7, 8] та наведені там посилання. Для диференціального рівняння з одним стрибком операторного коефіцієнта

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + y(t), & t \geq 0, \\ x'(t) = Bx(t) + y(t), & t < 0, \end{cases}$$

критерій виконання умови обмеженості отримано в [9].

2. Перехід до різничевого рівняння. Розглянемо відповідне до (1) різничеве рівняння

$$\begin{cases} u_{n+1} = e^A u_n + v_n, & n \geq p, \\ u_{n+1} = e^{A_{n+1}(t_{n+1}-t_n)} u_n + v_n, & 0 \leq n \leq p-1, \\ u_{n+1} = e^B u_n + v_n, & n \leq -1, \end{cases} \quad (2)$$

у якому $\{v_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — задана, а $\{u_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — шукана послідовність елементів простору X . Зазначимо, що різничеве рівняння (2) задовольняє умову обмеженості, якщо воно має єдиний обмежений розв'язок $\{u_n, n \in \mathbb{Z}\}$ для кожної обмеженої послідовності $\{v_n, n \in \mathbb{Z}\}$.

Далі використовуємо таку теорему.

Теорема 1. Для того щоб диференціальне рівняння (1) задовольняло умову обмеженості, необхідно й достатньо, щоб різничеве рівняння (2) теж задовольняло умову обмеженості.

Доведення. Достатність. Нехай рівняння (2) задовольняє умову обмеженості. Зафіксуємо функцію $y \in C_b(\mathbb{R}, X)$. Покладемо

$$v_n = \begin{cases} \int_0^1 e^{A(1-\tau)} y(t_p + n - p + \tau) d\tau, & n \geq p, \\ \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{A_{n+1}(t_{n+1}-\tau)} y(\tau) d\tau, & 0 \leq n \leq p-1, \\ \int_0^1 e^{B(1-\tau)} y(t_0 + n + \tau) d\tau, & n \leq -1. \end{cases} \quad (3)$$

Зауважимо, що послідовність $\{v_n, n \in \mathbb{Z}\}$ обмежена в X . Нехай $\{u_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — відповідний до неї обмежений розв'язок різничевого рівняння (2). Покладемо

$$x(t) = \begin{cases} e^{A(t-t_p)} u_p + \int_{t_p}^t e^{A(t-\tau)} y(\tau) d\tau, & t \geq t_p, \\ e^{A_k(t-t_k)} u_k + \int_{t_k}^t e^{A_k(t-\tau)} y(\tau) d\tau, & t \in [t_{k-1}; t_k), \quad 1 \leq k \leq p, \\ e^{B(t-t_0)} u_0 + \int_{t_0}^t e^{B(t-\tau)} y(\tau) d\tau, & t < t_0. \end{cases} \quad (4)$$

Безпосередньо перевіряємо, що для кожного $t \in \widehat{\mathbb{R}}$ існує $x'(t)$ і виконується рівність (1), а також внаслідок (2)–(4) $x(t_k) = u_k = \lim_{t \rightarrow t_k} x(t)$, $0 \leq k \leq p$; $x(t_p + n) = u_n$, $n \geq p+1$; $x(t_0 + n) = u_n$, $n \leq -1$. Тому послідовність

$$\left\{ \dots, x(t_0 - 2), x(t_0 - 1), \underbrace{x(t_0)}_0, x(t_1), \dots, x(t_p), x(t_p + 1), x(t_p + 2), \dots \right\} \quad (5)$$

обмежена. Звідси випливає, що функція x обмежена на $\mathbb{R}$.

Таким чином, диференціальне рівняння (1) має обмежений розв'язок x , відповідний до функції y .

Припустимо від супротивного, що цей розв'язок не єдиний. Тоді відповідне до (1) однорідне диференціальне рівняння має деякий ненульовий обмежений розв'язок u , який можна записати у вигляді

$$u(t) = \begin{cases} e^{A(t-t_p)}u(t_p), & t \geq t_p, \\ e^{A_{k+1}(t-t_k)}u(t_k), & t \in [t_k; t_{k+1}), \quad 0 \leq k \leq p-1, \\ e^{B(t-t_0)}u(t_0), & t < t_0. \end{cases}$$

Звідси випливає, що хоча б один із елементів $u(t_k)$, $0 \leq k \leq p$, ненульовий, а також послідовність

$$\left\{ \dots, u(t_0-2), u(t_0-1), \underbrace{u(t_0)}_0, u(t_1), \dots, u(t_p), u(t_p+1), u(t_p+2), \dots \right\}$$

є ненульовим обмеженим розв'язком відповідного до (2) однорідного різницевого рівняння. Суперечність.

