

АПРІОРНІ НЕРІВНОСТІ ТА УЗАГАЛЬНЕНЕ ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ПСЕВДОПАРАБОЛІЧНИМИ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ СИСТЕМАМИ З НЕКОЕРЦИТИВНИМ ДИФУЗІЙНИМ ЧЛЕНОМ

Андрій Анікушин, Вікторія Назарчук

*Київський національний університет імені Т. Шевченка
вул. Володимирська, 64, Київ, 01033, Україна
e-mail: andrii.anikushyn@knu.ua, відповідальний за листування
nazarchukviktoriia@knu.ua*

We consider a Dirichlet initial boundary-value problem for a pseudoparabolic integro-differential equation with Volterra-type integral terms. By using a priori inequalities method, we state results of the well-posedness of the boundary-value problem. Moreover, we establish the existence of an optimal control of the corresponding systems for control operators operating in spaces of generalized functions. Unlike similar works, we do not use nonnegativity conditions for some terms with a lower order of the derivative.

Розглянуто початково-крайову задачу Діріхле для псевдопараболічного інтегро-диференціального рівняння з інтегральними складовими типу Вольтерри. З використанням методу апіорних нерівностей сформульовано результати щодо коректності постановки початково-крайової задачі. Крім того, встановлено існування оптимального керування відповідними системами для операторів керування, що діють у просторах узагальнених функцій. На відміну від подібних робіт не використано умов невід'ємності для деяких членів із нижчим порядком похідної.

1. Вступ. Диференціальні та інтегро-диференціальні моделі псевдопараболічного типу давно стали стандартним об'єктом вивчення прикладної математики. Це зумовлено широким класом фізичних процесів, які описують відповідні рівняння. Це, зокрема, випромінювання із затримкою у часі, двофазні моделі потоку пористого середовища з динамічною капілярністю або гістерезисом, фазова модель поля для потоків ненасиченого пористого середовища, модель теплопровідності, моделі для опису світла, фільтрації рідини та газу в пористих середовищах і середовищах “з тріщинами”, теплопровідності у неоднорідних середовищах, міграції іонів у ґрунті, розповсюдження хвиль у дисперсному середовищі та в тонкому еластичному склі тощо. Більш детальну інформацію про застосування таких моделей можна знайти в [1 – 3] та в наведеній там бібліографії.

Написано багато робіт, де розглянуто різноманітні питання коректності постановок, оптимізації, чисельних методів для лінійних або нелінійних диференціальних та інтегро-диференціальних моделей псевдопараболічного типу. Це, зокрема, [3 – 14]. Більш детальний огляд цитованих результатів наведено в [2].

Інтегро-диференціальні рівняння суттєво вивчено й у роботах українських математиків. Так, ідеї та методи теорії псевдообернених матриць і операторів, розробленої А. А. Бойчуком та А. М. Самойленком у [15], використано в роботах [16 – 18] для дослідження

систем інтегро-диференціальних рівнянь із виродженими ядрами. А розроблену в [15] техніку та поняття сильного узагальненого розв'язку операторного рівняння з [19] також застосовують автори у роботі [20] для дослідження абстрактного рівняння Шредінгера у гільбертовому просторі.

У роботах [21–23] С. І. Ляшко отримав результати щодо різних питань оптимізації, для моделей псевдопараболічного типу за допомогою методики апіорних нерівностей у негативних нормах. Оцінки такого типу вперше отримано в 1950-х роках Ю. М. Березанським при дослідженні еліптичних крайових задач [24], а пізніше використано в роботах В. П. Діденка [25], де встановлено подібні нерівності для широкого класу диференціальних операторів 2-го порядку та методику їх побудови. Основні положення цього підходу та деякі його застосування описано в монографії [1] і роботах [19, 26]. Методика, розроблена С. І. Ляшком та його учнями, виявилась ефективною для дослідження різноманітних питань коректності постановок, оптимального керування, керованості систем із розподіленими параметрами. Результатом цих досліджень стали, зокрема, роботи [23, 27–36].

Надалі виявилось, що такий підхід можна успішно застосовувати до задач Діріхле для інтегро-диференціальних рівнянь із інтегральними складовими типу Вольтерри. Основні результати для різних типів рівнянь отримано у роботах [2, 13, 37–42].

У цій статті розглянемо початково-крайову задачу для лінійного псевдопараболічного інтегро-диференціального рівняння з інтегральним оператором типу Вольтерри

$$\begin{aligned} a(x)u_t - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{tx_j})_{x_i} + b(x)u \\ - \sum_{i,j=1}^n (b_{ij}(x)u_{x_j})_{x_i} + \int_0^t \sum_{i=1}^n (K_i(x, t, \tau)u_{x_i})_{x_i} d\tau = f(x, t) \end{aligned}$$

з умовами типу Діріхле

$$u|_{x \in \partial\Omega} = 0, \quad u|_{t=0} = 0.$$

У роботі [2] для вказаної задачі отримано апіорні нерівності з негативними нормами, теореми про коректність постановки та існування оптимального керування. При цьому на коефіцієнти рівняння накладали певні обмеження: самоспряженість диференціальної частини оператора задачі, невід'ємна визначеність матриць коефіцієнтів $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $\{b_{ij}\}_{i,j=1}^n$ і невід'ємність функцій a , b .

У цій роботі ми доводимо аналогічні до [2] апіорні нерівності, не використовуючи при цьому умов невід'ємної визначеності матриць коефіцієнтів $\{b_{ij}\}_{i,j=1}^n$ і невід'ємності функції b . Умови на $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ та a залишаються без змін. Таким чином, результати щодо коректності постановки задачі та існування оптимального керування, які наведено у [2], будуть обґрунтовані за більш слабких вимог для коефіцієнтів рівняння. Ці твердження сформульовано у вигляді теорем 1 і 3.

