

АСИМПТОТИЧНИЙ АНАЛІЗ ЗАГАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЛІНІЙНОЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВИЩОГО ПОРЯДКУ З ВИРОДЖЕННЯМИ У БАГАТОВИМІРНОМУ ВИПАДКУ. Ч. 1

Сергій Пафук

*Український державний університет імені Михайла Драгоманова
вул. Пирогова, 9, Київ, 01601, Україна*

*Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”
Берестейський просп., 37, Київ, 03056, Україна
e-mail: s.pafyk@npu.edu.ua*

We consider the homogenous system of linear singularly perturbed differential equations of order m with a matrix for higher derivatives, which degenerates if a small parameter tends to zero. By using the methods of Newton's diagrams and internal projection, we investigate the structure of the general solution of this system of equations and the possibility of construction of its asymptotics in the case where the corresponding matrix characteristic polynomial has several finite and infinite elementary divisors of the same multiplicity. The obtained results generalize the known results for similar systems of equations of first and second orders and for the system of order m in the case where the corresponding matrix characteristic polynomial has one multiple finite and one multiple infinite elementary divisors.

Розглянуто однорідну систему лінійних сингулярно збурених диференціальних рівнянь m -го порядку з матрицею при старших похідних, яка вироджується з прямуванням малого параметра до нуля. З використанням методів діаграм Ньютона та внутрішнього проектування досліджено структуру загального розв'язку цієї системи рівнянь і можливість побудови її асимптотики у випадку, коли відповідний матричний характеристичний поліном має кілька скінченних і нескінченних елементарних дільників однакової кратності. Отримані результати узагальнюють відомі дослідження, проведені для аналогічних систем рівнянь першого і другого порядків, а також для системи m -го порядку у випадку, коли відповідний матричний характеристичний поліном має по одному кратному скінченному та нескінченному елементарному дільнику.

1. Постановка задачі. Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\sum_{k=0}^m \varepsilon^{kh} A_k(t, \varepsilon) \frac{d^k x}{dt^k} = 0, \quad (1.1)$$

де $x(t, \varepsilon)$ — шуканий n -вимірний вектор, $A_i(t, \varepsilon)$, $i = \overline{0, m}$, — дійсні або комплекснозначні $(n \times n)$ -вимірні матриці, $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$ — малий дійсний параметр, $h \in N$, $t \in [0; T]$.

Припустимо, що виконуються такі умови:

1°. Матриці $A_i(t, \varepsilon)$, $i = \overline{0, m}$, мають на відрізку $[0; T]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями ε :

$$A_i(t, \varepsilon) \sim \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k A_i^{(k)}(t), \quad i = \overline{0, m}.$$

2°. Елементи матриць $A_i^{(k)}(t)$, $i = \overline{0, m}$, $k = 0, 1, \dots$, нескінченно диференційовні на відрізку $[0; T]$.

3°. $\det A_m^{(0)}(t) = 0 \quad \forall t \in [0; T]$.

4°. Гранична в'язка матриць

$$P(t, \lambda) = \sum_{k=0}^m \lambda^k A_k^{(0)}(t) \quad (1.2)$$

системи (1.1) регулярна для будь-якого $t \in [0; T]$ і має $r > 1$ скінченних елементарних дільників $(\lambda - \lambda_0(t))^p$ кратністю $p > 1$ кожний і $s > 1$ нескінченних кратністю $q \geq 1$, причому $pr + qs = mn$.

Систему (1.1) досліджуватимемо при виконанні умов 1°–4°.

На сьогодні добре розвинута теорія асимптотичного інтегрування лінійних сингулярно збурених систем вигляду (1.1). Як відомо, перші результати отримано в роботах Дж. Біркгофа [1] і Я. Тамаркіна [2]. Так, Біркгоф вивів асимптотичні формули, які зображають лінійно незалежні розв'язки скалярного диференціального рівняння n -го порядку у випадку простих коренів характеристичного рівняння, а Тамаркін узагальнив результати, отримані Біркгофом, для лінійної системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\varepsilon^h \frac{dx}{dt} = A(t; \varepsilon)x, \quad (1.3)$$

в якій

$$A(t; \varepsilon) = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k A_k(t).$$

Асимптотичні формули, отримані цими вченими, виявилися настільки ефективними, що з'явився інтерес щодо їхнього узагальнення й для випадку кратного спектра головної матриці $A_0(t)$. Однак ця задача була дуже складною і довгий час залишалася нерозв'язаною.

У 1936 р. М. Хукухара [3], а пізніше, незалежно від нього, С. Фещенко [4, 5] довели теореми про асимптотичне розщеплення системи вигляду (1.3), головна матриця якої має на заданому відрізку кілька ізольованих одна від одної груп власних значень, на відповідну кількість підсистем меншої розмірності, головні матриці яких мають лише прості власні значення цих груп. Ці теореми дозволяють звести задачу побудови асимптотичних розв'язків досліджуваної системи, за наявності в матриці $A_0(t)$ кількох ізольованих власних значень, до системи з одним власним значенням головного оператора. Проте проблема побудови асимптотики загального розв'язку цих систем у випадку, коли головна матриця має кратне власне значення, залишалася нерозв'язаною.

У 1956 р. Х. Туррітін [6] для розв'язання проблеми кратного спектра головного оператора запропонував застосовувати так зване зрізаюче перетворення, за допомогою якого при певних умовах систему з кратним спектром головного оператора можна звести до

системи, головна матриця якої має простий спектр. Такий же метод запропоновано й у монографії [7].

І лише в 1960-х рр. М. Шкіль розробив метод побудови асимптотичних розвинень лінійно незалежних розв'язків однорідної системи вигляду (1.3) у випадку, коли головна матриця $A_0(t)$ має кратне власне значення, якому відповідають кратні елементарні дільники [8–10]. Виявилося, що на відміну від випадку простого спектра головного оператора у випадку кратного спектра відповідні розвинення необхідно будувати за дробовими степенями малого параметра. Зокрема, за певних обмежень на збурювальну матрицю $A_1(t)$ всі n шуканих розв'язків можна побудувати у вигляді розвинень за степенями $\varepsilon^{\frac{1}{p}}$, де p — кратність власного значення матриці $A_0(t)$.

М. Шкіль розглянув і більш складний випадок, коли кратному власному значенню $\lambda_0(t)$ матриці $A_0(t)$ відповідає s елементарних дільників однакової кратності r , $sr = n$. Пізніше вчений і його учень І. Старун узагальнили цей результат для більш складного випадку, коли кратному власному значенню $\lambda_0(t)$ матриці $A_0(t)$ відповідає кілька елементарних дільників як однакової, так і різної кратності.

Асимптотичні розв'язки системи (1.3), отримані цими математиками, побудовано за дробовими степенями малого параметра за певних обмежень на збурювальні матриці $A_k(t)$, $k \geq 1$. У зв'язку з цим виникла проблема визначення дробових показників степенів малого параметра, за якими потрібно будувати відповідні розвинення, залежно від структури збурювальних матриць $A_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$. Цю проблему в 1980-х рр. розв'язала Г. Жукова, розглянувши її у найбільш загальній постановці і використавши операторні методи, та вивела відповідне рівняння розгалуження й застосувала до нього метод діаграм Ньютона [11].

Розвиваючи ідеї Жукової, В. Яковець у роботі [12] узагальнив її результат для багатовимірного випадку, коли кратному власному значенню $\lambda_0(t)$ матриці $A_0(t)$ системи (1.3) відповідає кілька елементарних дільників однакової кратності. Застосувавши метод внутрішнього проєктування, йому вдалося звести багатовимірну задачу про збурення власних значень і власних векторів матриці $A_0(t)$ до одновимірної.

Починаючи з кінця 1970-х рр., увагу математиків привернули системи звичайних диференціальних рівнянь, не розв'язаних щодо старших похідних. Зокрема, розпочалося активне вивчення лінійних систем вигляду

$$B(t) \frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t) \quad (1.4)$$

з тотожно виродженою матрицею $B(t)$ при похідних, які досить часто зустрічаються в задачах оптимального керування, масового обслуговування, теорії електричних кіл й інших прикладних наук.

Теорія систем вигляду (1.4) з тотожно виродженою матрицею при старших похідних інтенсивно розвивається в роботах математиків багатьох країн. Різні математики називають їх по-різному: виродженими, сингулярними, диференціально-алгебраїчними, алгебро-диференціальними. Важливі результати з розвитку теорії вироджених систем отримано в роботах [12–20].

Паралельно з активним розвитком теорії вироджених систем вигляду (1.4), починаючи з 1980-х рр., багато математиків спрямували свої зусилля на вивчення лінійних сингулярно

збурених систем вигляду (1.1) при $m = 1, 2$. Значні результати при дослідженні таких систем отримано в роботах В. П. Яковця [12–14]. Фундаментальні результати, отримані Яковцем в теорії асимптотичного інтегрування лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь із виродженнями, розвинули багато його учнів [21, 22].

Також, починаючи з 1970-х рр., коли завдяки розв'язуваності проблеми кратного спектра головного оператора у працях М. Шкіля набула подальшого розвитку лінійна теорія сингулярних збурень, з'явилися спроби узагальнити цю теорію й для систем рівнянь вищих порядків [23–26]. Це було обумовлено, з одного боку, узагальненням результатів, отриманих для систем диференціальних рівнянь першого порядку, на системи диференціальних рівнянь вищих порядків, а з іншого боку до систем диференціальних рівнянь вигляду (1.1) приводять деякі прикладні задачі. Зокрема, до систем вигляду (1.1) приводять задачі, які виникають у динаміці стійкості кругових циліндричних оболонок.

