

ДИНАМІКА РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО КЛАСУ КУСКОВО-ЛІНІЙНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ ІЗ ГІСТЕРЕЗИСОМ

Абдивалі Акбергенов, Анатолій Дворник, Олена Романенко

Інститут математики НАН України

вул. Терещенківська, 3, Київ, 01601, Україна

e-mail: abdivali.akbergenov@gmail.com, відповідальний за листування

a.dvornyk@gmail.com

eromanenko@bigmir.net

For continuous argument difference equations of the form $x(t+1) = h(x(t))$, $t \geq 0$, where h is a piecewise linear function with hysteresis, we present and graphically illustrate two fundamentally different scenarios of the solution behavior: typical solutions are either asymptotically periodic and piecewise constant or strongly chaotic and asymptotic to functions that are discontinuous at every point.

Для різницеви рівнянь із неперервним аргументом вигляду $x(t+1) = h(x(t))$, $t \geq 0$, де h — кусково-лінійна функція з гістерезисом, наведено та проілюстровано два кардинально відмінні сценарії якісної поведінки розв'язків: коли типовими є асимптотично періодичні кусково-сталі розв'язки і коли типовими є сильно хаотичні розв'язки, асимптотичні до функцій, розривних у кожній точці.

Вступ. Загалом кажучи, систему з гістерезисом описує вхід-вихід модель, складена з функціональних гілок і механізму пам'яті, що однозначно визначає, яку гілку слід використовувати у кожен момент часу. Розглядуване у цій статті рівняння описує найпростішу вхід-вихід модель, що складається з двох лінійних гілок, споряджених природним правилом переключення: якщо в якийсь момент використовується певна гілка, то вона використовується і надалі, допоки це можливо, і лише тоді, коли ця гілка стає незастосовною, відбувається переключення на іншу гілку.

Розглядаємо різницеве рівняння з неперервним часом

$$x(t+1) = h(x(t)), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (1)$$

де $x: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ — невідома кусково-неперервна функція¹ і $h: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ — двозначна функція, задана лінійними функціями

$$f(z) = az \quad \text{і} \quad g(z) = b(z-1) + 1, \quad a, b > 0. \quad (2)$$

Наявність гістерезису реалізується у двох випадках:

$$h(z) = \begin{cases} g(z) & \text{при } 0 \leq z \leq \beta, \\ f(z) & \text{при } \alpha \leq z \leq 1, \end{cases} \quad 0 < \alpha < \beta < 1, \quad 0 < a < 1, \quad 0 < b < 1, \quad (3)$$

¹ Функцію з $U \subset \mathbb{R}$ у $\mathbb{R}$ називаємо *кускowo-неперервною* (кускowo-сталою), якщо U розбивається на інтервали, на кожному з яких ця функція є неперервною (сталою), а множина її розривів не має скінченних граничних точок.

$$h(z) = \begin{cases} f(z) & \text{при } 0 \leq z \leq \beta, \\ g(z) & \text{при } \alpha \leq z \leq 1, \end{cases} \quad 0 < \alpha < \beta < 1, \quad 1 < a < 1/\beta, \quad 1 < b < 1/(1-\alpha), \quad (4)$$

доповнених *правилами переключення*: якщо для точки $z \in [0, 1]$ одне зі значень $f(z)$ чи $g(z)$ вибрано як $z_1 := h(z)$, то наступні значення $z_{n+1} := h(z_n) = h^{n+1}(z)$, $n = 1, 2, \dots$, визначаються формулою

$$z_{n+1} = h(z_n) = \begin{cases} g(z_n) & \text{при } z_n = g(z_{n-1}), \quad z_n \leq \beta \quad (z_n \geq \alpha), \\ f(z_n) & \text{при } z_n = g(z_{n-1}), \quad z_n > \beta \quad (z_n < \alpha), \\ f(z_n) & \text{при } z_n = f(z_{n-1}), \quad z_n \geq \alpha \quad (z_n \leq \beta), \\ g(z_n) & \text{при } z_n = f(z_{n-1}), \quad z_n < \alpha \quad (z_n > \beta), \end{cases} \quad (5)$$

де другу умову на z_n подано без дужок для випадку (3), (5) і у дужках для випадку (4), (5). При $z < \alpha$ та $z > \beta$ значення z_1 визначене однозначно, якщо ж $z \in [\alpha, \beta]$, то знаходимо z_1 за допомогою тієї ж гілки відображення h , що і для $z < \alpha$ (звісно, нарівно можна використати ту гілку, що і для $z > \beta$). Моменти переходу з однієї гілки на іншу визначають *точки переключення* $z = \alpha$ і $z = \beta$.

Правила (5) перетворюють двозначне відображення

$$z \mapsto h(z), \quad z \in I = [0, 1], \quad (6)$$

на однозначне *відображення з пам'яттю* (з післядією): при кожній ітерації використовується не лише поточна інформація, але й деяка інформація з минулого. Надалі під відображенням h будемо розуміти саме це відображення з пам'яттю (рис. 1). Зазначимо, що на обох гілках f і g відображення $h \in$ *стискальним* у випадку (3), (5) і *розтягальним* у випадку (4), (5)².