2. Основні позначення. Аналогічно з [2] розглянемо циліндричну область $Q = \Omega \times (0, T)$, де Ω — обмежена область у $\mathbb{R}^n$ із гладкою межею $\partial\Omega$, та лінійне інтегро-диференціальне рівняння з інтегральним оператором типу Вольтерри

$$\mathcal{L}u \equiv L_D u + L_I u = f(x, t); \quad (1)$$

тут $u(x, t)$ — шукана функція, що описує стан системи в області Q , а оператори L_D і L_I задано виразами

$$L_D u \equiv (\mathcal{A}u)_t + \mathcal{B}u, \quad L_I u \equiv \int_0^t \sum_{i=1}^n (K_i(x, t, \tau) u_{x_i}(x, \tau))_{x_i} d\tau, \quad (2)$$

де

$$\mathcal{A}u \equiv - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x) u_{x_j})_{x_i} + a(x)u, \quad \mathcal{B}u \equiv - \sum_{i,j=1}^n (b_{ij}(x) u_{x_j})_{x_i} + b(x)u. \quad (3)$$

Вважаємо, що для коефіцієнтів $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $\{b_{ij}\}_{i,j=1}^n \subset C^1(\overline{\Omega})$, $a, b \in C(\overline{\Omega})$, для всіх $x \in \Omega$ виконуються співвідношення

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad b_{ij}(x) = b_{ji}(x), \quad a(x) \geq 0 \quad (4)$$

і для деякої сталої $\alpha > 0$ коефіцієнти $a_{ij}(x)$ при довільних $x \in \Omega$ і $\xi_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, задовольняють умову

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2. \quad (5)$$

Зазначимо, що на відміну від [2] ми не вимагаємо інших умов для коефіцієнтів b_{ij} , b .

Також вважаємо, що ядра $K_i(x, t, \tau)$ є неперервно диференційовними. Зокрема, для деякої сталої M справджується нерівність $|K_i(x, t, \tau)| < M$ для всіх $x \in \Omega$ і $t, \tau \in [0, T]$. Для простоти викладу також вважаємо, що всі коефіцієнти $|a_{ij}|$, $|b_{ij}|$, a , b в області $\overline{\Omega}$ мажоруються тією ж сталою M .

Областю визначення оператора $\mathcal{L}$ вважатимемо простір, що складається з множини нескінченну кількість разів диференційовних у області $\overline{Q}$ функцій, які задовольняють однорідні початкові й граничні умови типу Діріхле

$$u|_{t=0} = 0, \quad (6)$$

$$u|_{x \in \partial\Omega} = 0. \quad (7)$$

Таку множину функцій позначимо через C_{BR}^∞ .

Будемо розглядати простір W_{BR} , що є поповненням C_{BR}^∞ за нормою

$$\|u\|_W = \left(\int_Q u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i t}^2 dQ \right)^{1/2}. \quad (8)$$

Розглянемо також спряжений оператор, що має вигляд $\mathcal{L}^* v \equiv L_D^* v + L_I^* v$, де

$$L_D^* v \equiv -(\mathcal{A}v)_t + \mathcal{B}v, \quad L_I^* v \equiv \int_t^T \sum_{i=1}^n (K_i(x, \tau, t) v_{x_i}(x, \tau))_{x_i} d\tau.$$

Областю визначення оператора $\mathcal{L}^*$ вважатимемо простір, який складається з множини нескінченно диференційовних функцій в області $\bar{Q}$, які задовольняють початкові й граничні умови

$$v|_{t=T} = 0, \quad (9)$$

$$v|_{x \in \partial\Omega} = 0. \quad (10)$$

Множину таких функцій позначатимемо через C_{BR+}^∞ , а через W_{BR+} позначимо поповнення множини C_{BR+}^∞ за нормою (8).

Через H_{BR} , H_{BR+} позначимо поповнення просторів C_{BR}^∞ , C_{BR+}^∞ відповідно за нормою

$$\|u\|_H = \left(\int_Q u^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 dQ \right)^{1/2}, \quad (11)$$

а через W_{BR}^- , W_{BR+}^- , H_{BR}^- , H_{BR+}^- — негативні простори, побудовані за відповідними позитивним просторами щодо $L_2(Q)$.

3. Задача оптимального керування. Коротко нагадаємо постановку задачі оптимального керування, яку вивчали в [2]. Розглянемо систему, еволюцію якої описує лінійне інтегро-диференціальне рівняння

$$\mathcal{L}u = F = f + Ch, \quad f \in W_{BR+}^-, \quad (12)$$

де оператор $\mathcal{L}$ визначено згідно з (1)–(3). Тут $u(x, t)$ — функція стану, що задовольняє початково-крайові умови (6), (7) і залежить від керування h , визначеного на допустимій множині $\mathcal{U}$ простору керувань $\mathcal{H}$, а $\mathcal{C}$ — деякий оператор керування. На розв'язках рівняння (12) задано деякий функціонал $J(h) = \Phi(u(h))$, який необхідно мінімізувати за умови $h \in \mathcal{U}$.

Як оператор $\mathcal{C}$ можна, наприклад, розглянути

$$Ch = \sum_{k=1}^d \delta(t - t_k) \otimes \varphi_k(x), \quad t, t_k \in [0, T], \quad \varphi_k(x) \in L_2(\Omega), \quad (13)$$

де

$$h = \{(t_k, \varphi_k(x))\}_{k=1}^d, \quad \mathcal{H} = ([0, T] \times L_2(\Omega))^d.$$

Під Ch розуміємо функціонал, що діє на гладких у $\bar{Q}$ функціях у такий спосіб:

$$(\mathcal{C}h)(v) = \sum_{k=1}^d \int_{\Omega} v(x, t_k) \varphi_k(x) d\Omega.$$

Оскільки норма $\|\cdot\|_{W_{BR+}}$ мажорує норму $\|v\| = \left(\int_Q v^2 + v_t^2 dQ \right)^{\frac{1}{2}}$ на множині C_{BR}^∞ , то справджуються всі міркування стосовно оператора $\mathcal{C}$ з [1, с. 17–20]. Це означає, що лінійний обмежений функціонал $(\mathcal{C}h)(\cdot)$ можна продовжити на простір W_{BR+} , а тому вказаний оператор $\mathcal{C}$ можна розглядати як відображення, що діє з простору керування $\mathcal{H}$ у W_{BR+}^- . Таким чином, права частина $F = f + Ch$ рівняння (12) належить простору W_{BR+}^- .