Переважає більшість цих робіт стосувалися систем рівнянь другого порядку вигляду

$$\varepsilon^h \frac{d^2 x}{dt^2} = A(t, \varepsilon)x + f(t, \varepsilon),$$

$$\varepsilon^{2h} A(t, \varepsilon) \frac{d^2 x}{dt^2} + \varepsilon^{h+1} B(t, \varepsilon) \frac{dx}{dt} + C(t, \varepsilon)x = f(t, \varepsilon)$$

з характеристичними рівняннями

$$\det(A_0(t) - \lambda^2 E) = 0,$$

$$\det(C_0(t) - \lambda^2 A_0(t)) = 0$$

відповідно, що було обумовлено методом побудови асимптотичних розв'язків, який ґрунтується на зведенні головної матриці $A_0(t)$ до канонічної форми Жордана або на використанні теорії лінійних матричних в'язок матриць за умови неособливості матриці $A_0(t)$. Системи ж диференціальних рівнянь другого порядку вигляду (1.1) при $m = 2$ в загальному вигляді не розглядалися, оскільки при побудові їхніх розв'язків потрібно було б розглядати квадратичні в'язки матриць замість лінійних. На той час вчені не знали, як побудувати фундаментальну систему розв'язків системи (1.1) при $m = 2$ у випадку, коли задача зводиться до розгляду квадратичної в'язки матриць замість лінійної в'язки матриць.

Цю проблему у 1990-х рр. розв'язав В. Яковець для системи диференціальних рівнянь (1.1) при $m = 2$ [12–14]. Це стало можливим завдяки застосуванню до цієї системи теорії квадратичних в'язок матриць. У роботі [12] розглянуті випадки, коли матриця при старшій похідній є тотожно виродженою або вироджується при прямуванні малого параметра ε до 0.

Результати, отримані в роботах Яковця для систем другого порядку, було узагальнено на систему (1.1). Зокрема, в [27] систему (1.1) досліджено в найбільш загальному випадку, коли гранична в'язка матриць (1.2) має кілька скінченних і нескінченних елементарних дільників як однакової, так і різної кратності. У згаданій роботі вдалося побудувати асимптотичний розв'язок системи (1.1) за дробовими показниками степенів малого параметра ε при певних обмеженнях на збурювальні матриці $A_k^{(s)}(t)$, $k = \overline{0, m}$, $s = 1, 2, \dots$. У праці

[28], використовуючи метод діаграм Ньютона, досліджено питання визначення показників степенів малого параметра ε , за якими потрібно будувати асимптотичні розв'язки системи (1.1) залежно від збурювальних матриць $A_k^{(s)}(t)$, $k = \overline{0, m}$, $s = 1, 2, \dots$, у випадку, коли гранична в'язка матриць (1.2) має по одному кратному скінченному та нескінченному елементарних дільниках.

У цій статті результати, отримані в [28], узагальнено для випадку, коли гранична в'язка матриць (1.2) системи (1.1) має кілька скінченних і нескінченних елементарних дільників однакової кратності. Викладені дослідження мають вагоме практичне і теоретичне значення. Практичне значення полягає в тому, що до систем вигляду (1.1) зводяться деякі прикладні задачі. Зокрема, такі задачі виникають у динаміці стійкості кругових циліндричних оболонок. Теоретичне значення цієї роботи полягає в тому, що викладені результати узагальнюють результати, отримані для відповідних систем першого порядку у випадках, коли ці системи є виродженими або вироджуються при прямуванні малого параметра до нуля.

2. Виведення рівняння розгалуження для розв'язків першої групи. Першу групу розв'язків системи (1.1), які відповідають скінченним елементарним дільникам граничної в'язки матриць $P(t, \lambda)$, будемо шукати у вигляді

$$x(t, \varepsilon) = u(t, \varepsilon) \exp \left(\varepsilon^{-h} \int_0^t (\lambda_0(\tau) + \lambda(\tau, \varepsilon)) d\tau \right), \quad (2.1)$$

де $u(t, \varepsilon)$ — шуканий n -вимірний вектор, а $\lambda(t, \varepsilon)$ — шукана скалярна функція.

Як і в праці [28], підставивши (2.1) в систему (1.1) і використавши формулу

$$\begin{aligned} \frac{d^k x}{dt^k} &= \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^i \sum_{\gamma=0}^j \varepsilon^{-jh} C_k^i C_j^\gamma D_{i-j} \left[\lambda_0^{j-\gamma} \lambda^\gamma \right] \\ &\times \frac{d^{k-i} u(t, \varepsilon)}{dt^{k-i}} \exp \left(\varepsilon^{-h} \int_0^t (\lambda_0(\tau) + \lambda(\tau, \varepsilon)) d\tau \right), \quad k = \overline{0, m}, \end{aligned}$$

де $D_i[\lambda^j]$ — сума всіх можливих добутків i операторів диференціювання $D = \frac{d}{dt}$, які діють на вирази, розміщені праворуч від них, і j скалярних функцій $\lambda(t, \varepsilon)$, причому останнім множником у всіх доданках має бути $\lambda(t, \varepsilon)$, отримаємо

$$P(t, \lambda_0)u = -F(t, \lambda, \varepsilon)u, \quad (2.2)$$

де

$$F(t, \lambda, \varepsilon) = \sum_{k=0}^m \Gamma_k(t, \lambda, \varepsilon), \quad (2.3)$$

$\Gamma_k(t, \lambda, \varepsilon)$, $k = \overline{0, m}$, — оператори, визначені за формулами

$$\begin{aligned}\Gamma_0(t, \lambda, \varepsilon) &= \sum_{s \geq 1} \varepsilon^s P^{(s)}(t, \lambda_0) + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{m-i} \varepsilon^{ih} D_i [\lambda_0^j] A_{i+j}(t, \varepsilon) \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^i \sum_{\gamma=1}^{m-i+1} \varepsilon^{ih} C_{i+\gamma-1}^j D_{i-j} [\lambda_0^{\gamma-1}] A_{i+\gamma-1}(t, \varepsilon) D^j, \\ \Gamma_k(t, \lambda, \varepsilon) &= \lambda^k \frac{\partial^k P(t, \lambda_0, \varepsilon)}{k! \partial \lambda^k} + \sum_{i=1}^{m-k} \sum_{j=1}^{m-k-i+1} \varepsilon^{ih} C_{j+k-1}^k D_i [\lambda^k \lambda_0^{j-1}] A_{i+j+k-1}(t, \varepsilon) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{m-k} \sum_{j=1}^i \sum_{\gamma=1}^{m-k-i+1} \varepsilon^{ih} C_{\gamma+k-1}^k C_{i+\gamma+k-1}^j D_{i-j} \\ &\quad \times [\lambda^k \lambda_0^{\gamma-1}] A_{i+\gamma+k-1}(t, \varepsilon) D^j, \quad k = \overline{1, m-1}, \\ \Gamma_m(t, \lambda, \varepsilon) &= \lambda^m \frac{\partial^m P(t, \lambda_0, \varepsilon)}{m! \partial \lambda^m}, \\ P(t, \lambda, \varepsilon) &= \sum_{i=0}^m \lambda^i A_i(t, \varepsilon).\end{aligned}$$

Використавши умову 1° , оператори $\Gamma_k(t, \lambda, \varepsilon)$, $k = \overline{0, m}$, можна подати у вигляді

$$\begin{aligned}\Gamma_0(t, \lambda, \varepsilon) &= \sum_{s \geq 1} \varepsilon^s \Gamma_0^{(s)}(t), \\ \Gamma_k(t, \lambda, \varepsilon) &= \sum_{s \geq 0} \varepsilon^s \Gamma_k^{(s)}(t, \lambda), \quad k = \overline{1, m},\end{aligned}$$

коефіцієнти яких визначаємо за формулами

$$\begin{aligned}\Gamma_0^{(s)}(t) &= P^{(s)}(t, \lambda_0) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^i \sum_{\gamma=1}^{m-i+1} C_{i+\gamma-1}^j D_{i-j} [\lambda_0^{\gamma-1}] A_{i+\gamma-1}^{(s-ih)}(t) D^j \\ &\quad + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{m-i} D_i [\lambda_0^j] A_{i+j}^{(s-ih)}(t), \quad s = 1, 2, \dots, \\ \Gamma_k^{(s)}(t, \lambda) &= \lambda^k \frac{\partial^k P^{(s)}(t, \lambda_0)}{k! \partial \lambda^k} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{m-k} \sum_{j=1}^i \sum_{\gamma=1}^{m-k-i+1} C_{\gamma+k-1}^k C_{i+\gamma+k-1}^j D_{i-j} [\lambda^k \lambda_0^{\gamma-1}] A_{i+\gamma+k-1}^{(s-ih)}(t) D^j\end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=1}^{m-k} \sum_{j=1}^{m-k-i+1} C_{j+k-1}^k D_i [\lambda^k \lambda_0^{j-1}] A_{i+j+k-1}^{(s-ih)}(t), \quad k = \overline{1, m-1}, \quad s = 0, 1, \dots,$$

$$\Gamma_m(t, \lambda) = \lambda^m \frac{\partial^m P^{(s)}(t, \lambda_0)}{m! \partial \lambda^m}, \quad s = 0, 1, \dots$$

Отже, задачу визначення функції $\lambda(t, \varepsilon)$ і вектора $u(t, \varepsilon)$ звели до задачі про збурення власного значення $\lambda_0(t)$ і відповідних власних векторів $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1, r}$, поліноміальної в'язки матриць $P(t, \varepsilon)$ під дією збурювальних операторів $\Gamma_k(t, \lambda, \varepsilon)$, $k = \overline{0, m}$.

Рівняння (2.2) розв'язне тоді й тільки тоді, коли виконуються умови

$$(F(t, \lambda, \varepsilon)u(t, \varepsilon), \psi_j(t)) = 0, \quad j = \overline{1, r}, \quad (2.4)$$

де $\psi_j(t)$, $j = \overline{1, r}$, — елемент нуль-простору матриці $P^*(t, \lambda_0)$, спряженої до матриці $P(t, \lambda_0)$.