Необхідність. Нехай диференціальне рівняння (1) задовольняє умову обмеженості. Зафіксуємо обмежену в X послідовність $\{v_n, n \in \mathbb{Z}\}$. Покладемо

$$\begin{aligned} y(t_p + n + \tau) &= e^{A(\tau-1)}v_{p+n}\psi(\tau), \quad \tau \in [0; 1), \quad n \geq 0, \\ y(\tau) &= e^{A_{k+1}(\tau-t_k)}v_k\psi_{k+1}(\tau), \quad \tau \in [t_k; t_{k+1}), \quad 0 \leq k \leq p-1, \\ y(t_0 + n + \tau) &= e^{B(\tau-1)}v_n\psi(\tau), \quad \tau \in [0; 1), \quad n \leq -1, \end{aligned}$$

де $\psi: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi_{k+1}: [t_k; t_{k+1}] \rightarrow \mathbb{R}$, $0 \leq k \leq p-1$, — деякі фіксовані неперервні на відповідних відрізках функції такі, що

$$\begin{aligned} \psi(0) &= \psi(1) = \psi_1(t_0) = \psi_1(t_1) = \dots = \psi_p(t_{p-1}) = \psi_p(t_p) = 0, \\ \int_0^1 \psi(t) dt &= \int_{t_0}^{t_1} \psi_1(t) dt = \dots = \int_{t_{p-1}}^{t_p} \psi_p(t) dt = 1. \end{aligned}$$

Тоді $y \in C_b(\mathbb{R}, X)$, а також виконуються рівності (3). Тому для відповідного до y єдиного обмеженого розв'язку x рівняння (1) справджуються рівності (4). Отже, визначена за допомогою цієї функції послідовність (5) є відповідним до $\{v_n, n \in \mathbb{Z}\}$ обмеженим розв'язком різницевого рівняння (2).

Якщо, від супротивного, цей обмежений розв'язок не єдиний, то відповідне до (2) однорідне рівняння має деякий ненульовий обмежений розв'язок $\{w_n, n \in \mathbb{Z}\}$. Тоді функція $w: \mathbb{R} \rightarrow X$, визначена за правилом

$$w(t) = \begin{cases} e^{A(t-t_p)}w_p, & t \geq t_p, \\ e^{A_{k+1}(t-t_k)}w_k, & t \in [t_k; t_{k+1}), \quad 0 \leq k \leq p-1, \\ e^{B(t-t_0)}w_0, & t < t_0, \end{cases}$$

є ненульовим обмеженим розв'язком відповідного до (1) однорідного диференціального рівняння. Це суперечить умові обмеженості.

Теорему 1 доведено.

3. Допоміжні твердження. У подальшому використовуються такі леми.

Лема 1. Нехай $T \in L(X)$; X_1, X_2 — такі підпростори в X , що $T(X_2)$ — підпростір, простір X зображується у вигляді прямої суми $X = X_1 \dot{+} T(X_2)$ своїх підпросторів X_1 і $T(X_2)$, а також оператор T бієктивно відображає X_2 на $T(X_2)$. Тоді:

a1) $X = T^{-1}(X_1) \dot{+} X_2$;

a2) якщо P_1, P_2 — проектори, що відповідають зображенню $X = X_1 \dot{+} T(X_2)$, а $\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2$ — проектори, що відповідають зображенню $X = T^{-1}(X_1) \dot{+} X_2$, то $\widetilde{P}_2 = \widetilde{T}^{-1}P_2T$, де $\widetilde{T}^{-1}$ — неперервний обернений оператор до звуження $\widetilde{T}: X_2 \rightarrow T(X_2)$ оператора T .

Доведення. Твердження a1) співпадає з твердженням леми 4 з [10].

Зафіксуємо $x \in X$. Оскільки $X = X_1 \dot{+} T(X_2)$, то існують єдині елементи $u \in X_1$ і $v \in X_2$ такі, що $Tx = u + Tv$. Тоді $Tv = P_2Tx$, тобто $v = \widetilde{T}^{-1}P_2Tx$, а також $x = (x - v) + v$, $(x - v) \in T^{-1}(X_1)$, а тому $v = \widetilde{P}_2x$. Звідси випливає, що $\widetilde{P}_2 = \widetilde{T}^{-1}P_2T$.

Лему 1 доведено.

Нехай $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $i\mathbb{R} = \{it \mid t \in \mathbb{R}\}$. Позначимо через $\sigma(A)$ спектр оператора A . Внаслідок теореми Данфорда про відображення спектра справджується таке твердження.