Аналогічно до [2] розв'язок задачі (12) будемо розуміти у сенсі такого означення.

Означення 1. Розв'язком задачі (12) із правою частиною $F = f + Ch \in W_{BR+}^-$ називається функція $u \in H_{BR}$, для якої існує послідовність функцій $u_i \in C_{BR}^\infty$, $i = 1, 2, \dots$, таких, що

$$\|u - u_i\|_{H_{BR}} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0, \quad \|\mathcal{L}u_i - F\|_{W_{BR+}^-} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0.$$

У наступному пункті ми доведемо апріорні нерівності

$$C_1 \|u\|_{H_{BR}} \leq \|\mathcal{L}u\|_{W_{BR+}^-} \leq C_2 \|u\|_{W_{BR}}, \quad (14)$$

$$C_1 \|v\|_{H_{BR+}} \leq \|\mathcal{L}^*v\|_{W_{BR}^-} \leq C_2 \|v\|_{W_{BR+}}, \quad (15)$$

які відіграють важливу роль при обґрунтуванні сформульованих далі результатів щодо коректності постановки початково-крайової задачі та існування оптимального керування. Зокрема, використовуючи теорему 3 та лему 3 з [1, с. 8,10], а також враховуючи нерівності (14), (15), можемо стверджувати, що справедливе таке твердження.

Теорема 1. Для будь-якої функції $F \in W_{BR+}^-$ існує єдиний розв'язок $u \in H_{BR}$ задачі (12) у сенсі означення 1. Причому для деякої сталої C , що не залежить від F , виконується нерівність

$$\|u\|_{H_{BR}} \leq C \|F\|_{W_{BR+}^-}.$$

Для доведення існування оптимального керування використаємо загальну теорему, доведену в [1, с. 14]. У випадку введених нами просторів вона буде мати такий вигляд.

Теорема 2. Нехай стан системи визначає розв'язок задачі (12) і виконано такі припущення:

1. Критерій якості $\Phi(\cdot) : H_{BR} \rightarrow \mathbb{R}$ є слабконапівноперервним знизу за станом системи $u(x, t, h)$ та обмеженим знизу.
2. Множина допустимих керувань $\mathcal{U} \subset \mathcal{H}$ є замкнутою, обмеженою та опуклою в $\mathcal{H}$.
3. $\mathcal{H}$ — рефлексивний банахів простір.
4. $\mathcal{C}(\cdot)$ — слабконеperервний оператор, що діє з простору керувань $\mathcal{H}$ у простір W_{BR+}^- .
5. Для операторів $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^*$ виконуються нерівності (14), (15).

Тоді існує оптимальне керування системою (12), тобто таке керування $h^* \in \mathcal{U}$, що $J(h^*) = \inf_{h \in \mathcal{U}} J(h)$.

Зазначимо, що введений вище простір керувань $\mathcal{H}$ є гільбертовим, що гарантує виконання умови 3. Також, повторюючи міркування з [1, с. 20–23], доводимо, що вказаний у (13) оператор керування $\mathcal{C}$ є слабконеperервним відображенням із $\mathcal{H}$ у W_{BR+}^- .

Таким чином, враховуючи апріорні нерівності (14), (15), можемо стверджувати, що справджується така теорема.

Теорема 3. Нехай стан системи описує розв'язок задачі (12) із наведеним оператором $\mathcal{C}$ та вказаним простором керувань $\mathcal{H}$. Припустимо, що множина допустимих керувань $\mathcal{U}$ є замкнутою, опуклою та обмеженою в $\mathcal{H}$, а критерій якості $\Phi(\cdot) : H_{BR} \rightarrow \mathbb{R}$ є слабконапівноперервним знизу за станом системи $u(x, t, h)$ та обмеженим знизу. Тоді існує оптимальне керування системою (12).

Зауваження 1. Зазначимо, що в роботі [2] сформульовано альтернативні означення узагальнених розв'язків, теорему про їхню еквівалентність та інші приклади операторів $\mathcal{C}$ для вказаної задачі оптимального керування, для яких також справджується теорема 3.

4. Допоміжні твердження та апіорні оцінки. У цьому пункті покажемо виконання нерівностей (14), (15).

Доведення двох наступних лем не використовує умов невід'ємності b або невід'ємної визначеності $\{b_{ij}\}_{i,j=1}^n$ та повністю повторює доведення лем 3 і 4 з роботи [2].

Лема 1. Існує така стала $C > 0$, що для довільної функції $u \in C_{BR}^\infty$ виконується нерівність

$$C\|u\|_{W_{BR}} \geq \|\mathcal{L}u\|_{W_{BR}^-}.$$

Лема 2. Існує така стала $C > 0$, що для довільної функції $v \in C_{BR^+}^\infty$ виконується нерівність

$$C\|v\|_{W_{BR^+}} \geq \|\mathcal{L}^*v\|_{W_{BR}^-}.$$

Нерівності, наведені у лемах 1 і 2, дозволяють розширити за неперервністю оператори $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^*$ з їхніх областей визначення на простори W_{BR} , W_{BR^+} . Зберігаючи за розширеними операторами їхні попередні позначення, зауважимо, що нерівності, згадані в лемах 1 і 2, будуть виконуватися також для всіх $u \in W_{BR}$, $v \in W_{BR^+}$.

Перейдемо до розгляду основного твердження роботи. Для доведення будемо використовувати допоміжні нерівності, доведені в роботах [2] і [40].