Представимо умови (2.4) у компактнішому вигляді. Для цього введемо до розгляду оператор проєктування Q , який відображає n -вимірний векторний простір E на його r -вимірний підпростір E_0 таким чином:

$$Qu(t) = \sum_{i=1}^r (u(t), \psi_i(t)) \varphi_i(t) \quad \forall u(t) \in E,$$

де $t \in [0; T]$, $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1, r}$, — базисні елементи нуль-простору матриці $P(t, \lambda_0(t))$.

Підпростір E_0 є лінійною оболонкою векторів $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1, r}$, які визначено у такий спосіб, щоб $\varphi_i(t) \in C^\infty[0; T]$, $i = \overline{1, r}$, а це згідно з [12, 28] завжди можливо.

Тоді умова (2.3) буде еквівалентною умові

$$QF(t, \lambda, \varepsilon)u(t, \varepsilon) = 0. \quad (2.5)$$

При виконанні умови (2.5) вектор $u(t, \varepsilon)$ можна визначити за формулою

$$u(t, \varepsilon) = -H(t)F(t, \lambda, \varepsilon)u(t, \varepsilon) + u_0(t, \varepsilon), \quad (2.6)$$

де $u_0(t, \varepsilon)$ — довільний вектор підпростору E_0 , а $H(t)$ — узагальнено обернена матриця до матриці $P(t, \lambda_0(t))$.

Рівність (2.6) можна переписати у вигляді $(E + H(t)F(t, \lambda, \varepsilon))u(t, \varepsilon) = u_0(t, \varepsilon)$, де E — одинична матриця n -го порядку. Це рівняння формально виконується, якщо вектор $u(t, \varepsilon)$ подати у вигляді

$$u(t, \varepsilon) = u_0(t, \varepsilon) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (H(t)F(t, \lambda, \varepsilon))^k u_0(t, \varepsilon). \quad (2.7)$$

Підставивши вектор (2.7) в умову (2.5), отримаємо

$$L(\lambda, \varepsilon) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k QF(t, \lambda, \varepsilon) (H(t)F(t, \lambda, \varepsilon))^k u_0(t, \varepsilon) = 0,$$

де $(H(t)F(t, \lambda, \varepsilon))^0 := E$.

Ввівши позначення

$$\tilde{L}(\lambda, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} F(t, \lambda, \varepsilon) (H(t) F(t, \lambda, \varepsilon))^k, \quad (2.8)$$

останню формулу запишемо у вигляді

$$L(\lambda, \varepsilon) = Q\tilde{L}(\lambda, \varepsilon)u_0(t, \varepsilon) = 0. \quad (2.9)$$

При виконанні умови (2.9) вектор $u(t, \varepsilon)$ визначатимемо з рівності (2.7) за формулою

$$u(t, \varepsilon) = y_0(t) - H(t)\tilde{L}(\lambda, \varepsilon)u_0(t, \varepsilon). \quad (2.10)$$

Представимо вирази $L(\lambda, \varepsilon)$, $\tilde{L}(\lambda, \varepsilon)$, як і в [28], у вигляді формальних розвинень за степенями малого параметра ε :

$$L(\lambda, \varepsilon) = \sum_{k+s \geq 0} \varepsilon^s L_{ks}[\lambda^k], \quad \tilde{L}(\lambda, \varepsilon) = \sum_{k+s \geq 0} \varepsilon^s \tilde{L}_{ks}[\lambda^k], \quad (2.11)$$

де k — сумарний степінь функції $\lambda(t, \varepsilon)$, що входить у оператори $L_{ks}[\lambda^k]$, $\tilde{L}_{ks}[\lambda^k]$.

Для цього перегрупуємо доданки в умові (2.8) аналогічно до того, як це зроблено у [28]. У результаті рівняння (2.8) зможемо навести у вигляді

$$\begin{aligned} L(\lambda, \varepsilon) \equiv & \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^s (-1)^{j-1} \varepsilon^s QW_{H\Gamma}^{(s)}[0, \dots, 0, 0, j]u_0 \\ & + \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m i_m + \dots + 2i_2 + i_1 = k} \sum_{j=0}^s (-1)^{i_m + \dots + i_2 + i_1 + j - 1} \varepsilon^s QW_{H\Gamma}^{(s)}[i_m, \dots, i_2, i_1, j]u_0 = 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

причому

$$\begin{aligned} H(t)\tilde{L}(\lambda, \varepsilon) = & \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^s (-1)^{j-1} \varepsilon^s \widetilde{W}_{H\Gamma}^{(s)}[0, \dots, 0, 0, j] \\ & + \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m i_m + \dots + 2i_2 + i_1 = k} \sum_{j=0}^s (-1)^{i_m + \dots + i_2 + i_1 + j - 1} \varepsilon^s \widetilde{W}_{H\Gamma}^{(s)}[i_m, \dots, i_2, i_1, j], \end{aligned}$$

де $\widetilde{W}_{H\Gamma}^{(s)}[i_m, \dots, i_2, i_1, i_0]$ — сума всіх можливих добутоків операторів $H\Gamma_k^{(s_{ki})}$, $k = \overline{0, m}$, сума верхніх індексів яких s_{ki} дорівнює s , $s_{ki} \in N \cup \{0\}$, $k = \overline{1, m}$, $s_{0i} \in N$, а вирази $W_{H\Gamma}^{(s)}[i_m, \dots, i_2, i_1, j]$ відрізняються від виразів $\widetilde{W}_{H\Gamma}^{(s)}[i_m, \dots, i_2, i_1, j]$ лише відсутністю в усіх їхніх доданках першого множника $H(t)$.

Наприклад,

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{H\Gamma}^{(2)}[0, 2, 1] = & H\Gamma_1^{(0)} H\Gamma_1^{(0)} H\Gamma_0^{(2)} + H\Gamma_0^{(2)} H\Gamma_1^{(0)} H\Gamma_1^{(0)} \\ & + H\Gamma_1^{(0)} H\Gamma_0^{(2)} H\Gamma_1^{(0)} + H\Gamma_1^{(1)} H\Gamma_1^{(0)} H\Gamma_0^{(1)} + H\Gamma_1^{(0)} H\Gamma_1^{(1)} H\Gamma_0^{(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + H\Gamma_0^{(1)} H\Gamma_1^{(1)} H\Gamma_1^{(0)} + H\Gamma_1^{(1)} H\Gamma_0^{(1)} H\Gamma_1^{(0)} \\
& + H\Gamma_0^{(1)} H\Gamma_1^{(0)} H\Gamma_1^{(1)} + H\Gamma_1^{(0)} H\Gamma_0^{(1)} H\Gamma_1^{(1)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{H\Gamma}^{(2)}[0, 2, 1] = & \Gamma_1^{(0)} H\Gamma_1^{(0)} H\Gamma_0^{(2)} + \Gamma_0^{(2)} H\Gamma_1^{(0)} H\Gamma_1^{(0)} + \Gamma_1^{(0)} H\Gamma_0^{(2)} H\Gamma_1^{(0)} \\
& + \Gamma_1^{(1)} H\Gamma_1^{(0)} H\Gamma_0^{(1)} + \Gamma_1^{(0)} H\Gamma_1^{(1)} H\Gamma_0^{(1)} + \Gamma_0^{(1)} H\Gamma_1^{(1)} H\Gamma_1^{(0)} \\
& + \Gamma_1^{(1)} H\Gamma_0^{(1)} H\Gamma_1^{(0)} + \Gamma_0^{(1)} H\Gamma_1^{(0)} H\Gamma_1^{(1)} + \Gamma_1^{(0)} H\Gamma_0^{(1)} H\Gamma_1^{(1)}.
\end{aligned}$$

Із рівняння (2.11) отримаємо коефіцієнти для розвинень (2.10):

$$L_{00} = 0, \quad L_{0s}u_0 = \sum_{j=1}^s (-1)^{j-1} QW_{H\Gamma}^{(s)}[0, \dots, 0, 0, j]u_0, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (2.13)$$

$$L_{k0}[\lambda^k]u_0 = \sum_{mi_m + \dots + 2i_2 + i_1 = k} (-1)^{i_m + \dots + i_1 - 1} QW_{H\Gamma}^{(0)}[i_m, \dots, i_2, i_1, 0]u_0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned}
L_{ks}[\lambda^k]u_0 = & \sum_{mi_m + \dots + 2i_2 + i_1 = k} \sum_{j=0}^s (-1)^{i_m + \dots + i_1 + j - 1} \varepsilon^s \\
& \times QW_{H\Gamma}^{(s)}[i_m, \dots, i_2, i_1, j]u_0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad s = 1, 2, \dots
\end{aligned} \quad (2.15)$$

Спростимо формули (2.14). Для цього, ввівши позначення

$$H_j(t) = -H(t) \frac{\partial^j P(t, \lambda_0)}{j! \partial \lambda^j}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (2.16)$$

і скориставшись рекурентними формулами

$$\begin{aligned}
& \sigma^1(H_1, H_2, \dots, H_m) = E, \\
& \sigma^i(H_1, H_2, \dots, H_m) = \sum_{j=1}^{\min(i-1, m)} H_j(t) \sigma^{i-j}(H_1, H_2, \dots, H_m), \quad i = 2, 3, \dots,
\end{aligned} \quad (2.17)$$

вирази (2.14) можна подати у вигляді

$$L_{k0}[\lambda^k]u_0 = \lambda^k \sum_{j=1}^{\min(k, m)} Q \frac{\partial^j P(t, \lambda_0(t))}{j! \partial \lambda^j} \sigma^{k+1-j}(H_1, H_2, \dots, H_m)u_0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.18)$$

Оскільки згідно з умовою 4° в'язка матриць $P(t, \lambda)$ має $r > 1$ скінченних елементарних дільників $(\lambda - \lambda_0(t))^p$ кратністю p кожний, то, як показано в [29], їм відповідає r жорданових ланцюжків векторів завдовжки p кожний, які складаються з власних векторів $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1, r}$, і відповідних приєднаних векторів $\varphi_i^{(j)}(t)$, $i = \overline{1, r}$, $j = \overline{2, p}$, які задовольняють рівності

$$P(t, \lambda_0(t))\varphi_k(t) = 0, \quad k = \overline{1, r},$$

$$P(t, \lambda_0(t))\varphi_k^{(i)}(t) + \sum_{j=1}^{\min(i-1, m)} \frac{\partial^j P(t, \lambda_0(t))}{j! \partial \lambda^j} \varphi_k^{(i-j)}(t) = 0, \quad k = \overline{1, r}, \quad i = \overline{2, p}, \quad (2.19)$$

а рівняння

$$P(t, \lambda_0(t))z_k + \sum_{j=1}^{\min(p, m)} \frac{\partial^j P(t, \lambda_0(t))}{j! \partial \lambda^j} \varphi_k^{(p+1-j)}(t) = 0 \quad (2.20)$$

не розв'язні щодо векторів z_k , $k = \overline{1, r}$.