Надалі буде потрібна низка понять з теорії динамічних систем, деякі з яких мають специфічні особливості для відображень із пам'яттю. Нехай маємо динамічну систему, породжену однозначним відображенням із пам'яттю $z \mapsto \xi(z)$, і ξ^k — k -та ітерація відображення ξ , тобто $\xi^k(z) = \xi(\xi^{k-1}(z))$, $k = 1, 2, \dots$, $\xi^0(z) = z$. *Траєкторією* $Tr(z)$ точки z називаємо послідовність точок $z, z_1 = \xi(z), z_2 = \xi^2(z), \dots$; траєкторія $Tr(z_k)$, $k \geq 1$, може не збігатися з відрізком $z_k, z_{k+1}, \dots$ траєкторії $Tr(z)$. *Атрактором траєкторії* $Tr(z)$ називаємо множину її граничних точок. Точку z (траєкторію $Tr(z)$) називаємо *періодичною*, якщо існує ціле $p > 0$, для якого $\xi^p(z) = z$; а найменше з таких p називаємо *періодом* точки z (траєкторії $Tr(z)$). Кожна p -періодична точка породжує p -періодичну траєкторію, проте належність точки до періодичної траєкторії не гарантує періодичності цієї точки. Множину попарно відмінних точок p -періодичної траєкторії називаємо *циклом* періоду p ; він породжується будь-якою періодичною точкою цієї траєкторії. *Басейном p -періодичної точки* z_* називаємо множину всіх точок z таких, що $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi^{pk}(z) = z_*$. *Басейном циклу* називаємо об'єднання басейнів усіх періодичних точок, які його породжують. Траєкторію

² У [8] досліджено інший варіант кусково-лінійного відображення з гістерезисом, яке на одній гілці є стискальним, а на другій — розтягальним.

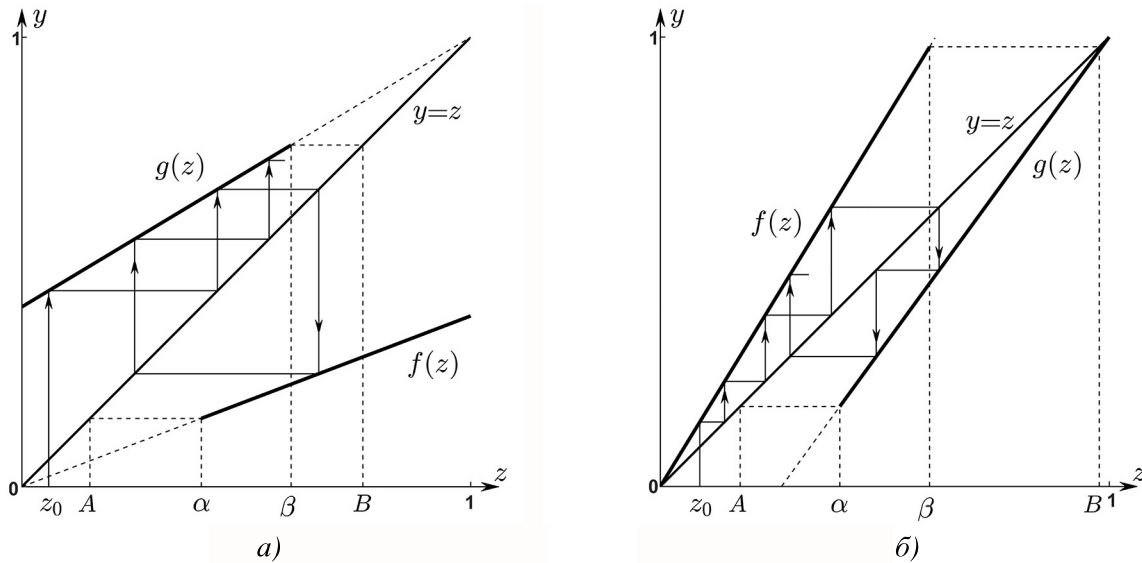


Рис. 1. Відображення з гістерезисом і типові траєкторії.

називаємо *асимптотично періодичною*, якщо її атрактором є цикл; у цьому разі також кажемо, що траєкторія притягується до циклу. *Образи множини* $M \subseteq I$ визначаємо формулою $\xi^i(M) = \bigcup_{z \in M} \xi^i(z)$, $i = 1, 2, \dots$. Множину M називаємо *згодом-інваріантною*, якщо існує ціле $n > 0$ таке, що $\xi^i(M) = M$, $i \geq n$. Внутрішність множини M позначаємо $\text{int } M$.

Відображення h генерує два принципово відмінні сценарії поведінки розв'язків рівняння (1). У випадку (3), (5) розв'язки є регулярними — асимптотично періодичними, а у випадку (4), (5) вони сильно хаотичні — асимптотичні до функції, розривної у кожній точці.

Про ці сценарії раніше вже йшлося у роботах [1, 2], але там рівняння (1) розглядали побіжно, у межах ширшої тематики. Тому видалося доцільним присвятити рівнянню (1) окремий допис, де систематизовано та значною мірою доповнено відповідні результати, зокрема доведеннями і графічною візуалізацією. До рівнянь вигляду (1) зводяться певні класи кусково-лінійних крайових задач для рівнянь із частинними похідними [3]; подібні крайові задачі зустрічаються при математичному моделюванні низки природних гістерезисних явищ (див., наприклад, [4–7]) і можуть слугувати ідеалізованими моделями у більш складних випадках.

Попередні зауваження. Кожен розв'язок рівняння (1) однозначно задається своїми значеннями на початковому інтервалі $[0, 1]$ і може бути поданий у вигляді

$$\begin{aligned} x_\varphi(t) &= h^{\lfloor t \rfloor}(\varphi(\langle t \rangle)), \quad t \geq 1, \\ \varphi(t) &= x(t), \quad t \in [0, 1), \end{aligned} \quad (7)$$

де $\lfloor \cdot \rfloor$ і $\langle \cdot \rangle$ позначають цілу та дробову частини числа, h^k — k -та ітерація відображення h , отримана за правилами переключення. Функції $\varphi: [0, 1) \rightarrow I$ називаємо *початковими функціями*. Оскільки розглядаються кусково-неперервні розв'язки, то початкові функції також кусково-неперервні або неперервні (що надалі окремо не обумовлюється).

З (7) випливає, що розв'язки $x(t)$ є обмеженими: $0 \leq x(t) \leq 1$, і будуються шляхом почергових переходів від одного з рівнянь $x(t+1) = f(x(t))$ або $x(t+1) = g(x(t))$ до іншого.

Притому, оскільки аргумент у цих рівняннях неперервний, то поведінка їхніх розв'язків визначається динамікою як точок, так і околів (!) точок при відображеннях f і g (див. [9 – 12]).