Лема 3. Нехай $f \in C([0, T])$ та для довільних чисел $t, \tau \in [0, T]$ виконано нерівність $|K(t, \tau)| \leq M$. Тоді для довільної сталої $c > 0$ справджується нерівність

$$\left| \int_0^T \int_0^t K(t, \tau) e^{c\tau} f(\tau) d\tau f(t) dt \right| \leq M \sqrt{\frac{T}{c}} \int_0^T e^{ct} f^2(t) dt.$$

Лема 4. Нехай $f \in C^1([0, T])$, $f(T) = 0$ та для довільних чисел $t, \tau \in [0, T]$ виконано $|K(t, \tau)| \leq M$. Тоді для довільної сталої $c > 0$ справджується нерівність

$$\left| \int_0^T \int_0^t K(t, \tau) e^{c\tau} f'(\tau) d\tau f(t) dt \right| \leq \frac{MT}{c} \int_0^T e^{ct} (f'(t))^2 dt.$$

Лема 5. Існує така стала $C > 0$, що для довільної функції $u \in W_{BR}$ виконується нерівність

$$\|\mathcal{L}u\|_{W_{BR^+}^-} \geq C\|u\|_{H_{BR}}.$$

Доведення. Розглянемо довільну функцію $u \in C_{BR}^\infty$. Нехай

$$v(x, t) = -e^{ct} \int_T^t e^{-2c\tau} u(x, \tau) d\tau. \quad (16)$$

Диференціюючи за змінною t , упевнюємося, що $u(x, t) = u^{(1)}(x, t) + u^{(2)}(x, t)$, де

$$u^{(1)}(x, t) = -e^{ct} v_t(x, t), \quad (17)$$

$$u^{(2)}(x, t) = ce^{ct} v(x, t), \quad (18)$$

і, як нескладно бачити, $v \in W_{BR^+}$. Значення додатної сталої c оберемо пізніше. Далі покажемо, що для деякого додатного числа C виконується нерівність $(\mathcal{L}u, v)_{L_2(Q)} \geq C\|v\|_{W_{BR^+}}^2$.

Спочатку розглянемо скалярний добуток $(L_D u, v)_{L_2(Q)}$. За допомогою інтегрування частинами, використовуючи граничну умову (6) і зважаючи, що функція v , визначена рівністю (16), задовольняє умову $v|_{t=T} = 0$, отримаємо

$$\begin{aligned}
 \int_Q a u_t v \, dQ &= \int_Q (a u v)_t \, dQ - \int_Q a v_t u \, dQ \\
 &= \int_{\Omega} \int_0^T (a u v)_t \, dt \, d\Omega - \int_Q a u v_t \, dQ \\
 &= \int_{\Omega} ((a u v)|_{t=T} - (a u v)|_{t=0}) \, d\Omega - \int_Q a u v_t \, dQ \\
 &= - \int_Q a u v_t \, dQ = - \int_Q a u^{(1)} v_t \, dQ - \int_Q a u^{(2)} v_t \, dQ. \tag{19}
 \end{aligned}$$

Зважаючи на співвідношення (16) та умову (6), отримаємо

$$\begin{aligned}
 \sum_{i,j=1}^n \int_Q ((a_{ij} u_{x_j})_{x_i} v)_t \, dQ &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \int_0^T ((a_{ij} u_{x_j})_{x_i} v)_t \, dt \, d\Omega \\
 &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} ((a_{ij} u_{x_j}|_{t=T})_{x_i} v|_{t=T} - (a_{ij} u_{x_j}|_{t=0})_{x_i} v|_{t=0}) \, d\Omega = 0.
 \end{aligned}$$

Тепер, використовуючи формулу Гаусса та враховуючи останню рівність, маємо

$$\begin{aligned}
 - \int_Q \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} u_{x_j})_{x_i} v \, dQ &= - \int_Q \sum_{i,j=1}^n ((a_{ij} u_{x_j})_{x_i} v)_t \, dQ + \int_Q \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} u_{x_j})_{x_i} v_t \, dQ \\
 &= - \int_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_j} v_{x_i t} \, dQ \\
 &= - \int_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_j}^{(1)} v_{x_i t} \, dQ - \int_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_j}^{(2)} v_{x_i t} \, dQ. \tag{20}
 \end{aligned}$$

Застосовуючи стандартним чином формулу Гаусса до доданків із b_{ij} , одержуємо

$$\begin{aligned}
 (L_D u, v)_{L_2(Q)} &= - \int_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_j}^{(1)} v_{x_i t} \, dQ - \int_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_j}^{(2)} v_{x_i t} \, dQ - \int_Q a u^{(1)} v_t \, dQ \\
 &\quad - \int_Q a u^{(2)} v_t \, dQ + \int_Q \sum_{i,j=1}^n b_{ij} u_{x_j}^{(1)} v_{x_i} \, dQ + \int_Q \sum_{i,j=1}^n b_{ij} u_{x_j}^{(2)} v_{x_i} \, dQ
 \end{aligned}$$

$$+ \int_Q bu^{(1)}v \, dQ + \int_Q bu^{(2)}v \, dQ.$$

Доданок $u^{(1)}$ співпадає з функцією u з доведення леми 5 роботи [2]. У згаданій роботі показано, що

$$- \int_Q av_t u^{(1)} \, dQ = \int_Q ae^{ct} v_t^2 \, dQ \geq 0, \quad (21)$$

$$- \int_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_j}^{(1)} v_{x_i} \, dQ = \int_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij} e^{ct} v_{x_j} v_{x_i} \, dQ \geq \alpha \int_Q \sum_{i=1}^n e^{ct} v_{x_i}^2 \, dQ, \quad (22)$$

$$\int_Q bu^{(1)}v \, dQ = \frac{1}{2} \int_{\Omega} bv^2|_{t=0} \, d\Omega + \frac{c}{2} \int_Q be^{ct} v^2 \, dQ, \quad (23)$$

$$\int_Q \sum_{i,j=1}^n b_{ij} u_{x_j}^{(1)} v_{x_i} \, dQ = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n b_{ij} v_{x_j}|_{t=0} v_{x_i}|_{t=0} \, d\Omega + \frac{c}{2} \int_Q \sum_{i,j=1}^n b_{ij} e^{ct} v_{x_j} v_{x_i} \, dQ. \quad (24)$$