Вектори $\psi_j(t)$, $j = \overline{1, r}$, як і власні вектори $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1, r}$, визначаються неоднозначно, проте при будь-якому їхньому виборі, як показано в [29], виконується умова

$$\det \left\| \left(\sum_{k=1}^{\min(p, m)} \frac{\partial^k P(t, \lambda_0(t))}{k! \partial \lambda^k} \varphi_i^{(p+1-k)}(t), \psi_j(t) \right) \right\|_{i, j = \overline{1, r}} \neq 0 \quad \forall t \in [0; T],$$

тобто система власних і приєднаних векторів є повною.

Виконання останньої умови дає змогу визначити вектори $\psi_j(t)$, $j = \overline{1, r}$, так, щоб виконувалася рівність

$$\left(\sum_{k=1}^{\min(p, m)} \frac{\partial^k P(t, \lambda_0(t))}{k! \partial \lambda^k} \varphi_i^{(p+1-k)}(t), \psi_j(t) \right) = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, r}. \quad (2.21)$$

Якщо формула (2.21) не виконується для векторів $\psi_j(t)$, $j = \overline{1, r}$, то замість них можна взяти їхню лінійну комбінацію $\chi_j(t) = \sum_{k=1}^r \alpha_{kj}^{-1}(t) \psi_k(t)$, $j = \overline{1, r}$, де $\alpha_{kj}^{-1}(t)$ — елементи матриці, оберненої до матриці

$$\|\alpha_{ij}(t)\|_1^r = \left\| \left(\sum_{k=1}^{\min(p, m)} \frac{\partial^k P(t, \lambda_0(t))}{k! \partial \lambda^k} \varphi_i^{(p+1-k)}(t), \psi_j(t) \right) \right\|_1^r.$$

Враховуючи формули (2.16), (2.17), формула (2.21) набуде вигляду

$$\left(\sum_{k=1}^{\min(p, m)} \frac{\partial^k P(t, \lambda_0(t))}{k! \partial \lambda^k} \sigma^{p+1-k}(H_1, H_2, \dots, H_m) \varphi_i(t), \psi_j(t) \right) = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, r}. \quad (2.22)$$

Виходячи з розв'язності рівнянь (2.19), (2.20) і формули (2.22), можна просто переконатися у таких властивостях оператора Q :

$$\sum_{k=1}^{\min(i, m)} Q \frac{\partial^k P(t, \lambda_0(t))}{k! \partial \lambda^k} \sigma^{i-k+1}(H_1, H_2, \dots, H_m) u(t) = 0, \quad i = \overline{1, p-1}, \quad (2.23)$$

$$\sum_{k=1}^{\min(p, m)} Q \frac{\partial^k P(t, \lambda_0(t))}{k! \partial \lambda^k} \sigma^{p+1-k}(H_1, H_2, \dots, H_m) u(t) = u(t). \quad (2.24)$$

Враховуючи властивості (2.23), (2.24) оператора Q і формулу (2.18), одержуємо

$$L_{k0}[\lambda^k]u_0 = \lambda^k \delta_{k,p} u_0, \quad k = \overline{1, p}. \quad (2.25)$$

З використанням формули (2.25) рівняння (2.9) набуде вигляду

$$\lambda^p u_0 + \sum_{k=p+1}^{\infty} \lambda^k L_{k0} u_0 + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s L_{0s} u_0 + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^s L_{ks} [\lambda^k] u_0 = 0, \quad (2.26)$$

де

$$L_{k0} u_0 = \sum_{j=1}^{\min(k,m)} Q \frac{\partial^j P(t, \lambda_0)}{j! \partial \lambda^j} \sigma^{k+1-j}(H_1, H_2, \dots, H_m) u_0, \quad k = p+1, p+2, \dots \quad (2.27)$$

При цьому згідно з (2.10) відповідний вектор $u(t, \varepsilon)$ зображається розвиненням

$$\begin{aligned} u(t, \varepsilon) = & u_0(t, \varepsilon) - \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s H(t) \tilde{L}_{0s} u_0(t, \varepsilon) \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k H(t) \tilde{L}_{k0} u_0(t, \varepsilon) - \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^s H(t) \tilde{L}_{ks} [\lambda^k] u_0(t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (2.28)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{0s} = & \sum_{j=1}^s (-1)^{j-1} W_{HT}^{(s)}[0, \dots, 0, 0, j], \quad s = 1, 2, \dots, \\ \tilde{L}_{k0} = & \sum_{j=1}^{\min(k,m)} \frac{\partial^j P(t, \lambda_0)}{j! \partial \lambda^j} \sigma^{k+1-j}(H_1, H_2, \dots, H_m), \quad k = 1, 2, \dots, \\ \tilde{L}_{ks}[\lambda^k] = & \sum_{i_m + \dots + 2i_2 + i_1 = k} \sum_{j=0}^s (-1)^{i_m + \dots + i_2 + i_1 + j - 1} \\ & \times W_{HT}^{(s)}[i_m, \dots, i_2, i_1, j], \quad k = 1, 2, \dots, \quad s = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.29)$$

У результаті довели таку теорему.

Теорема 1. Нехай виконуються умови 1°–4°. Тоді, для того щоб вектор (2.1) був формальним розв'язком системи диференціальних рівнянь (1.1), необхідно й достатньо, щоб функція $\lambda(t, \varepsilon)$ задовольняла рівняння розгалуження (2.26), коефіцієнти якого визначено формулами (2.13), (2.15), (2.27). Відповідну вектор-функцію $u(t, \varepsilon)$ зображено формальним розвиненням (2.28), коефіцієнти якого одержано за допомогою формул (2.9).

3. Виведення рівняння розгалуження для розв'язків другої групи. Розв'язки другої групи, які відповідають нескінченним елементарним дільникам граничної в'язки матриць $P(t, \lambda)$, будемо шукати у вигляді вектора

$$x(t, \varepsilon) = v(t, \varepsilon) \exp \left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \frac{d\tau}{\xi(\tau, \varepsilon)} \right), \quad (3.1)$$

де $v(t, \varepsilon)$ — n -вимірний вектор, а $\xi(t, \varepsilon)$ — скалярна функція.

Діючи, як і в п. 2 статті, підставимо вектор (3.1) у систему (1.1). Одержимо

$$A_m^{(0)}(t)v = -\Phi(t, \xi, \varepsilon)v, \quad (3.2)$$

де

$$\Phi(t, \xi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^m Q_k(t, \xi, \varepsilon), \quad (3.3)$$

а оператори $Q_k(t, \xi, \varepsilon)$, $k = \overline{0, m}$, визначено за формулами

$$\begin{aligned} Q_0(t, \varepsilon) &= \sum_{s \geq 1} \varepsilon^s A_m^{(s)}(t); \quad Q_k(t, \xi, \varepsilon) \\ &= \xi^m \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^i \varepsilon^{ih} C_{i+m-k}^{j+m-k} D_j \left[\frac{1}{\xi^{m-k}} \right] A_{i+m-k}(t, \varepsilon) D^{i-j}, \quad k = \overline{1, m-1}, \\ Q_m(t, \xi, \varepsilon) &= \xi^m \sum_{i=0}^m \varepsilon^{ih} A_i(t, \varepsilon) D^i. \end{aligned}$$

Згідно з умовою 1° оператори $Q_k(t, \xi, \varepsilon)$, $k = \overline{0, m}$, можна записати у вигляді розвинень за степенями ε :

$$Q_0(t, \varepsilon) = \sum_{s \geq 1} \varepsilon^s Q_0^{(s)}(t), \quad Q_k(t, \xi, \varepsilon) = \sum_{s \geq 0} \varepsilon^s Q_k^{(s)}(t, \xi), \quad k = \overline{1, m},$$

коефіцієнти яких визначено за формулами

$$\begin{aligned} Q_0^{(s)}(t) &= A_m^{(s)}(t), \quad s = 1, 2, \dots, \\ Q_k^{(s)}(t, \xi) &= \xi^m \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^i C_{i+m-k}^{i-j} D_j \left[\frac{1}{\xi^{m-k}} \right] A_{i+m-k}^{(s-ih)}(t) D^{i-j}, \quad k = \overline{1, m-1}, \quad s = 0, 1, \dots, \\ Q_m^{(s)}(t, \xi) &= \xi^m \sum_{i=0}^m A_i^{(s-ih)}(t) D^i, \quad s = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Отже, задачу пошуку функції $\xi(t, \varepsilon)$ і вектор-функції $v(t, \varepsilon)$ звели до задачі про збурення нульового власного значення й відповідних власних векторів $\tilde{\varphi}_1(t), \tilde{\varphi}_2(t), \dots, \tilde{\varphi}_s(t)$ в'язки матриць

$$N(t, \xi) = \sum_{i=0}^m \xi^i A_{m-i}(t, \varepsilon),$$

симетричної в'язці матриць $P(t, \lambda)$.

Вектор $v(t, \varepsilon)$ задовольняє рівняння (3.2) тоді й тільки тоді, коли виконується умова

$$\left(\Phi(t, \xi, \varepsilon)v(t, \varepsilon), \tilde{\psi}_j(t) \right) = 0, \quad j = \overline{1, s}, \quad (3.4)$$

де $\tilde{\psi}_j(t)$, $j = \overline{1, s}$, — елементи нуль-простору матриці $(A_m^{(0)}(t))^*$, спряженої до матриці $A_m^{(0)}(t)$.