Отже, для аналізу рівняння (1) важливо розуміти динаміку відображення h . Траєкторії $Tr(z)$, $z \in I$, є обмеженими і поглинаються інтервалом $[A, B]$, де

$$A = f(\alpha), \quad B = g(\beta) \quad \text{і} \quad z \in I \quad \text{у випадку (3), (5),}$$

$$A = g(\alpha), \quad B = f(\beta) \quad \text{і} \quad z \in \text{int } I \quad \text{у випадку (4), (5).}$$

Тобто траєкторії за “скінченний час” (для кожної свій) потрапляють до інтервалу $[A, B]$ і вже його не залишають (рис. 1), тож саме на $[A, B]$ відбуваються всі динамічні складності.

Виявляється, що динаміка відображення h , а отже, і розв'язків рівняння (1) значною мірою визначається множиною прообразів точок переключення $z = \alpha$ і $z = \beta$, тобто множиною

$$S(h) = \{z \in I : \exists i \geq 0 \text{ таке, що } h^i(z) = \alpha \text{ або } h^i(z) = \beta\}. \quad (8)$$

Залежно від структури множини $S(h)$ відбуваються кардинально відмінні сценарії асимптотичної поведінки розв'язків.

Розв'язки, асимптотичні до періодичних кусково-сталих функцій. Розглянемо випадок, коли відображення h визначається формулами (3), (5) і є стискальним на обох гілках (рис. 1, а)). У такому разі h — це частинний випадок відображення, дослідженого у [13]. З цієї роботи випливають, зокрема, такі факти: якщо

$$g(0) > f(1), \quad \text{тобто} \quad a + b < 1, \quad (9)$$

то:

- 1) множина $S(h)$ ніде не щільна і майже завжди скінченна;
- 2) наступні твердження еквівалентні:
 - $S(h)$ — скінченна множина,
 - всі траєкторії відображення h асимптотично періодичні;
- 3) майже завжди відображення h має або один цикл, або два цикли, періоди яких різняться на 2; а саме, множина D^* значень параметрів, при яких справджуються ці властивості, містить відкриту підмножину, щільну в області $D = \{0 < \alpha, \beta < 1, a, b > 0, a + b < 1\}$.

Умова (9) означає, що $f([0, \beta]) \cap g([\alpha, 1]) = \emptyset$ і, отже, у будь-якої точки $z \in I$ існує не більше одного прообразу. Завдяки цьому виключається можливість одночасного існування кількох періодичних траєкторій одного періоду та існування траєкторій, складніших за періодичні та асимптотично періодичні.

Якщо J — інтервал із $I \setminus \overline{S(h)}$, то незалежно від того, є множина $S(h)$ скінченною чи нескінченною, $h^i(J)$ також є інтервалом і

$$\text{diam } h^i(J) < C^i \text{diam } J, \quad C = \max\{a, b\} < 1, \quad i = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Звідси випливає, що за скінченності множини $S(h)$ існує ціле $p = p(h) > 1$ таке, що функція

$$\mathcal{H}(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} h^{pk}(z) \quad (11)$$

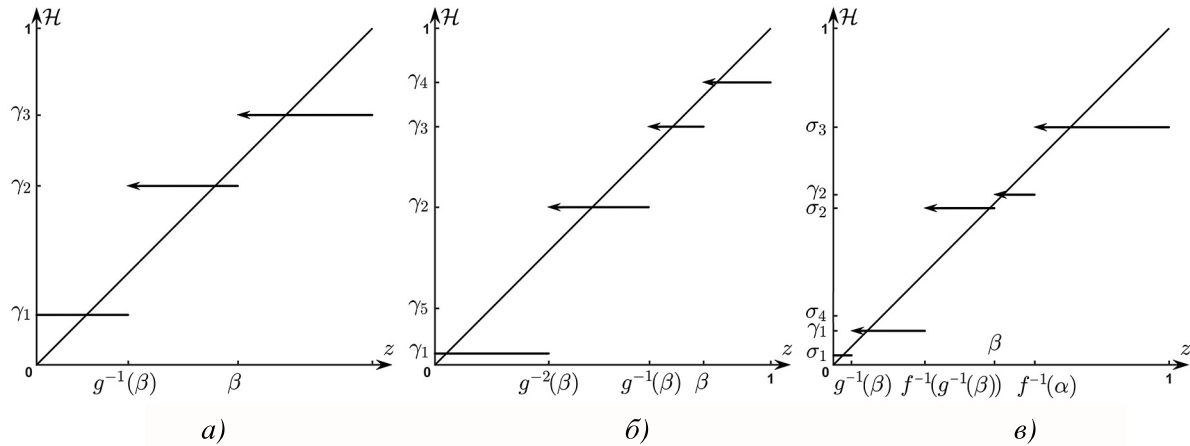


Рис. 2. Функція $\mathcal{H}(z)$ при $a = 0,2$, $b = 0,55$: а) $\alpha = 0,4$, $\beta = 0,6$, $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ — цикл періоду 3, $p = 3$; б) $\alpha = 0,1$, $\beta = 0,8$, $\{\gamma_1, \dots, \gamma_5\}$ — цикл періоду 5, $p = 5$; в) $\alpha = 0,12$, $\beta = 0,48$, $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ і $\{\sigma_1, \dots, \sigma_4\}$ — цикли періоду 2 і 4, $p = 4$.

визначена при всіх $z \in I$, притім границя у правій частині (11) є рівномірною. Отже, функція $\mathcal{H}(z)$ має розриви на певній множині $\Upsilon \subset S(h)$ (яка залежить від значень параметрів із області D) і дорівнює константі на кожному інтервалі неперервності (зокрема на інтервалах із $I \setminus S(h)$); її область значень — це скінченна множина $\Theta(h)$, яку утворюють числові значення періодичних точок відображення h , а p — найменше спільне кратне (надалі позначуване як lcm) їхніх періодів; до того ж

$$h^n(\mathcal{H}(z)) = h^{\lfloor n \rfloor \bmod p} \mathcal{H}(z), \quad n = 0, 1, \dots, \quad z \in I. \quad (12)$$

На рис. 2 наведено приклади функції $\mathcal{H}(z)$. У випадку а) множина $S(h)$ складається з множин $S_\alpha(h) = \{\alpha\}$ та $S_\beta(h) = \{\beta, g^{-1}(\beta)\}$, а відображення h має три 3-періодичні точки γ_1 , $\gamma_2 = g(\gamma_1)$, $\gamma_3 = g(\gamma_2)$. Ці точки утворюють цикл періоду 3, який притягує всі траєкторії. Відповідно, функція $\mathcal{H}(z)$ набуває значень γ_1 , γ_2 та γ_3 і має розриви на множині $S_\beta(h)$.