Далі в роботі [2] використано умови невід'ємності b та невід'ємної визначеності $\{b_{ij}\}_{i,j=1}^n$. Використовуючи інший підхід, позбавимось цих обмежень. Нехай стала M мажорує всі коефіцієнти b , $\{b_{ij}\}_{i,j=1}^n$ в області Ω . Використовуючи нерівності Пуанкаре і Коші, оцінюємо доданки співвідношень (23) і (24):

$$\frac{c}{2} \int_Q be^{ct} v^2 \, dQ \geq -\frac{cM}{2} \int_Q e^{ct} v^2 \, dQ \geq -\frac{cMC_p}{2} \sum_{i=1}^n \int_Q e^{ct} v_{x_i}^2 \, dQ, \quad (25)$$

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} bv^2|_{t=0} \, d\Omega \geq -\frac{MC_p}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_{x_i}^2|_{t=0} \, d\Omega, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{c}{2} \int_Q \sum_{i,j=1}^n b_{ij} e^{ct} v_{x_j} v_{x_i} \, dQ &\geq -\frac{Mc}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_Q e^{ct} |v_{x_j} v_{x_i}| \, dQ \\ &\geq -\frac{Mc}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_Q \frac{e^{ct}}{2} (v_{x_j}^2 + v_{x_i}^2) \, dQ = -\frac{nMc}{2} \sum_{i=1}^n \int_Q e^{ct} v_{x_i}^2 \, dQ, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n b_{ij} v_{x_j}|_{t=0} v_{x_i}|_{t=0} \, d\Omega &\geq -\frac{M}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n |v_{x_j}|_{t=0} |v_{x_i}|_{t=0} \, d\Omega \\ &\geq -\frac{M}{4} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (v_{x_j}^2|_{t=0} + v_{x_i}^2|_{t=0}) \, d\Omega \\ &= -\frac{nM}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_{x_i}^2|_{t=0} \, d\Omega. \end{aligned} \quad (28)$$

Загалом, враховуючи (21)–(28), для доданків із $u^{(1)}$ отримаємо

$$\begin{aligned}
 & - \int_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_j}^{(1)} v_{x_i t} dQ - \int_Q a u^{(1)} v_t dQ - \int_Q \sum_{i,j=1}^n \left(b_{ij} u_{x_j}^{(1)} \right)_{x_i} v dQ + \int_Q b u^{(1)} v dQ \\
 & \geq \alpha \int_Q \sum_{i=1}^n e^{ct} v_{x_i}^2 dQ - \frac{c M C_p}{2} \sum_{i=1}^n \int_Q e^{ct} v_{x_i}^2 dQ \\
 & \quad - \frac{M C_p}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_{x_i}^2|_{t=0} d\Omega - \frac{n M c}{2} \sum_{i=1}^n \int_Q e^{ct} v_{x_i}^2 dQ - \frac{n M}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_{x_i}^2|_{t=0} d\Omega. \quad (29)
 \end{aligned}$$

Перейдемо до доданків із $u^{(2)}$. Використовуючи рівність (18), проінтегруємо частинами другий доданок співвідношення (19):

$$\begin{aligned}
 - \int_Q a v_t u^{(2)} dQ &= -c \int_Q a v_t e^{ct} v dQ = -\frac{c}{2} \int_Q (a e^{ct} v^2)_t dQ + \frac{c^2}{2} \int_Q a e^{ct} v^2 dQ \\
 &= -\frac{c}{2} \int_{\Omega} \int_0^T (a e^{ct} v^2)_t dt d\Omega + \frac{c^2}{2} \int_Q a e^{ct} v^2 dQ \\
 &= -\frac{c}{2} \int_{\Omega} (a e^{cT} v^2|_{t=T} - a v^2|_{t=0}) d\Omega + \frac{c^2}{2} \int_Q a e^{ct} v^2 dQ \\
 &= \frac{c}{2} \int_{\Omega} a v^2|_{t=0} d\Omega + \frac{c^2}{2} \int_Q a e^{ct} v^2 dQ. \quad (30)
 \end{aligned}$$

Враховуючи умову (4), права частина останньої рівності є невід'ємною.

Для другого доданка співвідношення (20), використовуючи інтегрування частинами, аналогічно до перетворень, зроблених у (24), та додатково застосовуючи нерівність (5), одержимо

$$\begin{aligned}
 -c \int_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij} e^{ct} v_{x_j} v_{x_i t} dQ &= \frac{c}{2} \int_Q \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} e^{ct} v_{x_j} v_{x_i})_t dQ + \frac{c^2}{2} \int_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij} e^{ct} v_{x_j} v_{x_i} dQ \\
 &= \frac{c}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{x_j} v_{x_i}|_{t=0} d\Omega + \frac{c^2}{2} \int_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij} e^{ct} v_{x_j} v_{x_i} dQ \\
 &\geq \frac{\alpha c}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2|_{t=0} d\Omega + \frac{\alpha c^2}{2} \int_Q e^{ct} \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 dQ. \quad (31)
 \end{aligned}$$

Також, використовуючи нерівності Пуанкаре та Коші, маємо

$$\int_Q b u^{(2)} v dQ = c \int_Q b e^{ct} v^2 dQ \geq -c M C_p \sum_{i=1}^n \int_Q e^{ct} v_{x_i}^2 dQ \quad (32)$$

і

$$\begin{aligned}
-\int_Q \sum_{i,j=1}^n \left(b_{ij} u_{x_j}^{(2)} \right)_{x_i} v dQ &= \int_Q \sum_{i,j=1}^n b_{ij} u_{x_j}^{(2)} v_{x_i} dQ \\
&= c \int_Q \sum_{i,j=1}^n b_{ij} e^{ct} v_{x_j} v_{x_i} dQ \geq -nMc \sum_{i=1}^n \int_Q e^{ct} v_{x_i}^2 dQ. \quad (33)
\end{aligned}$$