Лема 2. $\sigma(e^A) \cap S = \emptyset$ тоді й лише тоді, коли $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$.

Нехай T — такий неперервно оборотний оператор із $L(X)$, що $\sigma(T) \cap S = \emptyset$; $\sigma_-(T)$, $\sigma_+(T)$ — частини спектра оператора T , які лежать відповідно всередині і зовні кола S (одна з них може бути порожньою); $P_-(T)$ і $P_+(T)$ — проектори Рісса, що відповідають $\sigma_-(T)$ і $\sigma_+(T)$. Тоді простір X розкладається в пряму суму $X = X_-(T) \dot{+} X_+(T)$ інваріантних щодо T підпросторів $X_{\pm}(T) = P_{\pm}(T)(X)$, причому звуження T_- , T_+ оператора T на $X_-(T)$, $X_+(T)$ мають відповідно спектри $\sigma_-(T)$, $\sigma_+(T)$ (див., наприклад, [4, с. 32–34]).

Покладемо

$$Q_-(T) = \left\{ u \in X \mid \sup_{n \geq 1} \|T^n u\| < +\infty \right\},$$

$$Q_+(T) = \left\{ u \in X \mid \sup_{n \geq 1} \|T^{-n} u\| < +\infty \right\}.$$

Лема 3 ([9], лема 4). Якщо T — такий неперервно оборотний оператор з $L(X)$, що $\sigma(T) \cap S = \emptyset$, то $X_-(T) = Q_-(T)$, $X_+(T) = Q_+(T)$.

Нехай тепер $V \in L(X)$, $\sigma(V) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$, $\widetilde{\sigma}_-(V)$, $\widetilde{\sigma}_+(V)$ — частини спектра оператора V , що лежать відповідно у лівій і правій півплощинах $\mathbb{C}$. Тоді простір X розкладається в пряму суму $X = \widetilde{X}_-(V) \dot{+} \widetilde{X}_+(V)$ інваріантних щодо V підпросторів таким чином, що як і для оператора T звуження $\widetilde{V}_-$, $\widetilde{V}_+$ оператора V на $\widetilde{X}_-(V)$, $\widetilde{X}_+(V)$ мають відповідно спектри $\widetilde{\sigma}_-(V)$, $\widetilde{\sigma}_+(V)$.

Покладемо

$$\widetilde{Q}_-(V) = \left\{ u \in X \mid \sup_{t \in [0; +\infty)} \|e^{Vt} u\| < +\infty \right\},$$

$$\widetilde{Q}_+(V) = \left\{ u \in X \mid \sup_{t \in [0; +\infty)} \|e^{-Vt} u\| < +\infty \right\}.$$

Лема 4 ([9], лема 5). Якщо $V \in L(X)$, $\sigma(V) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$, то $\tilde{X}_-(V) = \tilde{Q}_-(V)$, $\tilde{X}_+(V) = \tilde{Q}_+(V)$.

Позначимо для скорочення запису $E_k = e^{A_k(t_k - t_{k-1})}$, $E_{jk} = E_k E_{k-1} \dots E_j$, $1 \leq j \leq k \leq p$. Оскільки оператор E_{jk} неперервно оборотний, то з теореми 2.11.7 із [11] випливає, що образ $E_{jk}(G)$ довільного підпростору G банахового простору X теж є підпростором. Тому внаслідок теореми 3 з [10] справджується така теорема.

Теорема 2. Різницеве рівняння (2) задовольняє умову обмеженості тоді й лише тоді, коли виконуються такі умови:

- i1) $\sigma(e^A) \cap S = \emptyset$, $\sigma(e^B) \cap S = \emptyset$;
- i2) $X = X_-(e^A) \dot{+} E_{1p}(X_+(e^B))$.

4. Основні результати. Наведені вище твердження дають змогу довести такі теореми.

Теорема 3. Для того щоб диференціальне рівняння (1) задовольняло умову обмеженості, необхідно і достатньо, щоб виконувалися такі умови:

- j1) $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$, $\sigma(B) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$;
- j2) $X = \tilde{X}_-(A) \dot{+} E_{1p}(\tilde{X}_+(B))$.

Доведення. Внаслідок теорем 1, 2 достатньо довести, що $ik) \Leftrightarrow jk)$, $k = 1, 2$.

З леми 3 випливає, що $i1) \Leftrightarrow j1)$.