У випадку б) ситуація схожа (але з однією відмінністю): $S_\alpha(h) = \{\alpha, f^{-1}(\alpha)\}$, $S_\beta(h) = \{\beta, g^{-1}(\beta), g^{-2}(\beta)\}$ і всі траєкторії притягуються до циклу періоду 5, який утворений чотирма 5-періодичними точками $\gamma_1, \gamma_2 = g(\gamma_1), \dots, \gamma_4 = g(\gamma_3)$ та неперіодичною точкою $\gamma_5 = f(\gamma_4)$. Функція $\mathcal{H}(z)$ розривна на множині $S_\beta(h)$ і внаслідок існування у циклі неперіодичної точки набуває тільки чотирьох значень $\gamma_1, \dots, \gamma_4$ (а не всіх значень, відповідних точкам циклу, як у випадку а)). В обох наведених випадках відсутність розривів на множині $S_\alpha(h)$ зумовлена тим, що всі періодичні точки “згенеровані” гілкою g відображення h .

Випадок в) ілюструє ситуацію, коли відображення h має два притягальні цикли. А саме, цикл періоду 2, утворений 2-періодичними точками γ_1 і $\gamma_2 = f(\gamma_1)$, і цикл періоду 4, утворений 4-періодичними точками $\sigma_1, \sigma_2 = g(\sigma_1)$, $\sigma_3 = g(\sigma_2)$ та неперіодичною точкою $\sigma_4 = f(\sigma_3)$. Тепер (завдяки точці γ_2) при формуванні розривів функції $\mathcal{H}(z)$ разом із множиною $S_\beta(h) = \{\beta, g^{-1}(\beta), f^{-1}(g^{-1}(\beta))\}$ “працює” і множина $S_\alpha(h) = \{\alpha, f^{-1}(\alpha)\}$. Функція $\mathcal{H}(z)$ розривна на множині $S_\beta(h) \cup \{f^{-1}(\alpha)\}$ і набуває п'ятьох значень, що відповідають періодичним точкам³.

³ а) $\gamma_1 \approx 0,1485$, $\gamma_2 \approx 0,5316$, $\gamma_3 \approx 0,7424$; б) $\gamma_1 \approx 0,03357$, $\gamma_2 \approx 0,4685$, $\gamma_3 \approx 0,7077$, $\gamma_4 \approx 0,8392$, $\gamma_5 \approx 0,1678$; в) $\gamma_1 \approx 0,1011$, $\gamma_2 \approx 0,5056$, $\sigma_1 \approx 0,9282$, $\sigma_2 \approx 0,4655$, $\sigma_3 \approx 0,7061$, $\sigma_4 \approx 0,1312$.

Описані вище властивості траєкторій відображення h очевидним чином трансформуються в асимптотичну періодичність розв'язків розглядуваного різницевого рівняння. Будемо користуватися, як запропоновано в [1], інтегральною метрикою

$$\rho(y_1|_{[\sigma, \tau]}, y_2|_{[\sigma, \tau]}) = \int_{\sigma}^{\tau} |y_1(t) - y_2(t)| dt, \quad (13)$$

де $y|_{[\sigma, \tau]}$ — звуження функції $y(t)$ на інтервал $[\sigma, \tau]$.

Теорема 1. В області параметрів D у майже всіх рівнянь вигляду (1) всі розв'язки є асимптотично періодичними. А саме, коли у рівнянні (1) параметри належать області D^* , то при будь-якій початковій функції $\varphi: [0, 1) \rightarrow I$ розв'язок $x_{\varphi}(t)$ прямує до p -періодичної функції

$$\mathcal{P}_{\varphi}(t) = h^{[t] \bmod p}(\mathcal{H}(\varphi(\langle t \rangle))), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (14)$$

де $p = n$ або $p = \text{lcm}(n, n+2)$ і n — відповідно період єдиного циклу або менший з періодів двох циклів відображення h . Точніше,

$$\rho(x_{\varphi}|_{[T, T+p]}, \mathcal{P}_{\varphi}|_{[T, T+p]}) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad T \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Доведення. Нехай $k = [T] \bmod p$. Розіб'ємо інтервал $[T, T+p]$ на множини

$$l_j = [kp + j, kp + j + 1), \quad j = 1, \dots, p-1,$$

$$l_0 = ([kp, kp+1) \cup [k(p+1), k(p+1)+1)) \cap [T, T+p]$$

і введемо позначення

$$S(h, \varphi) = \{t \in \mathbb{R}^+ : \varphi(\langle t \rangle) \in S(h)\} \quad \text{і} \quad L_j = l_j \setminus S(h, \varphi), \quad j = 0, 1, \dots, p-1. \quad (16)$$

Зі співвідношень (7), (11), (12) і (14), виводимо

$$\begin{aligned} & \rho(x_{\varphi}|_{[T, T+p]}, \mathcal{P}_{\varphi}|_{[T, T+p]}) \\ &= \sum_{j=0}^{p-1} \int_{L_j} \left| h^j(h^{k(T)+p}(\varphi(\langle t \rangle))) - h^j(\mathcal{H}(\varphi(\langle t \rangle))) \right| dt \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad T \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

За означенням функція $\mathcal{P}_{\varphi}(t)$ є періодичною з періодом p .