Представимо умову (3.4) більш компактно. Для цього введемо оператор проєктування $\tilde{Q}$, який відображає n -вимірний векторний простір $\tilde{E}$ на його s -вимірний підпростір $\tilde{E}_0$, таким чином:

$$\tilde{Q}v(t) = \sum_{j=1}^s (v(t), \tilde{\psi}_j(t)) \tilde{\varphi}_j(t) \quad \forall v(t) \in \tilde{E},$$

де $\tilde{\varphi}_j(t)$, $j = \overline{1, s}$, — базисні елементи нуль-простору матриці $A_m^{(0)}(t)$. Підпростір $\tilde{E}_0$ є лінійною оболонкою векторів $\tilde{\varphi}_j(t)$, $j = \overline{1, s}$, які визначаємо так, щоб виконувалася умова $\tilde{\varphi}_j(t) \in C^\infty[0; T]$, $j = \overline{1, s}$.

Тоді умова (3.4) буде рівносильною до умови

$$\tilde{Q}\Phi(t, \xi, \varepsilon)v(t, \varepsilon) = 0. \quad (3.5)$$

При виконанні останньої маємо

$$v(t, \varepsilon) = -G(t)\Phi(t, \xi, \varepsilon)v(t, \varepsilon) + v_0(t, \varepsilon), \quad (3.6)$$

де $v_0(t, \varepsilon)$ — довільний вектор із підпростору $\tilde{E}_0$, який потрібно визначити, а $G(t)$ — матриця, узагальнено обернена до матриці $A_m^{(0)}(t)$.

Рівняння (3.6) формально виконано, якщо вектор $v(t, \varepsilon)$ подати у вигляді

$$v(t, \varepsilon) = v_0(t, \varepsilon) + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k (G(t)\Phi(t, \xi, \varepsilon))^k v_0(t, \varepsilon)$$

або

$$v(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (G(t)\Phi(t, \xi, \varepsilon))^k v_0(t, \varepsilon), \quad (3.7)$$

де $(G(t)\Phi(t, \xi, \varepsilon))^0 := E$.

Підставивши (3.7) у (3.5) і використавши позначення

$$\widetilde{M}(\xi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \Phi(t, \xi, \varepsilon) (G(t)\Phi(t, \xi, \varepsilon))^k,$$

зведемо умову (3.5) до вигляду

$$M(\xi, \varepsilon) \equiv \tilde{Q}\widetilde{M}(\xi, \varepsilon)v_0 = 0. \quad (3.8)$$

При цьому

$$v(t, \varepsilon) = v_0(t, \varepsilon) - G(t)\widetilde{M}(\xi, \varepsilon)v_0(t, \varepsilon). \quad (3.9)$$

Представимо $M(\xi, \varepsilon)$, $\widetilde{M}(\xi, \varepsilon)$ через формальні розвинення за степенями малого параметра ε :

$$M(\xi, \varepsilon) = \sum_{k+s \geq 0} \varepsilon^s M_{ks}[\xi^k], \quad \widetilde{M}(\xi, \varepsilon) = \sum_{k+s \geq 0} \varepsilon^s \widetilde{M}_{ks}[\xi^k]. \quad (3.10)$$

Міркуючи далі так само, як і в п. 2, з (3.8) отримаємо рівняння розгалуження для розв'язків другої групи:

$$M(\xi, \varepsilon) \equiv \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^s (-1)^{j-1} \varepsilon^s \tilde{Q} W_{GQ}^{(s)}[0, \dots, 0, 0, j] v_0 + \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m i_m + \dots + 2 i_2 + i_1 = k} \sum_{j=0}^s (-1)^{i_m + \dots + i_2 + i_1 + j - 1} \varepsilon^s \tilde{Q} W_{GQ}^{(s)}[i_m, \dots, i_2, i_1, j] v_0 = 0, \quad (3.11)$$

де $\tilde{W}_{GQ}^{(s)}[i_m, \dots, i_2, i_1, j]$ — сума всіх можливих добутків операторів $GQ_k^{(s_{ki})}$, $k = \overline{0, m}$, сума верхніх індексів s_{ki} яких дорівнює s , $s_{ki} \in N \cup \{0\}$, $k = \overline{1, m}$, $s_{0i} \in N$, а вирази $W_{GQ}^{(s)}[i_m, \dots, i_2, i_1, j]$ відрізняються від виразів $\tilde{W}_{GQ}^{(s)}[i_m, \dots, i_2, i_1, j]$ лише відсутністю в усіх їхніх доданках першого множника $G(t)$.

З (3.11) отримаємо такі коефіцієнти розвинень (3.10):

$$M_{00} = 0, \quad M_{0s} v_0 = \sum_{j=1}^s (-1)^{j-1} \tilde{Q} W_{GQ}^{(s)}[0, \dots, 0, 0, j] v_0, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (3.12)$$

$$M_{k0}[\xi^k] v_0 = \sum_{m i_m + \dots + 2 i_2 + i_1 = k} (-1)^{i_m + \dots + i_2 + i_1 - 1} \times \tilde{Q} W_{GQ}^{(0)}[i_m, \dots, i_2, i_1, 0] v_0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.13)$$

$$M_{ks}[\xi^k] v_0 = \sum_{m i_m + \dots + 2 i_2 + i_1 = k} \sum_{j=0}^s (-1)^{i_m + \dots + i_2 + i_1 + j - 1} \times \tilde{Q} W_{GQ}^{(s)}[i_m, \dots, i_2, i_1, j] v_0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad s = 1, 2, \dots \quad (3.14)$$

Позначивши

$$G_j(t) = -G(t) \frac{\partial^j N(t, 0)}{j! \partial \xi^j}, \quad j = \overline{1, m},$$

і скориставшись рекурентними формулами

$$\sigma^1(G_1, G_2, \dots, G_m) = E,$$

$$\sigma^i(G_1, G_2, \dots, G_m) = \sum_{j=1}^{\min(i-1, m)} G_j(t) \sigma^{i-j}(G_1, G_2, \dots, G_m), \quad i = 2, 3, \dots,$$

з (3.13) одержимо

$$M_{k0}[\xi^k] v_0 = \xi^k \sum_{j=1}^{\min(k, m)} \tilde{Q} \frac{\partial^j N(t, 0)}{j! \partial \xi^j} \sigma^{k+1-j}(G_1, G_2, \dots, G_m) v_0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.15)$$

Оскільки за умовою 4° в'язка матриць $P(t, \lambda)$ має s нескінченних елементарних дільників кратністю q кожний, то, як показано в [29], нульовому власному значенню симетричної в'язки матриць $N(t, \xi)$ відповідає s жорданових ланцюжків векторів завдовжки q кожний. Вектори цих ланцюжків складаються з власних векторів $\tilde{\varphi}_k(t)$, $k = \overline{1, s}$, і відповідних приєднаних векторів $\tilde{\varphi}_k^{(i)}(t)$, $k = \overline{1, s}$, $i = \overline{2, q}$, які задовольняють співвідношення

$$N(t, 0)\tilde{\varphi}_k(t) = 0, \quad k = \overline{1, s}, \quad (3.16)$$

$$N(t, 0)\tilde{\varphi}_k^{(i)}(t) + \sum_{j=1}^{\min(i-1, m)} \frac{\partial^j N(t, 0)}{j! \partial \xi^j} \tilde{\varphi}_k^{(i-j)}(t) = 0, \quad k = \overline{1, s}, \quad i = \overline{2, q}; \quad (3.17)$$

при цьому рівняння

$$N(t, 0)\tilde{z}_k + \sum_{j=1}^{\min(q, m)} \frac{\partial^j N(t, 0)}{j! \partial \xi^j} \tilde{\varphi}_k^{(q+1-j)}(t) = 0, \quad k = \overline{1, s}, \quad (3.18)$$

нерозв'язні щодо векторів z_k , $k = \overline{1, s}$.

Приєднані вектори цих ланцюжків можна виразити через власні вектори за формулою

$$\tilde{\varphi}_k^{(i)}(t) = \sigma^i(G_1, G_2, \dots, G_m) \tilde{\varphi}_k(t), \quad k = \overline{1, s}, \quad i = \overline{2, q}.$$

Згідно з [29] жорданів набір власних і приєднаних векторів, які відповідають нескінченним елементарним дільникам в'язки матриць (1.2), є повним, тобто

$$\det \left\| \left(\sum_{k=1}^{\min(q, m)} \frac{\partial^k N(t, 0)}{k! \partial \xi^k} \sigma^{q+1-k}(G_1, G_2, \dots, G_m) \tilde{\varphi}_i(t), \tilde{\psi}_j(t) \right) \right\|_{i, j = \overline{1, s}} \neq 0 \quad \forall t \in [0; T].$$

Тому вектори $\tilde{\psi}_j(t)$, $j = \overline{1, s}$, визначимо так, щоб виконувалися співвідношення

$$\sum_{k=1}^{\min(q, m)} \left(\frac{\partial^k N(t, 0)}{j! \partial \xi^k} \sigma^{q+1-k}(G_1, G_2, \dots, G_m) \tilde{\varphi}_i(t), \tilde{\psi}_j(t) \right) = \delta_{i, j}, \quad i, j = \overline{1, s}. \quad (3.19)$$

Враховуючи розв'язність рівнянь (3.17), (3.18) і формулу (3.19), можна встановити такі властивості оператора проєктування $\tilde{Q}$:

$$\sum_{k=1}^{\min(i, m)} \tilde{Q} \frac{\partial^k N(t, 0)}{k! \partial \xi^k} \sigma^{i-k+1}(G_1, G_2, \dots, G_m) v(t) = 0, \quad i = \overline{1, q-1}, \quad (3.20)$$

$$\sum_{k=1}^{\min(q, m)} \tilde{Q} \frac{\partial^k N(t, 0)}{k! \partial \xi^k} \sigma^{q-k+1}(G_1, G_2, \dots, G_m) v(t) = v(t). \quad (3.21)$$