Оскільки $e^{B(n+\tau)} = e^{Bn}e^{B\tau}$ для довільних $n \in \mathbb{Z}$, $\tau \in [0; 1]$, то з урахуванням лем 3, 4

$$\tilde{X}_+(B) = \left\{ u \in X \mid \sup_{t \in [0; +\infty)} \|e^{-Bt}u\| < +\infty \right\} = \left\{ u \in X \mid \sup_{n \geq 1} \|e^{-Bn}u\| < +\infty \right\} = X_+(e^B).$$

Аналогічно перевіряємо, що $\tilde{X}_-(A) = X_-(e^A)$. Тому $i2) \Leftrightarrow j2)$.

Теорему 3 доведено.

Теорема 4. Припустимо, що виконуються умови $j1)$, $j2)$ теореми 3. Тоді справедливі такі твердження:

- b1) для кожного $0 \leq k \leq p$

$$X = E_{(k+1)p}^{-1}(\tilde{X}_-(A)) \dot{+} E_{1k}(\tilde{X}_+(B)), \quad (6)$$

де $E_{(p+1)p} = E_{10} = I$;

b2) відповідний до функції $y \in C_b(\mathbb{R}, X)$ єдиний обмежений розв'язок x диференціального рівняння (1) визначається таким чином:

якщо $t \geq t_p$, то

$$\begin{aligned} x(t) = & \int_{t_p}^t e^{A(t-s)} P_-(A) y(s) ds - \int_t^{+\infty} e^{A(t-s)} P_+(A) y(s) ds \\ & + e^{A(t-t_p)} P_p^- \left(\int_{t_p}^{+\infty} e^{A(t_p-s)} P_+(A) y(s) ds + \sum_{k=1}^p E_{kp} \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{A_k(t_{k-1}-s)} y(s) ds \right. \\ & \left. + E_{1p} P_0^- \int_{-\infty}^{t_0} e^{B(t_0-s)} P_-(B) y(s) ds \right); \end{aligned} \quad (7)$$

якщо $1 \leq k \leq p$, то (послідовно від $k = p$ до $k = 1$)

$$x(t) = - \int_t^{t_k} e^{A_k(t-s)} y(s) ds + e^{A_k(t-t_k)} x(t_k), \quad t \in [t_{k-1}; t_k]; \quad (8)$$

якщо $t < t_0$, то

$$\begin{aligned} x(t) = & \int_{-\infty}^t e^{B(t-s)} P_-(B) y(s) ds - \int_t^{t_0} e^{B(t-s)} P_+(B) y(s) ds \\ & - e^{B(t-t_0)} \left(E_{1p}^{-1} P_p^+ \int_{t_p}^{+\infty} e^{A(t_p-s)} P_+(A) y(s) ds \right. \\ & + \sum_{k=1}^p E_{1(k-1)}^{-1} P_{k-1}^+ \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{A_k(t_{k-1}-s)} y(s) ds \\ & \left. + P_0^+ \int_{-\infty}^{t_0} e^{B(t_0-s)} P_-(B) y(s) ds \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Тут для кожного $0 \leq k \leq p$ P_k^- , P_k^+ — проектори, що відповідають зображенню (6).

Доведення. Твердження b1) є безпосереднім наслідком умови j2) теореми 3 і твердження a1) леми 1.

Доведемо твердження b2). Збіжність відповідних інтегралів і обмеженість на $\mathbb{R}$ визначеної формулами (7)–(9) функції x випливає з того, що внаслідок нерівності (4.5) із [4, с. 119] існують такі додатні сталі M , γ , що для кожного $t \geq 0$

$$\max \left\{ \|e^{-At} P_+(A)\|, \|e^{At} P_-(A)\|, \|e^{-Bt} P_+(B)\|, \|e^{Bt} P_-(B)\| \right\} \leq M e^{-\gamma t},$$

а також оператори P_0^+ , $E_{1j}^{-1} P_j^+$, $1 \leq j \leq p$, діють із X в $\tilde{X}_+(B)$.