Функцію $\mathcal{P}_{\varphi}(t)$ називаємо *граничною функцією* для розв'язку $x_{\varphi}(t)$. З (14) випливає, що функція $\mathcal{P}_{\varphi}(t)$ набуває значень зі скінченної множини $\bigcup_{i=0}^{p-1} h^i(\Theta(h))$, яка є множиною числових значень усіх точок одного або двох циклів відображення h . Точки розриву функції $\mathcal{P}_{\varphi}(t)$ належать множині $S(h, \varphi)$. Якщо початкова функція $\varphi(t)$ розривна у точці $t_* \in [0, 1]$ (покладаємо $\varphi(1) = h(\varphi(0))$), то у процесі наближення розв'язку $x_{\varphi}(t)$ до граничної функції $\mathcal{P}_{\varphi}(t)$ розрив згасатиме, якщо значення $\varphi(t_*-0)$ і $\varphi(t_*+0)$ потрапляють до басейну якоїсь однієї з періодичних точок відображення h . В іншому разі $t_* \in S(h, \varphi)$.

На рис. 3 показано типові розв'язки рівнянь вигляду (1) у випадку (3), (5). За приклад взято рівняння із параметрами, яким відповідають функції $\mathcal{H}(z)$ з рис. 2. Кожен із

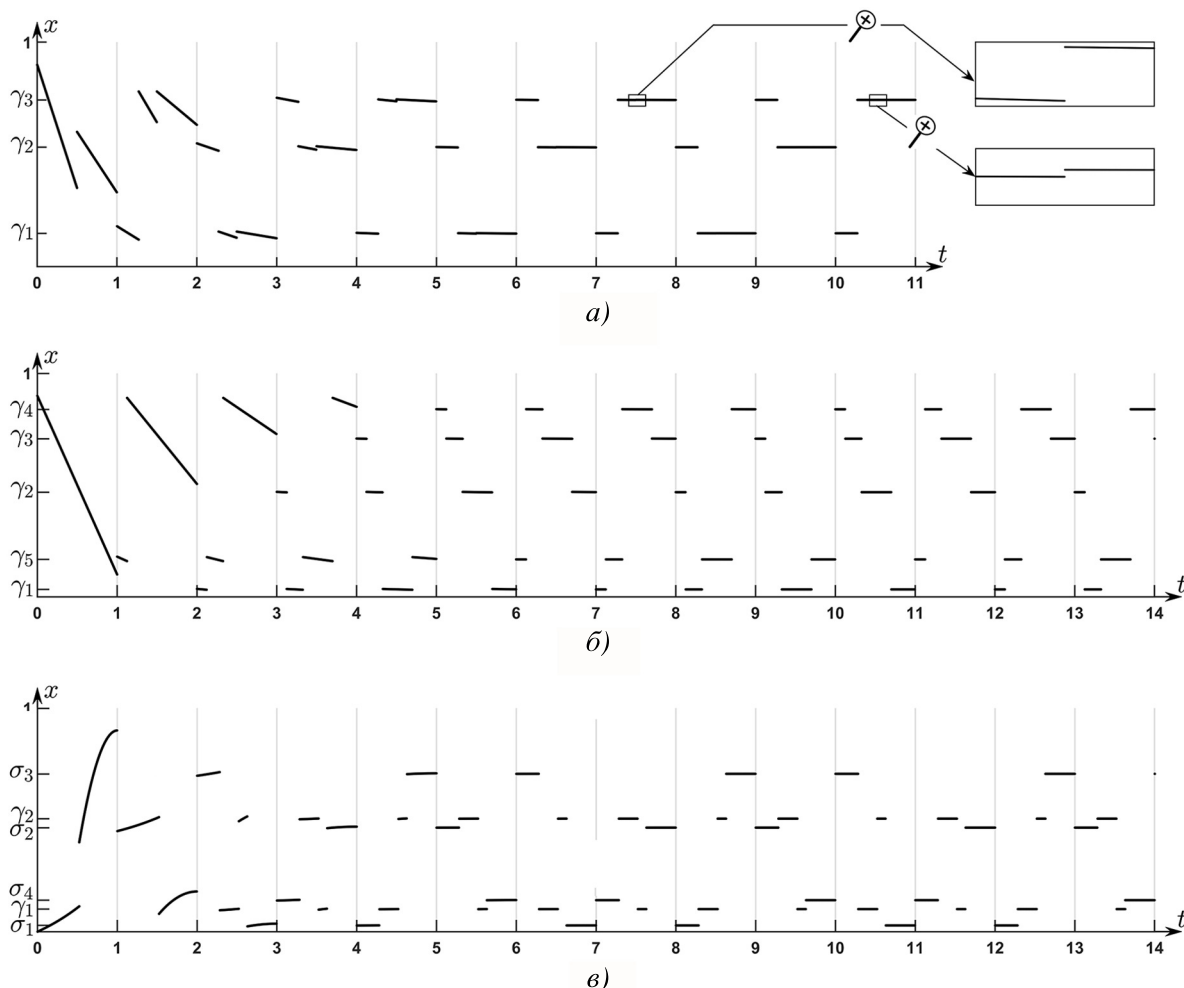


Рис. 3. Типові розв'язки у випадку (3), (5) при $a = 0,2$, $b = 0,55$: асимптотична періодичність а) з періодом 3 при $\alpha = 0,4$, $\beta = 0,6$; б) з періодом 5 при $\alpha = 0,1$, $\beta = 0,8$; в) з періодом 4 при $\alpha = 0,12$, $\beta = 0,48$.

трьох розв'язків наближається до кусково-сталої граничної функції періоду 3, 5 чи 4 та з областями значень $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$, $\{\gamma_1, \dots, \gamma_5\}$ чи $\{\gamma_1, \gamma_2, \sigma_1, \dots, \sigma_4\}$, відповідно. Зазначимо, що у випадках а) та б) граничні функції всіх розв'язків мають один період і спільну область значень. А у випадку в) період і область значень граничної функції залежать від початкової функції φ ; якщо множина $\varphi([0, 1])$ перетинатиметься з басейном лише одного з циклів, скажімо, $\{\gamma_1, \gamma_2\}$, то відповідна гранична функція матиме період 2 і набуватиме двох значень γ_1 і γ_2 .