Згідно з властивостями (3.20), (3.21) оператора проєктування $\tilde{Q}$ з формули (3.15) отримаємо

$$M_{k0}[\xi^k] v_0 = \delta_{k, q} \xi^k v_0, \quad k = \overline{1, q}. \quad (3.22)$$

Тоді рівняння розгалуження (3.11) набуває вигляду

$$\xi^q v_0 + \sum_{k=q+1}^{\infty} \xi^k M_{k0} v_0 + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s M_{0s} v_0 + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^s M_{ks} [\xi^k] v_0 = 0. \quad (3.23)$$

Вектор $v(t, \varepsilon)$ зображується розвиненнями

$$\begin{aligned} v(t, \varepsilon) = v_0(t, \varepsilon) - \sum_{k=1}^{\infty} \xi^k G(t) \widetilde{M}_{k0} v_0(t, \varepsilon) \\ - \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s G(t) \widetilde{M}_{0s} v_0(t, \varepsilon) - \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^s G(t) \widetilde{M}_{ks} [\xi^k] v_0(t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (3.24)$$

коефіцієнти якого виражено формулами

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_{0s} &= \sum_{j=1}^s (-1)^{j-1} W_{GQ}^{(s)}[0, \dots, 0, 0, j], \quad s = 1, 2, \dots, \\ \widetilde{M}_{k0} &= \sum_{j=1}^{\min(k, m)} \frac{\partial^j N(t, 0)}{j! \partial \xi^j} \sigma^{k+1-j}(G_1, G_2, \dots, G_m), \quad k = 1, 2, \dots, \\ \widetilde{M}_{ks} [\xi^k] &= \sum_{m i_m + \dots + 2 i_2 + i_1 = k} \sum_{j=0}^s (-1)^{i_m + \dots + i_2 + i_1 + j - 1} \\ &\quad \times W_{GQ}^{(s)}[i_m, \dots, i_2, i_1, j], \quad k = 1, 2, \dots, \quad s = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.25)$$

Справедлива така теорема.

Теорема 2. Нехай виконуються умови 1°–4°. Тоді, для того щоб вектор (3.1) був формальним розв'язком системи диференціальних рівнянь (1.1), необхідно й достатньо, щоб функція $\xi(t, \varepsilon)$ була розв'язком рівняння розгалуження (3.23), коефіцієнти якого визначено за формулами (3.12), (3.14), (3.15). Відповідну вектор-функцію $v(t, \varepsilon)$ зображено розвиненням (3.24), коефіцієнти якого одержано за допомогою формул (3.25).

4. Аналіз рівнянь розгалуження. Метод внутрішнього проєктування. Використовуючи методи діаграм Ньютона та внутрішнього проєктування, дослідимо структуру формальних розв'язків системи рівнянь (1.1) залежно від поведінки коефіцієнтів рівнянь розгалуження (2.26), (3.23).

Розглянемо спочатку рівняння (2.26). Оператори $L_{ks}[\lambda^k]$ відображають простір E на підпростір E_0 . Позначимо звуження цих операторів на підпростір E_0 через $\widehat{L}_{ks}[\lambda^k]$, при цьому шуканий вектор $u_0(t, \varepsilon)$ записуємо в координатах базису підпростору E_0 . Тоді у підпросторі E_0 рівняння (2.26) має вигляд

$$\left(\lambda^p E_r + \sum_{k=p+1}^{\infty} \lambda^k \widehat{L}_{k0} + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \widehat{L}_{0s} + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^s \widehat{L}_{ks} [\lambda^k] \right) u_0 = 0. \quad (4.1)$$

Для аналізу рівняння розгалуження (4.1) не можемо застосовувати метод діаграм Ньютона, оскільки рівняння (4.1) є векторним рівнянням, а даний метод розроблено для скалярного рівняння. Тому, для того щоб досліджувати рівняння (4.1), потрібно або узагальнити метод діаграм Ньютона на випадок векторних рівнянь, або спробувати звести задачу дослідження рівняння (4.1) до задачі для відповідного скалярного рівняння. У цій статті будемо реалізовувати останній варіант. Для цього використаємо метод внутрішнього проєктування.

Припустимо, що виконується умова

5°. $\widehat{L}_{01} \neq 0$.

Тоді, зробивши в рівнянні (4.1) заміну

$$\lambda(t, \varepsilon) = \mu \widehat{\lambda}(t, \varepsilon), \quad (4.2)$$

де $\mu = \varepsilon^{\frac{1}{p}}$, одержимо

$$\left(\widehat{L}_{01} + \widehat{\lambda}^p E_r + \sum_{s=1}^{\infty} \mu^s \widehat{\lambda}^{s+p} \widehat{L}_{s+p,0} + \sum_{s=1}^{\infty} \mu^s \widehat{L}_{0, \frac{s+p}{p}} + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=1}^s \mu^s \widehat{L}_{k, \frac{s+p-k}{p}} [\widehat{\lambda}^k] \right) u_0 = 0. \quad (4.3)$$

Таким чином, задачу (2.2) про збурення власних значень і власних векторів граничної в'язки матриць (1.2) у векторному просторі E звели до задачі про збурення власних значень і власних векторів матриці $R(t) = -\widehat{L}_{01} = \left\| \left(\Gamma_0^{(1)}(t) \varphi_i(t), \psi_j(t) \right) \right\|_1^r$ у підпросторі E_0 , тобто задачу (2.2) спроектували у більш складну задачу про збурення, але у просторі меншої розмірності.

Оскільки при $\mu = 0$ рівняння (4.3) набуває вигляду $(\widehat{L}_{01} + \widehat{\lambda}^p E_r) u_0 = 0$, то власне значення $\widehat{\lambda}(t, \varepsilon)$ задачі (4.3) потрібно шукати у вигляді

$$\widehat{\lambda}(t, \varepsilon) = \widehat{\lambda}_1(t) + \eta(t, \varepsilon), \quad \widehat{\lambda}_1(t) = \sqrt[p]{\eta_0(t)}, \quad (4.4)$$

де $\eta_0(t)$ — власне значення матриці $R(t)$, а $\eta(t, \varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Підставивши (4.4) у (4.3), отримаємо

$$(R(t) - \eta_0(t) E_r) u_0(t, \varepsilon) = \widehat{F}(\eta, \mu) u_0(t, \varepsilon), \quad (4.5)$$

де

$$\widehat{F}(\eta, \mu) = \sum_{k=1}^p \eta^k \widehat{F}_{k0} + \sum_{s=1}^{\infty} \mu^s \widehat{F}_{0s} + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{s+p} \mu^s \widehat{F}_{ks} [\eta^k],$$

$$\widehat{F}_{k0} = C_p^k \widehat{\lambda}_1^p(t), \quad k = \overline{1, p}, \quad (4.6)$$

$$\widehat{F}_{0s} = \widehat{L}_{0, \frac{s+p}{p}} + \widehat{\lambda}_1^{s+p} \widehat{L}_{s+p,0} + \sum_{i=1}^s \widehat{L}_{i, \frac{p+s-i}{p}} [\widehat{\lambda}_1^i], \quad s \geq 1, \quad (4.7)$$

$$\widehat{F}_{ks} [\eta^k] = \sum_{i=k}^s \widehat{L}_{i, \frac{p+s-i}{p}} [\eta^k \widehat{\lambda}_1^{i-k}] + \eta^k C_{s+p}^k \widehat{\lambda}_1^{s+p-k} \widehat{L}_{s+p,0}, \quad s \geq 1, \quad k = \overline{1, s+p}. \quad (4.8)$$

Припустимо, що виконується умова

6°. Власне значення $\eta_0(t)$ матриці $R(t)$ відмінне від нуля для будь-якого $t \in [0, T]$ і має сталу кратність $r_1 \leq r$, при цьому власному значенню $\eta_0(t)$ відповідає один жорданів ланцюжок векторів довжиною r_1 .

Тоді згідно з [12] вектори $g_i(t)$, $i = \overline{1, r_1}$, цього жорданового ланцюжка можна визначити за формулами

$$g_i(t) = \hat{H}^{i-1}(t)g(t), \quad i = \overline{1, r_1}, \quad (4.9)$$

де $g(t)$ — деякий фіксований власний вектор матриці $R(t)$, $\hat{H}(t)$ — матриця, узагальнено обернена до матриці $(R(t) - \eta_0(t)E_r)$.

Позначимо через $\tilde{g}(t)$ елемент нуль-простору матриці $(R(t) - \eta_0(t)E_r)^*$, спряженої до матриці $(R(t) - \eta_0(t)E_r)$, який визначатимемо таким чином, щоб виконувалася умова

$$(\hat{H}^{i-1}(t)g(t), \tilde{g}(t)) = \delta_{i, r_1}, \quad i = \overline{1, r_1}. \quad (4.10)$$

Для задачі (4.5) виведемо нове рівняння розгалуження. Вектор $u_0(t, \varepsilon) \in E_0$ буде розв'язком рівняння (4.5) тоді й тільки тоді, коли виконується умова сумісності

$$(\hat{F}(\eta, \mu)u_0, \tilde{g}(t)) = 0. \quad (4.11)$$

При цьому вектор $u_0 \in E_0$ визначатиметься за формулою

$$u_0(t, \varepsilon) = g(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{H}\hat{F})^k g(t). \quad (4.12)$$

Підставивши (4.12) в (4.11), отримаємо

$$U(\eta, \mu) = \left(\hat{F}g(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{F}(\hat{H}\hat{F})^k g(t), \tilde{g}(t) \right) = 0. \quad (4.13)$$

Подамо оператор $U(\eta, \mu)$ у вигляді формального ряду за степенями η та μ . Позначивши

$$\tilde{U}(\eta, \mu) = \hat{F} + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{F}(\hat{H}\hat{F})^k,$$

одержимо

$$\hat{H}\tilde{U}(\eta, \mu) = \sum_{i=1}^{\infty} (\hat{H}\hat{F})^i = \sum_{k+s \geq 1} \sum_{i=1}^{k+s} \mu^s \tilde{P}_i^{k,s}(\hat{H}\hat{F}), \quad (4.14)$$

де $\tilde{P}_i^{k,s}(\hat{H}\hat{F})$ — сума всіх можливих добутоків i множників $\hat{H}\hat{F}_{k_1 s_1}[\eta^{k_1}], \dots, \hat{H}\hat{F}_{k_i s_i}[\eta^{k_i}]$ таких, що $s_1 + \dots + s_i = s$, $k_1 + \dots + k_i = k$, $s_j, k_j \in N \cup \{0\}$, $j = \overline{1, i}$.