Загалом, враховуючи (30) – (33), для доданків із $u^{(2)}$ отримаємо

$$\begin{aligned}
& - \int_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_j}^{(2)} v_{x_i} dQ - \int_Q a u^{(2)} v_t dQ \\
& - \int_Q \sum_{i,j=1}^n \left(b_{ij} u_{x_j}^{(2)} \right)_{x_i} v dQ + \int_Q b u^{(2)} v dQ \\
& \geq \frac{\alpha c}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2|_{t=0} d\Omega + \frac{\alpha c^2}{2} \int_Q e^{ct} \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 dQ \\
& - cMC_p \sum_{i=1}^n \int_Q e^{ct} v_{x_i}^2 dQ - nMc \sum_{i=1}^n \int_Q e^{ct} v_{x_i}^2 dQ. \quad (34)
\end{aligned}$$

Таким чином, із нерівностей (29), (34) отримаємо

$$\begin{aligned}
(L_D u, v)_{L_2(Q)} &\geq -\frac{cMC_p}{2} \sum_{i=1}^n \int_Q e^{ct} v_{x_i}^2 dQ - cMC_p \sum_{i=1}^n \int_Q e^{ct} v_{x_i}^2 dQ \\
& - \frac{nMc}{2} \sum_{i=1}^n \int_Q e^{ct} v_{x_i}^2 dQ - nMc \sum_{i=1}^n \int_Q e^{ct} v_{x_i}^2 dQ \\
& - \frac{MC_p}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_{x_i}^2|_{t=0} d\Omega - \frac{nM}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_{x_i}^2|_{t=0} d\Omega \\
& + \frac{\alpha c}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2|_{t=0} d\Omega + \frac{\alpha c^2}{2} \int_Q e^{ct} \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 dQ + \alpha \int_Q e^{ct} \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 dQ \\
& = \frac{1}{2} (\alpha c^2 - 3Mc(C_p + n)) \int_Q e^{ct} \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 dQ \\
& + \frac{1}{2} (\alpha c - M(C_p + n)) \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2|_{t=0} d\Omega + \alpha \int_Q e^{ct} \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 dQ.
\end{aligned}$$

Для достатньо великого c будемо мати

$$(L_D u, v)_{L_2(Q)} \geq \alpha \int_Q e^{ct} \sum_{i=1}^n v_{x_i t}^2 dQ + \frac{1}{2}(\alpha c^2 - 3Mc(C_p + n)) \int_Q e^{ct} \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 dQ. \quad (35)$$

Тепер розглянемо скалярний добуток $(L_I u, v)_{L_2(Q)}$. З формули Гаусса та початково-крайових умов маємо

$$\begin{aligned} (L_I u, v)_{L_2(Q)} &= \sum_{i=1}^n \int_Q \int_0^t (K_i(x, t, \tau) u_{x_i}(x, \tau))_{x_i} d\tau v(x, t) dQ \\ &= - \sum_{i=1}^n \int_Q \int_0^t K_i(x, t, \tau) u_{x_i}(x, \tau) d\tau v_{x_i}(x, t) dQ \\ &= \sum_{i=1}^n \int_Q \int_0^t K_i(x, t, \tau) e^{c\tau} (v_{x_i \tau}(x, \tau) - c v_{x_i}(x, \tau)) d\tau v_{x_i}(x, t) dQ. \end{aligned} \quad (36)$$

Скориставшись лемами 3, 4 (як у роботі [2]), у рівності (36) для кожного $x \in \Omega$ отримаємо

$$\left| \sum_{i=1}^n \int_Q \int_0^t K_i(x, t, \tau) e^{c\tau} v_{x_i \tau}(x, \tau) d\tau v_{x_i}(x, t) dQ \right| \leq \frac{MT}{c} \int_Q e^{ct} \sum_{i=1}^n v_{x_i t}^2 dQ, \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n \int_Q \int_0^t K_i(x, t, \tau) e^{c\tau} c v_{x_i}(x, \tau) d\tau v_{x_i}(x, t) dQ \right| &\leq M c \sqrt{\frac{T}{c}} \int_Q e^{ct} \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 dQ \\ &= M \sqrt{Tc} \int_Q e^{ct} \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 dQ. \end{aligned} \quad (38)$$

Комбінуючи (35), (37) і (38), одержимо

$$\begin{aligned} (\mathcal{L} u, v)_{L_2(Q)} &= (L_D u, v)_{L_2(Q)} + (L_I u, v)_{L_2(Q)} \\ &\geq (L_D u, v)_{L_2(Q)} - |(L_I u, v)_{L_2(Q)}| \\ &\geq \alpha \int_Q e^{ct} \sum_{i=1}^n v_{x_i t}^2 dQ - \frac{MT}{c} \int_Q e^{ct} \sum_{i=1}^n v_{x_i t}^2 dQ \\ &\quad + \frac{1}{2}(\alpha c^2 - 3Mc(C_p + n)) \int_Q e^{ct} \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 dQ - M \sqrt{Tc} \int_Q e^{ct} \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 dQ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\alpha - \frac{MT}{c} \right) \int_Q e^{ct} \sum_{i=1}^n v_{x_i t}^2 dQ \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\alpha c^2 - 3Mc(C_p + n) - 2M\sqrt{Tc} \right) \int_Q e^{ct} \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 dQ.
\end{aligned}$$

Обираючи достатньо велике c та зважаючи на нерівність Пуанкаре, маємо

$$(\mathcal{L}u, v)_{L_2(Q)} \geq \frac{\alpha}{2} \int_Q e^{ct} \sum_{i=1}^n v_{x_i t}^2 dQ \geq C \|v\|_{W_{BR^+}}^2. \quad (39)$$