Рис. 3, а) також ілюструє поведінку розв'язків у точках розриву, породжуваних розривами початкової функції φ . Розрив у точці $t = 0,5 + n$ згасає зі зростанням n , оскільки обидва значення $\varphi(0,5 - 0)$ і $\varphi(0,5 + 0)$ належать басейну точки γ_2 . Воднораз значення $\varphi(1 - 0)$ потрапляє у басейн точки γ_3 , а значення $\varphi(1 + 0)$ — у басейн точки γ_1 і тому розрив у точці $t = 1 + n$ майже повторює розриви функції $\mathcal{H}(z)$ зі зростанням n .

Зазначимо, що у вже згадуваній роботі [1] досліджено біфуркаційні властивості розв'язків рівняння, частинним випадком якого є рівняння (1). Показано, що розв'язки повторюють біфуркації періодичних траєкторій відображення h , які бувають лише двох типів: біфуркації приросту періоду (period-incrementing bifurcations) і біфуркації додавання періоду

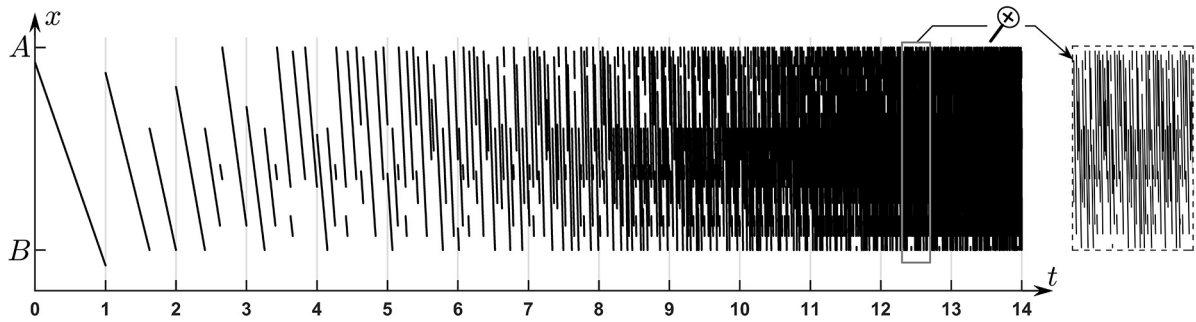


Рис. 4. Типовий розв'язок у випадку (4), (5): сильна хаотизація при $a = 1,6$, $b = 1,4$, $\alpha = 0,4$, $\beta = 0,6$.

(period-adding bifurcations) або, як їх ще називають, біфуркації, підпорядковані правилу Фарея.

Хаотичні розв'язки. Зовсім іншу ситуацію маємо, коли відображення h визначається формулами (4), (5) і є розтягальним на обох гілках. У цьому разі *множина* $S(h)$ є *скрізь щільною* на поглинаючому інтервалі $[A, B]$ (інакше б існував інтервал $J \subset [A, B]$, що не містить точок із $S(h)$, а отже, має властивість: $h^i(J)$ є інтервалом при кожному i й або $h^i(J) = f(h^{i-1}(J))$, або $h^i(J) = g(h^{i-1}(J))$, і тоді довжина інтервалу $h^i(J)$ зростала б необмежено при $i \rightarrow \infty$, що неможливо).

В області параметрів

$$G = \{(\alpha, \beta, a, b) : 0 < \alpha < \beta < 1, 1 < a < 1/\beta, 1 < b < 1/(1 - \alpha)\}$$

виконуються співвідношення

$$f(g(\alpha)) < \alpha, \quad g(f(\beta)) > \beta, \quad \text{тобто} \quad f(A) < \alpha, \quad g(B) > \beta, \quad (17)$$

які означають, що $f([A, \beta]) \cup g([\alpha, B]) = [A, B]$, завдяки чому інтервал $[A, B]$ є згодом-інваріантним при відображенні h .

Згідно з [14] за умови (17) для будь-якого інтервалу $J \subset I$ існує ціле $n = n(J) > 0$ таке, що

$$h^i(J) = [A, B], \quad i = n, n + 1, \dots \quad (18)$$

Це відбувається тому, що під дією відображення h кожен інтервал $J \subset I$ за скінченне число ітерацій накриває інтервали $[A, \beta]$ і $[\alpha, B]$, які у парі відображаються у згодом-інваріантний інтервал $[A, B]$.

Властивість (18), з огляду на (7), спричиняє вкрай сильну хаотичність розв'язків рівняння (1): будь-який типовий розв'язок коливається (починаючи з деякого моменту) від A до B з необмежено зростаючими частотою і числом розривів. Приклад на рис. 4.

Для опису таких розв'язків інтегральна метрика, яка усереднює поточкові відмінності, вже неприйнятна. Тепер потрібна метрика, яка б навпаки порівнювала сукупності значень функцій в околах точок. Застосуємо, як запропоновано у [2], метрику Гаусдорфа для графіків

$$\rho_{\Delta}(y_1|_{[\sigma, \tau]}, y_2|_{[\sigma, \tau]}) = \Delta(g^{\tau} y_1|_{[\sigma, \tau]}, g^{\tau} y_2|_{[\sigma, \tau]}), \quad (19)$$

де Δ — відстань Гаусдорфа між (непорожніми обмеженими замкнутими) множинами і gr — замикання графіка функції.

Множиннозначну функцію $\mathcal{F}: U \rightarrow 2^I$, де $U \subset \mathbb{R}$, 2^I — множина замкнутих непорожніх підмножин інтервалу I , називаємо *напівнеперервною зверху функцією*, якщо для кожної точки $t_* \in U$ та будь-яких послідовностей $\{t_i\}_{i=1}^\infty \subset U$, $\{z_i\}_{i=1}^\infty \subset I$ з умов: $z_i \in \mathcal{F}(t_i)$, $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = t_*$ і $\lim_{i \rightarrow \infty} z_i = z_*$, випливає, що $z_* \in \mathcal{F}(t_*)$.