Тоді

$$U(\eta, \mu) = \sum_{k+s \geq 1} \mu^s U_{ks}[\eta^k],$$

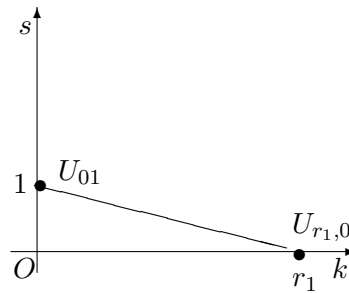


Рис. 1

де

$$U_{ks}[\eta^k] = \sum_{i=1}^{k+s} \left(P_i^{k,s}(\hat{H}\hat{F})g, \tilde{g} \right), \quad k+s \geq 1, \quad (4.15)$$

вираз $P_i^{k,s}(\hat{H}\hat{F})$ відрізняється від виразу $\tilde{P}_i^{k,s}(\hat{H}\hat{F})$ лише відсутністю в усіх його доданках першого множника $\hat{H}$.

Враховуючи умову 5° , а також формули (2.28), (4.6) – (4.9), (4.15), отримуємо $U_{k0} = 0$, $k < r_1$, $U_{r_1 0} = \left(p\hat{\lambda}_1^{p-1} \right)^{r_1} \eta^{r_1} \neq 0 \quad \forall t \in [0, T]$. Тоді з урахуванням також формул (4.14) і (4.15) рівняння розгалуження (4.13) набуде вигляду

$$\left(p\hat{\lambda}_1^{p-1} \right)^{r_1} \eta^{r_1} + \sum_{k=r_1+1}^{\infty} \eta^k U_{k0} + \sum_{s=1}^{\infty} \mu^s U_{0s} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \mu^s U_{ks}[\eta^k] = 0. \quad (4.16)$$

Отже, багатовимірний випадок звівся до одновимірному. Тепер до рівняння (4.16) можна застосувати метод діаграм Ньютона. Використовуючи цей метод, із рівняння (4.16) визначаємо функцію $\eta(t, \varepsilon)$, а з формули (4.12) — вектор $v_0(t, \varepsilon)$.

Припустимо, що виконується умова

7° . $U_{01} \neq 0 \quad \forall t \in [0, T]$.

Тоді діаграма Ньютона для рівняння (4.16) складається з однієї ланки, яка з'єднує точки $(0; 1)$ і $(r_1, 0)$ (рис. 1).

Оскільки ланка діаграми Ньютона має нахил $\frac{1}{r_1}$, а відповідне визначальне рівняння

$$\eta_1^{r_1} U_{r_1 0} + U_{01} = 0$$

має r_1 простих відмінних від нуля коренів $\eta_1(t)$, то згідно з методом діаграм Ньютона отримаємо r_1 значень функцій $\eta(t, \varepsilon)$, які можна зобразити у вигляді формальних розв'язків

$$\eta(t, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^{\frac{i}{r_1}} \eta_i(t). \quad (4.17)$$

Підставивши (4.17) у (4.4), а потім у (4.2), отримаємо

$$\hat{\lambda}(t, \varepsilon) = \mu \left(\sqrt[r]{\eta_0(t)} + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^{\frac{i}{r_1}} \eta_i(t) \right). \quad (4.18)$$

Невідомі коефіцієнти формального ряду (4.18) можна знайти за допомогою методу невідзначених коефіцієнтів безпосередньо з рівняння розгалуження (4.16).

Отже, за формулою (4.18) вдалося побудувати pr_1 функції $\hat{\lambda}(t, \varepsilon)$. Використовуючи формули (4.17) і (4.12), за формулою (4.12) можна знайти вектор $v_0(t, \varepsilon)$, заданий у базисі підпростору E_0 . Потім, підставивши отриманий розклад у (2.27) і перейшовши до простору E , знайдемо розклад вектора $u(t, \varepsilon)$. Враховуючи (4.18), можна переконатися у правильності розкладу

$$u(t, \varepsilon) = g(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^{\frac{i}{r_1}} u_i(t). \quad (4.19)$$

Унаслідок довели таку теорему.

Теорема 3. Якщо виконуються умови $1^\circ - 7^\circ$, то система (1.1) має на відрізку $[0; T]$ pr_1 формальних розв'язків вигляду (2.1), де скалярну функцію $\lambda(t, \varepsilon)$ визначено формулами (4.2), (4.17), (4.18), а вектор-функцію $u(t, \varepsilon)$ — формулами (4.12), (4.19).

Зауваження 1. Якщо матриця $R(t)$ має кілька відмінних від нуля власних значень, сума кратностей яких дорівнює r і для кожного з яких виконуються умови теореми 3, то згідно з цією теоремою можна побудувати pr формальних розв'язків системи (1.1). Зокрема, якщо матриця $R(t)$ має r простих власних значень, то з теореми 3 випливає результат, отриманий у роботі [29].

Зауваження 2. Якщо $\hat{L}_{01} = 0$, то тоді головними операторами є оператори $\hat{L}_{02}$ і $\hat{L}_{11}$. Щоб виділити ці оператори з рівняння (4.1), потрібно замість заміни (4.2) зробити заміни $\lambda(t, \varepsilon) = \varepsilon \hat{\lambda}(t, \varepsilon)$ і $\lambda(t, \varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{p-1}} \hat{\lambda}(t, \varepsilon)$. Якщо ж і $\hat{L}_{02} = 0$, то тоді головні оператори потрібно шукати серед операторів $\hat{L}_{03}$, $\hat{L}_{12}$, $\hat{L}_{11}$, тобто для визначення головних операторів і відповідних заміни можна використовувати діаграми Ньютона для рівняння (4.1).

Розглянемо тепер рівняння розгалуження (3.23) для розв'язків другої групи системи (1.1). У підпросторі $\tilde{E}_0$ рівняння (3.23) має вигляд

$$\left(\xi^q E_s + \sum_{k=q+1}^{\infty} \xi^k \widehat{M}_{k0} + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \widehat{M}_{0s} + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^s \widehat{M}_{ks}[\xi^k] \right) v_0 = 0, \quad (4.20)$$

де $\widehat{M}_{ks}[\xi^k]$ — звуження операторів $M_{ks}[\xi^k]$ на підпростір $\tilde{E}_0$.

Припустимо, що виконується умова

8° . $\widehat{M}_{01} \neq 0 \quad \forall t \in [0, T]$.

Тоді у рівняння (4.20) зробимо заміну

$$\xi(t, \varepsilon) = \nu \left(\hat{\xi}_0(t) + \theta(t, \varepsilon) \right), \quad \nu = \varepsilon^{\frac{1}{q}}, \quad \hat{\xi}_0(t) = \sqrt[q]{\theta_0(t)}, \quad (4.21)$$

де $\theta_0(t)$ — власне значення матриці

$$S(t) = -\widehat{M}_{01} = \left\| \left(-A_m^{(1)}(t) \tilde{\varphi}_i(t), \tilde{\psi}_j(t) \right) \right\|_1^s.$$

Підставивши (4.21) у (4.20), отримаємо

$$(S(t) - \theta_0(t) E_s) v_0 = \hat{\Phi}(\theta, \nu) v_0, \quad (4.22)$$

де

$$\begin{aligned}\widehat{\Phi}(\theta, \nu) &= \sum_{k=1}^q \widehat{\xi}^k \widehat{\Phi}_{k0} + \sum_{s=1}^{\infty} \nu^s \widehat{\Phi}_{0s} + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{s+q} \nu^s \widehat{\Phi}_{ks}[\theta^k], \\ \widehat{\Phi}_{k0} &= C_q^k \widehat{\xi}_0^{q-k}, \quad k = \overline{1, q}, \\ \widehat{\Phi}_{0s} &= \widehat{M}_{0, \frac{s+q}{q}} + \widehat{\xi}_0^{s+q} \widehat{M}_{s+q, 0} + \sum_{i=1}^s \widehat{M}_{i, \frac{s+q-i}{q}} \left[\widehat{\xi}_0^i \right], \quad s \geq 1, \\ \widehat{\Phi}_{ks}[\theta^k] &= \sum_{i=k}^s \widehat{M}_{i, \frac{s+q-i}{q}} \left[\widehat{\xi}_0^{i-k} \theta^k \right] + \theta^k C_{s+q}^k \widehat{\xi}_0^{s+q-k} \widehat{M}_{s+q, 0}, \quad s \geq 1, \quad k = \overline{1, s+q}.\end{aligned}\quad (4.23)$$

Припустимо, що виконується умова

9°. Власне значення $\theta_0(t)$ матриці $S(t)$ відмінне від нуля і має сталу кратність $s_1 \leq s$, де s — розмірність підпростору $\widetilde{E}_0$, і йому відповідає один елементарний дільник такої ж кратності.