Зауважимо, що для u та v справджується нерівність

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H_{BR}}^2 &= \int_Q \left(u^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) dQ \\
&= \int_Q \left((e^{ct}(v_t - cv))^2 + \sum_{i=1}^n (e^{ct}(v_{tx_i} - cv_{x_i}))^2 \right) dQ \\
&\leq 2 \int_Q \left(e^{2ct} v_t^2 + c^2 e^{2ct} v^2 + \sum_{i=1}^n e^{2ct} v_{x_i t}^2 + \sum_{i=1}^n c^2 e^{2ct} v_{x_i}^2 \right) dQ \\
&\leq 2e^{2cT} \int_Q \left(v_t^2 + \sum_{i=1}^n v_{x_i t}^2 + c^2 v^2 + \sum_{i=1}^n c^2 v_{x_i}^2 \right) dQ \\
&= 2e^{2cT} \int_Q \left(v_t^2 + \sum_{i=1}^n v_{x_i t}^2 \right) dQ + 2e^{2cT} c^2 \int_Q \left(v^2 + \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 \right) dQ \\
&\leq 2e^{2cT} (1 + c^2 C_p) \int_Q \left(v_t^2 + \sum_{i=1}^n v_{x_i t}^2 dQ \right) \\
&= 2e^{2cT} (1 + c^2 C_p) \|v\|_{W_{BR^+}}^2.
\end{aligned}$$

А отже, враховуючи (39) і застосовуючи стандартним чином нерівність Шварца, отримуємо

$$C_1 \|u\|_{H_{BR}} \|v\|_{W_{BR^+}} \leq C \|v\|_{W_{BR^+}}^2 \leq (\mathcal{L}u, v)_{L_2(Q)} \leq \|\mathcal{L}u\|_{W_{BR^+}^-} \|v\|_{W_{BR^+}}$$

для деякої сталої C_1 . Це й завершує доведення для всіх $u \in C_{BR}^\infty$. Твердження леми для всіх інших функцій $u \in W_{BR}$ можна отримати граничним переходом так само, як і при доведенні леми 5 із [2].

Лема 6. Існує така стала $C > 0$, що для довільної функції $v \in W_{BR^+}$ виконується нерівність

$$\|\mathcal{L}^* v\|_{W_{BR}^-} \geq C \|v\|_{H_{BR^+}}.$$

Доведення аналогічне до доведення лема 5 із розглядом допоміжної функції

$$u(x, t) = e^{-ct} \int_0^t e^{2c\tau} v(x, \tau) d\tau$$

і використанням аналогів лем 3, 4.

Зауваження 2. За допомогою апіорних нерівностей (14), (15), доведених у лемах 1, 2, 5, 6, можна також показати деякі диференціальні властивості критерію якості, властивості регуляризованої задачі, побудувати та довести збіжність чисельних методів для пошуку узагальнених розв'язків та оптимального керування тощо.

Зауваження 3. Отримані результати узагальнюють дослідження з роботи [2] для інтегро-диференціального оператора. Зауважимо також, що, покладаючи $K_i \equiv 0$, маємо, що ті ж самі оцінки є правильними вже для суто диференціального псевдопараболічного оператора. Таким чином, покращено результат, отриманий у розд. 5 із [1, с. 161 – 167].

Автори висловлюють подяку фізико-математичному факультету Карлового університету, Прага, Чехія, за підтримку при написанні статті та анонімному рецензенту за надані пропозиції для покращення роботи.

Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів. Усі необхідні дані містяться в статті. Всі автори зробили рівномірний внесок у цю роботу, а також заявляють про відсутність спеціального фінансування для її виконання.

Література

1. S. I. Lyashko, *Generalized optimal control of linear systems with distributed parameters*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2002).
2. А. В. Анікушин, А. І. Андарал, *Узагальнене оптимальне керування псевдопараболічними інтегро-диференціальними системами*, Нелін. коливання, **27**, № 1, 3 – 18 (2024).
3. H. Di, Y. Shang, X. Zheng, *Global well-posedness for a fourth order pseudo-parabolic equation with memory and source terms*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B., **21**, № 3, 781 – 801 (2016).
4. H. Di, Y. Shang, *Global existence and nonexistence of solutions for the nonlinear pseudo-parabolic equation with a memory term*, Math. Methods Appl. Sci., **38**, № 17, 3923 – 3936 (2015).
5. H. Di., Y. Shang, J. Yu, *Blow-up analysis of a nonlinear pseudo-parabolic equation with memory term*, AIMS Math., **5**, № 4, 3408 – 3422 (2020).
6. M. Ptashnyk, *Degenerate quasilinear pseudoparabolic equations with memory terms and variational inequalities*, Nonlinear Anal., **66**, № 12, 2653 – 2675 (2007).
7. N. D. Phuong, N. A. Tuan, D. Kumar, N. H. Tuan, *Initial value problem for fractional Volterra integrodifferential pseudo-parabolic equations*, Math. Model. Nat. Phenom., **16**, № 27, 1 – 14 (2021).
8. X. Zhang, Z. Jiang, *A mixed covolume method for the pseudo-parabolic integro-differential equation on triangular grids*, Proc. 3rd International Conference on Mechatronics, Robotics and Automation, **15**, 920 – 933 (2015).
9. Z. Feng, H. Li, Y. Liu, S. He, *An adaptive least-squares mixed finite element method for pseudo-parabolic integro-differential equations*, Int. J. Math. Comput. Sci., **5**, № 12, 1984 – 1991 (2011).
10. F. Chen, *Fully-discrete H1-Galerkin mixed finite element method for pseudo-parabolic integro-differential equations*, J. Math. Comput. Sci., **3**, № 2, 631 – 640 (2013).
11. H. Che, Z. Zhou, Z. Jiang, Y. Wang, *H1-Galerkin expanded mixed finite element methods for nonlinear pseudo-parabolic integro-differential equations*, Numer. Methods Partial Differential Equations, **29**, № 3, 799 – 817 (2012).