Теорема 2. В області параметрів G у всіх рівнянь вигляду (1) майже всі розв'язки є хаотичними. А саме, при будь-якій початковій функції $\varphi: [0, 1) \rightarrow \text{int } I$, що відмінна від константи на всякому інтервалі з $[0, 1)$, розв'язок $x_\varphi(t)$ прямує до напівнеперервної зверху функції

$$\mathcal{P}(t) = [A, B], \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad \text{де } A = g(\alpha), \quad B = f(\beta). \quad (20)$$

Точніше,

$$\rho_\Delta(x_\varphi|_{[T, T+1]}, \mathcal{P}|_{[T, T+1]}) \longrightarrow 0 \quad \text{при } T \rightarrow \infty. \quad (21)$$

Доведення. Позначимо через $M \otimes \theta$ зсув множини $M \subset \mathbb{R}$ на число θ , тобто $M \otimes \theta = \{t : t = \tau + \theta, \tau \in M\}$.

Зазначимо такі властивості розв'язків, що випливають із (7). По-перше, оскільки $\varphi(t) \neq 0, 1$, то існує $T_0 = T_0(\varphi) > 0$ таке, що

$$A \leq x_\varphi(t) \leq B \quad \text{при } t > T_0. \quad (22)$$

По-друге, оскільки образ будь-якого відкритого інтервалу при відображенні φ містить відкритий інтервал, то з огляду на (18) і (22) для будь-якого околу U кожної точки $t_* \in [0, 1)$ знайдеться ціле $N = N(U) > T_0$ таке, що

$$x_\varphi(U \otimes j) = [A, B] \quad \text{при } j = N, N+1, \dots \quad (23)$$

У (t, x) -площині розглянемо множини

$$\Gamma_T = \text{gr } x_\varphi|_{[T, T+1]} \quad \text{і} \quad \Pi_T = \text{gr } \mathcal{P}|_{[T, T+1]}.$$

Теорему 2 буде доведено, якщо покажемо, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $T_\varepsilon > 0$ таке, що

$$\Delta(\Gamma_T, \Pi_T) < \varepsilon \quad \text{при } T > T_\varepsilon. \quad (24)$$

Нагадаємо, що відстань Гаусдорфа між множинами X, Y визначається так: $\Delta(X, Y) = \max\{d(X, Y), d(Y, X)\}$, де $d(Q, R) = \sup_{q \in Q} \text{dist}(q, R)$ і $\text{dist}(q, R)$ — відстань від точки q до множини R . З (22) випливає, що $\Gamma_T \subset \Pi_T$ при $T > T_0$, тому

$$d(\Gamma_T, \Pi_T) = 0 \quad \text{при } T > T_0. \quad (25)$$

Проаналізуємо величину $d(\Pi_T, \Gamma_T)$. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$ і будь-яке скінченне покриття $\{V_s\}_{s=1}^l$ множини Π_0 прямокутниками $v_s \times [A, B]$, де $v_s = [t_s - \varepsilon/4, t_s + \varepsilon/4]$ $l = l(\varepsilon) \geq 1$. Покриття $\{V_s(T)\}_{s=1}^l$ множини Π_T (при будь-якому $T > 0$) отримується з $\{V_s\}_{s=1}^l$ за допомогою певних зсувів, а саме $V_s(T) = v_s(T) \times [A, B]$, де

$$v_s(T) = \begin{cases} v_s \otimes k & \text{при } t_s \geq r, \\ v_s \otimes (k+1) & \text{при } t_s < r \end{cases} \quad \text{і} \quad k = \lfloor T \rfloor, \quad r = \langle T \rangle. \quad (26)$$

З (24) і (26) випливає існування $T_\varepsilon > T_0$ такого, що проєкція графіка $\text{gr } x_\varphi|_{v_s(T)}$ на вісь x дорівнює інтервалу $[A, B]$ при $T > T_*$ і всіх $s = 1, \dots, l$. Це означає, що для кожної точки $\pi(t', x') \in \Pi_T$ знайдеться точка $\gamma(t'', x'') \in \Gamma_T$ така, що $x' = x''$, $|t' - t''| \leq \varepsilon/2$, а отже,

$$d(\Pi_T, \Gamma_T) \leq \varepsilon/2 \quad \text{при} \quad T > T_\varepsilon. \quad (27)$$

З (25) і (27) отримуємо (24).

З (20) випливає, що функція $\mathcal{P}(t)$ як функція з $\mathbb{R}^+$ в I розривна у кожній точці, а як функція з $\mathbb{R}^+$ у 2^I напівнеперервна зверху і набуває єдиного значення, що є інтервалом $[g(\alpha), f(\beta)]$.

Функція $\mathcal{P}(t)$ виявляється *граничною функцією* для типових розв'язків рівняння (1), незалежно від їхніх початкових функцій. Ступінь хаотичності цих розв'язків визначається складністю функції $\mathcal{P}(t)$.

По-перше, зі збільшенням t з типовими розв'язками відбувається *каскад градієнтних катастроф*: модуль похідної розв'язку (у точках гладкості) на будь-якому інтервалі $[T, T + \delta]$ необмежено зростає при $T \rightarrow \infty$.

По-друге, у типових розв'язків вельми нестандартна геометрія. Кожен такий розв'язок демонструє *"space-filling"-властивість*: для будь-якого $\varepsilon > 0$ і кожної початкової функції φ , що задовольняє умови теореми 2, існує $T_* = T_*(\varepsilon, \varphi) > 0$ таке, що $\text{gr } x_\varphi(t)$ перетинається з ε -околом кожної точки з півсмуги $\Pi_T = \{(t, x) \in [T, \infty) \times [g(\alpha), f(\beta)]\}$ при $T > T_*$, а отже, що більше T , то щільніше графік розв'язку заповнює півсмуку Π_T . Такі розв'язки називаємо *сильно хаотичними*.