З урахуванням рівностей $P_-(A) + P_+(A) = P_-(B) + P_+(B) = I$ безпосередньо перевіряємо, що для кожного $t \in \widehat{\mathbb{R}}$ існує $x'(t)$ і виконується рівність (1). Також зазначимо, що внаслідок (8) функція x неперервна в точках $t_1, t_2, \dots, t_p$. Для перевірки її неперервності в точці t_0 знайдемо явний вираз для $x(t_0)$. Оскільки

$$x(t_{p-1}) = - \int_{t_{p-1}}^{t_p} e^{A_p(t_{p-1}-s)} y(s) ds + E_p^{-1} x(t_p),$$

а також з умови j2) теореми 3 і леми 1 випливає $E_p^{-1} P_p^- E_p = P_{p-1}^-$, то, скориставшись формулою (7), отримаємо

$$x(t_{p-1}) = -E_p^{-1} P_p^+ \int_{t_p}^{+\infty} e^{A(t_p-s)} P_+(A) y(s) ds - P_{p-1}^+ \int_{t_{p-1}}^{t_p} e^{A_p(t_{p-1}-s)} y(s) ds$$

$$+ E_p^{-1} P_p^- \left(\sum_{k=1}^{p-1} E_{kp} \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{A_k(t_{k-1}-s)} y(s) ds + E_{1p} P_0^- \int_{-\infty}^{t_0} e^{B(t_0-s)} P_-(B) y(s) ds \right). \quad (10)$$

Тепер зауважимо, що $E_{(p-1)p}^{-1} P_p^- E_{(p-1)p} = P_{p-2}^-$, а отже, внаслідок (8), (10)

$$\begin{aligned} x(t_{p-2}) = & -E_{(p-1)p}^{-1} P_p^+ \int_{t_p}^{+\infty} e^{A(t_p-s)} P_+(A) y(s) ds \\ & - E_{p-1}^{-1} P_{p-1}^+ \int_{t_{p-1}}^{t_p} e^{A_p(t_{p-1}-s)} y(s) ds - P_{p-2}^+ \int_{t_{p-2}}^{t_{p-1}} e^{A_{p-1}(t_{p-2}-s)} y(s) ds \\ & + E_{(p-1)p}^{-1} P_p^- \left(\sum_{k=1}^{p-2} E_{kp} \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{A_k(t_{k-1}-s)} y(s) ds + E_{1p} P_0^- \int_{-\infty}^{t_0} e^{B(t_0-s)} P_-(B) y(s) ds \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Аналогічно до (10), (11) можна послідовно знайти $x(t_{p-3}), x(t_{p-4}), \dots, x(t_1)$, а потім $x(t_0)$. В результаті одержуємо

$$\begin{aligned} x(t_0) = & -E_{1p}^{-1} P_p^+ \int_{t_p}^{+\infty} e^{A(t_p-s)} P_+(A) y(s) ds \\ & - \sum_{k=1}^p E_{1(k-1)}^{-1} P_{k-1}^+ \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{A_k(t_{k-1}-s)} y(s) ds \\ & + P_0^- \int_{-\infty}^{t_0} e^{B(t_0-s)} P_-(B) y(s) ds. \end{aligned}$$

Тому, використовуючи також формулу (9), робимо висновок, що функція x неперервна в точці t_0 .

Теорему 4 доведено.

Автор заявляє про відсутність конфлікту інтересів і спеціального фінансування цієї роботи. Усі необхідні дані містяться в статті.

Література

1. W. A. Coppel, *Dichotomies and reducibility*, J. Differential Equations, **3**, 500–521 (1967).
2. R. Sacker, G. Sell, *Existence of dichotomies and invariant splittings for linear differential systems*, J. Differential Equations, **22**, 478–496 (1976).

3. Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко, В. Л. Кулик, *Исследования дихотомии систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова*, Наук. думка, Киев (1990).
4. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, Москва (1970).
5. Х. Массера, Х. Шеффер, *Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства*, Мир, Москва (1970).
6. Д. Хенри, *Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений*, Мир, Москва (1985).
7. А. Г. Баскаков, *Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений*, Успехи мат. наук, **68**, вып. 1 (409), 77–128 (2013).
8. О. А. Бойчук, В. П. Журавльов, О. О. Покутний, *Обмежені розв'язки еволюційних рівнянь*, Укр. мат. журн., **70**, № 1, 7–28 (2018); **English translation:** Ukr. Math. J., **70**, № 1, 5–29 (2018).
9. М. Ф. Городній, О. А. Печериця, *Обмежені розв'язки дифференціального рівняння з кусково-сталими операторними коефіцієнтами*, Нелін. коливання, **24**, № 2, 147–157 (2021); **English translation:** J. Math. Sci., **270**, 237–249 (2023).
10. М. Ф. Городній, *Обмежені розв'язки різницевого рівняння з кусково-сталими операторними коефіцієнтами*, Нелін. коливання, **26**, № 2, 199–209 (2023); **English translation:** J. Math. Sci., **279**, 330–342 (2024).
11. Э. Хилле, Р.Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, Изд-во иностр. лит., Москва (1962).

Одержано 23.05.24