12. K. Wang, *Two-grid methods for nonlinear pseudo-parabolic integro-differential equations by finite element method*, Comput. Math. Appl., **168**, 174 – 189 (2024).
13. А. Гуляницький, В. Семенов, *Інтегро-диференціальні системи псевдопараболічного типу: апіорні оцінки та імпульсно-точкова керованість*, Допов. НАН України, № 4, 43 – 49 (2012).
14. H. Chen, T. Hou, *A priori and a posteriori error estimates of H1-Galerkin mixed finite element methods for optimal control problems governed by pseudo-hyperbolic integro-differential equations*, Appl. Math. Comput., **328**, 100 – 112 (2018).
15. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, De Gruyter, Berlin (2016).
16. І. А. Бондар, *Лінійні крайові задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь з виродженням ядром. Резонансний випадок для слабо збуреної крайової задачі*, Нелін. коливання, **25**, № 2-3, 174 – 183 (2022); **English translation:** J. Math. Sci. (N.Y.), **274**, 822 – 832 (2023).
17. О. А. Бойчук, І. А. Головацька, *Крайові задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь*, Нелін. коливання, **16**, № 4, 460 – 474 (2013); **English translation:** J. Math. Sci. (N.Y.), **203**, 306 – 321 (2014).
18. І. А. Бондар, Р. Ф. Овчар, *Біфуркація розв'язків крайової задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь з виродженням ядром*, Нелін. коливання, **20**, № 4, 465 – 476 (2017); **English translation:** J. Math. Sci. (N.Y.), **238**, 224 – 235 (2019).
19. D. A. Klyushin, S. I. Lyashko, D. A. Nomirovskii, Yu. I. Petunin, V. V. Semenov, *Generalized solutions of operator equations and extreme elements*, Springer, New York (2011).
20. О. А. Boichuk, О. Pokutnyi, *Solutions of the Schrodinger equation in a Hilbert space*, Bound. Value Probl., № 4 (2014).
21. С. И. Ляшко, *Некоторые вопросы импульсно-точечного управления псевдопараболическими системами*, Укр. мат. журн., **37**, № 3, 368 – 371 (1985); **English translation:** Ukr. Mat. J., **37**, № 3, 292 – 295 (1985).
22. С. И. Ляшко, *Импульсно-точечное управление псевдопараболическими системами*, Кибернетика, № 2, 116 – 117 (1986).
23. S. I. Lyashko, V. V. Semenov, *Controllability of linear distributed systems in classes of generalized actions*, Cybernet. Systems Anal., № 37, 13 – 32 (2001).
24. Ju. M. Berezanski, *Expansions in eigenfunctions of selfadjoint operators*, Transl. Math. Monogr., **17**, American Mathematical Society, Providence, RI (1968).
25. В. П. Диденко, *О краевых задачах для многомерных гиперболических уравнений с вырождением*, Докл. АН СССР, **205**, № 4, 763 – 766 (1972).
26. А. В. Анікушин, Д. А. Номіровський, *Узагальнені розв'язки для лінійних операторів з послабленими апіорними нерівностями*, Укр. мат. журн., **62**, № 8, 1011 – 1021 (2010); **English translation:** Ukr. Math. J., **62**, № 8, 1175 – 1186 (2011).
27. I. V. Sergienko, O. M. Khimich, D. A. Klyushin, V. I. Lyashko, S. I. Lyashko, V. V. Semenov, *Formation and development of the scientific school of the mathematical theory of filtration*, Cybernet. Systems Anal., № 59, 61 – 70 (2023).
28. D. A. Nomirovskiy, *Generalized solvability and optimization of a parabolic system with a discontinuous solution*, J. Differential Equations, **233**, № 1, 1 – 21 (2007).
29. S. I. Lyashko, D. A. Nomirovskiy, *Generalized solutions and optimal controls in systems describing the dynamics of a viscous stratified fluid*, Differ. Equat., **39**, № 1, 90 – 98 (2003).
30. S. I. Lyashko, D. A. Nomirovskii, T. I. Sergienko, *Trajectory and final controllability in hyperbolic and pseudohyperbolic systems with generalized actions*, Cybernet. Systems Anal., **37**, № 6, 756 – 763 (2001).
31. S. I. Lyashko, D. A. Nomirovskii, *The generalized solvability and optimization of parabolic systems in domains with thin low-permeable inclusions*, Cybernet. Systems Anal., **39**, № 6, 737 – 745 (2003).
32. D. A. Nomirovskiy, *Unique solvability of pseudohyperbolic equations with singular right-hand sides*, Math. Notes, **80**, № 3-4, 550 – 562 (2006).
33. D. A. Nomirovskiy, *The control of pseudohyperbolic systems*, J. Math. Sci. (N.Y.), **97**, № 2, 3945 – 3951 (1999).
34. D. A. Nomirovskiy, *Generalized solvability and optimization of a parabolic system with a discontinuous solution*, J. Differ. Equat., **233**, № 1, 1 – 21 (2007).

35. D. A. Nomirovskii, O. I. Vostrikov, *Generalized statements and properties of models of transport processes in domains with cuts*, Cybernet. Systems Anal., **52**, 931–942 (2016).
36. I. B. Tymchyshyn, D. A. Nomirovskii, *Generalized solvability of a parabolic model describing transfer processes in domains with thin inclusions*, Differ. Equat., № 57, 1053–1062 (2021).
37. A. Anikushyn, *Pulse and point optimal control of linear hyperbolic integro-differential systems with mixed boundary conditions*, J. Optim. Differ. Equat. Appl., **32**, № 2, 137–155 (2024).
38. A. Anikushyn, Kh. Hranishak, *Point control of linear hyperbolic integro-differential systems*, Bull. T. Shevchenko Nat. Univ. Kyiv. Phys. Math., № 2, 20–28 (2024).
39. A. Anikushyn, V. Lyashko, O. Samosonok, *Optimal control of the systems governed by linear hyperbolic integro-differential equations*, Bull. T. Shevchenko Nat. Univ. Kyiv. Phys. Math., № 1, 111–118 (2024).
40. А. В. Анікушин, *Узагальнена розв'язність гіперболічних інтегро-диференціальних рівнянь*, Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки, № 4, 60–65 (2013).
41. A. Anikushyn, A. Hulianyskyi, *Generalized solvability of parabolic integro-differential equations*, Differ. Equat., **50**, № 1, 98–109 (2014).
42. A. Anikushyn, *Generalized optimal control for systems described by linear integro-differential equations with nonnegative definite integral operators*, J. Automat. Inform. Sci., **46**, № 6, 58–67 (2014).

Одержано 02.08.24,
після доопрацювання — 31.10.24