По-третє, всі типові розв'язки *потрапляють за горизонт передбачуваності*: для будь-яких $\varepsilon > 0$ і $\delta > 0$ і кожної початкової функції φ , що задовольняє умови теореми 2, існує $N = N(\varepsilon, \delta, \varphi) > 0$ таке, що

$$\sup_{|t' - t''| < \varepsilon} |x_\varphi(t' + n) - x_\varphi(t'' + n)| > f(\beta) - g(\alpha) - \delta \quad \text{при} \quad n > N,$$

тобто якими б близькими не були $t', t'' \in \mathbb{R}^+$, значення $x_\varphi(t' + n)$ і $x_\varphi(t'' + n)$ різняться при певному $n = n_*$ на величину, рівну діаметру інтервалу $[A, B]$. Такі розв'язки називаємо *згодом-непередбачуваними*, їхнє обчислення раніше чи пізніше втрачає сенс і потребує ймовірнісних оцінок. Для рівнянь вигляду (1) але з неперервною нелінійністю було розвинуто *концепцію автостохастичності*, коли згодом-непередбачувані розв'язки можна асимптотично точно описати за допомогою випадкових процесів (див. [15, 16] і наведену там бібліографію); такий опис можливий за умови, що нелінійність має інваріантну міру, абсолютно неперервну щодо міри Лебега. Є всі підстави [2] вважати, що ці результати можна поширити на випадок нелінійності з гістерезисом.

Зауваження. Умова лінійності відображень f і g , що задають праву частину рівняння (1), не є принциповою. Теореми 1 і 2 залишаються справедливими⁴, коли відображення f і g неперервні, монотонно зростають на $[0, 1]$ і мають відповідно такі властивості:

$$0 < g(z) < z < f(z) < 1 \quad \text{при} \quad z \in (0, 1) \quad \text{і} \quad f, g \text{ стискальні}, \quad (28)$$

$$0 < f(z) < z < g(z) < 1 \quad \text{при} \quad z \in (0, 1) \quad \text{і} \quad f, g \text{ розтягальні}. \quad (29)$$

Про перший із цих випадків йдеться в [1]. До того ж у випадку (28) теорема 1 справджується для будь-яких початкових функцій (без жодних обмежень).

⁴У формулюваннях теореми 1 і 2 умови на параметри a, b замінюються на умови $g(0) > f(1)$ і $f(g(\alpha)) < \alpha$, $g(f(\beta)) > \beta$ відповідно.

Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів. Усі необхідні дані містяться в статті. Всі автори зробили рівномірний внесок у цю роботу. Роботу частково підтримано фондом Саймонса (the Simons Foundation), грант 1290607 (“Research during the war at the biggest Ukrainian Mathematical Institution”).

Література

1. A. D. Fedorenko, V. V. Fedorenko, A. F. Ivanov, A. N. Sharkovsky, *Solution behaviour in a class of difference-differential equations*, Bull. Austral. Math. Soc., **57**, 37–48 (1998).
2. E. Yu. Romanenko, A. N. Sharkovsky, *Whether chaos can be achieved in piecewise linear boundary-value problems*, Differ. Equat. Dyn. Syst., **18**, № 1–2, 1–9 (2010).
3. E. Yu. Romanenko, A. N. Sharkovsky, *Piecewise linear boundary-value problems*, Grazer Math. Ber., **354**, 237–253 (2009).
4. A. N. Sharkovsky, Yu. Maistrenko, Ph. Deregél, L. O. Chua, *Dry turbulence from a time-delayed Chua's circuit*, J. Circuits Systems Comput., **3**, № 2, 645–668 (1993).
5. T. Tsubone, K. Mitsubori, T. Saito, “Stabilizing high-period orbits in chaos and generation of islands: a piecewise linear approach,” in: *IEEE International Symposium on Circuits and Systems. Circuits and Systems Connecting the World (ISCAS 96, Atlanta, GA, USA, 1996)*, **3** (1996), pp. 257–260.
6. B. Li, R. A. Siegel, *Global analysis of a model pulsing drug delivery oscillator based on chemomechanical feedback with hysteresis*, Chaos, **10**, № 3, 682–690 (2000).
7. K. Kimura, S. Suzuki, T. Tsubone, T. Saito, *The cylinder manifold piecewise linear system: analysis and implementation*, IEICE Nonlinear Theory Appl., **6**, № 4, 488–498 (2015).
8. G. Berkolaiko, *Dynamics of piecewise linear interval maps with hysteresis*, Dynam. Stability Systems, **14**, № 1, 57–70 (1999).
9. А. Н. Шарковский, Ю. Л. Майстренко, Е. Ю. Романенко, *Разностные уравнения и их приложения*, Наук. думка, Киев (1986).
10. Е. Ю. Романенко, *Разностные уравнения с непрерывным аргументом*, Ін-т математики НАН України, Київ (2014).
11. O. Romanenko, *Continuous-time difference equations and distributed chaos modelling*, Math. Lett., **8**, № 1, 11–21 (2022).
12. O. Yu. Romanenko, O. M. Sharkovsky, *Asymptotic properties of the semigroup generated by a continuous interval map*, Int. J. Math., Eng. Biol. Appl. Comput., **1**, № 2, 77–94 (2022).
13. О. М. Шарковський, А. Ф. Іванов, В. В. Федоренко, О. Д. Федоренко, *Співіснування періодичних орбіт для класу розривних відображень*, Допов. НАН України, **11**, 20–25 (1996).
14. A. N. Sharkovsky, L. O. Chua, *Chaos in some 1-D discontinuous maps that appear in the analysis of electrical circuits*, IEEE Trans. Circuits and Systems, **4**, № 10 (1993).
15. A. N. Sharkovsky, E. Yu. Romanenko, *Turbulence: Ideal*, Encyclopedia of Nonlinear Science, New York, London, Routledge (2005).
16. E. Yu. Romanenko, *Randomness in deterministic continuous time difference equations*, J. Difference Equat. Appl., **16**, № 2-3 (2010).

Одержано 31.10.24