Тоді вектори $f_i(t)$, $i = \overline{1, s_1}$, які утворюють жорданів ланцюжок векторів, можна визначити за формулами $f_i(t) = \widehat{G}^{i-1}(t)f(t)$, $i = \overline{1, s_1}$, де $f(t)$ — деякий фіксований власний вектор матриці $S(t)$, а $\widehat{G}^{i-1}(t)$ — матриця узагальнено обернена до матриці $S(t) - \theta_0(t)E_s$. При цьому власний вектор $f(t)$ і елемент $\widetilde{f}(t)$ нуль-простору матриці $(S(t) - \theta_0(t)E_s)^*$ визначатимемо таким чином, щоб виконувалася рівність

$$\left(\widehat{G}^{i-1}(t)f(t), \widetilde{f}(t) \right) = \delta_{1, s_1}, \quad i = \overline{1, s_1}.$$

Провівши аналогічні міркування, як і для випадку рівняння розгалуження для розв'язків першої групи, отримаємо відповідне рівняння розгалуження для розв'язків другої групи

$$(q\widehat{\xi}_0^{q-1})^{s_1} \theta^{s_1} + \sum_{k=s_1+1}^{\infty} \theta^k V_{k0} + \sum_{s=1}^{\infty} \nu^s V_{0s} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \nu^s V_{ks}[\theta^k] = 0, \quad (4.24)$$

де

$$V_{ks}[\theta^k] = \sum_{i=1}^{k+s} \left(P_i^{k,s}(\widehat{G}\widehat{\Phi})f, \widetilde{f} \right), \quad k+s \geq 1.$$

Отже, для розв'язків другої групи багатовимірний випадок також звівся до одновимірного. Тепер до рівняння (4.24) можна застосувати метод діаграм Ньютона. Використовуючи цей метод, із рівняння (4.24) визначаємо функцію $\eta(t, \varepsilon)$, а з формули

$$v_0(t, \varepsilon) = f(t) + \sum_{k+s \geq 1} \sum_{i=1}^{k+s} \nu^s \widehat{G} P_i^{k,s}(\widehat{G}\widehat{\Phi})f(t) \quad (4.25)$$

— вектор $v_0(t, \varepsilon)$.

Припустимо, що виконується умова

10°. $V_{01} \neq 0 \quad \forall t \in [0, T]$.

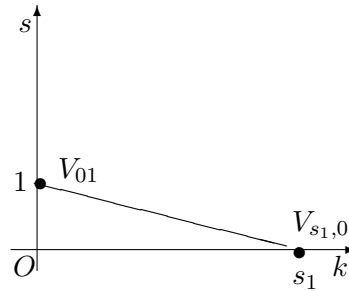


Рис. 2

Тоді відповідна діаграма Ньютона (рис. 2) складається з однієї ланки, що з'єднує точки $(0; 1)$ і $(s_1; 0)$, нахил якої дорівнює $\frac{1}{s_1}$. При цьому визначальне рівняння $(q\hat{\xi}_0^{q-1})^{s_1}\theta^{s_1} + V_{01} = 0$ згідно з умовою 10° має s_1 простих відмінних від нуля коренів. Тоді рівняння розгалуження (4.24) має s_1 розв'язків, які зображаються формальними розвиненнями за степенями $\nu^{\frac{1}{s_1}}$. Далі згідно з (4.21) знайдемо $s_1 q$ функцій $\xi(t, \varepsilon)$, які зображаються формальними розвиненнями

$$\xi(t, \varepsilon) = \nu \left(\sqrt[q]{\theta_0(t)} + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^{\frac{i}{s_1}} \theta_i(t) \right). \quad (4.26)$$

Підставивши функцію $\theta(t, \varepsilon)$ у формулу (4.25) і згрупувавши доданки при однакових степенях $\nu^{\frac{1}{s_1}}$, знайдемо відповідний розклад для вектора $v_0(t, \varepsilon)$. Потім, підставивши отриманий вектор $v_0(t, \varepsilon)$ у формулу (3.24) і перейшовши у простір E , отримаємо розклад для вектора $v(t, \varepsilon)$:

$$v(t, \varepsilon) = f(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \nu^{\frac{i}{s_1}} v_i(t). \quad (4.27)$$

Справедлива така теорема.

Теорема 4. Якщо виконуються умови $1^\circ - 4^\circ$, $8^\circ - 10^\circ$, то система (1.1) має на відрізку $[0; T]$ qs_1 формальних розв'язків вигляду (3.1), де скалярну функцію $\xi(t, \varepsilon)$ визначено формулами (4.21), (4.24), (4.26), а вектор-функцію $v(t, \varepsilon)$ — формулами (4.25), (4.27).

Зауваження 3. Якщо матриця $S(t)$ має кілька відмінних від нуля власних значень, сума кратностей яких дорівнює s і для кожного з яких виконуються умови теореми 4, то згідно з цією теоремою можна побудувати qs формальних розв'язків системи (1.1). Зокрема, якщо матриця $S(t)$ має s простих власних значень, то з теореми 4 випливає результат, отриманий у роботі [29].

Зауваження 4. Якщо $\widehat{M}_{01} = 0$, то тоді головними операторами будуть оператори $\widehat{M}_{02}$ і $\widehat{M}_{11}$. Щоб виділити ці оператори з рівняння (4.20), потрібно замість заміни (4.21) зробити заміни $\xi(t, \varepsilon) = \varepsilon \widehat{\xi}(t, \varepsilon)$ і $\xi(t, \varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{q-1}} \widehat{\xi}(t, \varepsilon)$. Якщо ж і $\widehat{M}_{02} = 0$, то тоді головні оператори потрібно шукати серед операторів $\widehat{M}_{03}$, $\widehat{M}_{12}$, $\widehat{M}_{11}$, тобто для визначення головних операторів і відповідних замін можна використовувати діаграми Ньютона для рівняння (4.20).

Автор заявляє про відсутність конфлікту інтересів і спеціального фінансування цієї роботи. Всі необхідні дані містяться в статті.

Література

1. G. D. Birkhoff, *On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter*, Trans. Amer. Math. Soc., № 9, 219–231 (1908).
2. Я. Д. Тамаркин, *О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды*, Тип. М. П. Фроловой, Петроград (1917).
3. M. Hukuhara, *Sur les points singuliers des équations différentielles linéaires*, J. Fac. Sci. Univ. Hokkaido Math., № 2, 13–81 (1936).
4. С. Ф. Фещенко, *Об асимптотическом расщеплении системы линейных дифференциальных уравнений*, Укр. мат. журн., **7**, № 2, 167–179 (1955).
5. С. Ф. Фещенко, *Об асимптотическом расщеплении системы линейных дифференциальных уравнений*, Укр. мат. журн., **7**, № 4, 252–443 (1955).
6. H. L. Turritin, *Asymptotic expansions of solutions systems of ordinary linear differential equations containing a parameter*, Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, vol. II, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ (1952), pp. 81–116.
7. W. Wasow, *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, John Wiley and Sons Inc., New York, London, Sydney (1965).
8. Н. И. Шкиль, *Асимптотическое поведение линейных систем в случае кратных корней характеристического уравнения*, Укр. мат. журн., **16**, № 4, 383–392 (1962).
9. Н. И. Шкиль, *Асимптотическое решение системы линейных дифференциальных уравнений в случае кратных корней характеристического уравнения*, Изв. вузов. Математика, **39**, № 2, 176–185 (1964).
10. Н. И. Шкиль, *Построение общего асимптотического решения системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром*, Изв. вузов. Математика, № 1, 163–169 (1966).
11. Г. С. Жукова, *Асимптотическое интегрирование обыкновенных линейных дифференциальных уравнений*, Изд-во Воронеж. ун-та, Воронеж (1988).
12. А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець, *Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями*, Вища шк., Київ (2000).
13. В. П. Яковець, *Асимптотика решений линейной сингулярно возмущенной системы с вырождением*, Укр. мат. журн., **42**, № 11, 1559–1566 (1990).
14. В. П. Яковець, *Деякі властивості вироджених лінійних систем*, Укр. мат. журн., **49**, № 9, 1278–1296 (1997).
15. P. Samusenko, *Asymptotic integration of singularly perturbed linear systems of differential-algebraic equations*, Miskolc Math. Notes, **17**, № 2, 1033–1047 (2016).
16. S. Radchenko, V. Samoilenko, P. Samusenko, *Asymptotic solutions of singularly perturbed linear differential-algebraic equations with periodic coefficients*, Mat. Stud., **59**, № 2, 187–200 (2023).
17. S. L. Campbell, *A general form for solvable linear time varying singular systems of differential equations*, SIAM J. Math. Anal., **118**, № 14, 1101–1115 (1987).
18. S. L. Campbell, L. R. Petzold, *Canonical forms and solvable singular systems of differential equations*, SIAM J. Algebr. Discrete Methods, № 4, 517–521 (1983).
19. C. W. Gear, L. R. Petzold, *ODE methods for the solutions of differential-algebraic systems*, SIAM J. Numer. Anal., **21**, № 4, 716–728 (1984).
20. E. Griepentrog, R. Marz, *Differential-algebraic equations and their numerical treatment*, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig (1986).
21. М. Б. Віра, *Асимптотика розв'язків крайових задач для лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь у випадку кратного спектра граничної матриці*, Нелін. коливання, **2**, № 4, 444–456 (2018).

22. О. В. Тарасенко, *Задача оптимального керування для лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з виродженнями у випадку кратного спектра граничної в'язки матриць*, Динам. системы, **3(31)**, № 3-4, 289–308 (2013).
23. І. А. Павлюк, *Асимптотичні властивості розв'язків неавтономних систем диференціальних рівнянь другого порядку*, Вид-во Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка, Київ (1970).
24. Н. И. Шкиль, З. Шаманов, *Об асимптотическом решении системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка*, Приближенные методы математического анализа, Київ. пед. ін-т (1978), с. 137–146.
25. Н. И. Шкиль, И. И. Конет, *Асимптотические свойства формальных фундаментальных матриц систем линейных дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих параметр*, Укр. мат. журн., **35**, № 1, 124–130 (1983).
26. В. А. Кушнір, *Побудова асимптотичних розв'язків систем лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків з малим параметром при похідних*, Наук. часопис Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки, **8**, № 1, 139–143 (2007).
27. С. П. Пафик, *Асимптотика загального розв'язку лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь вищого порядку з виродженнями*, Нелін. коливання, **21**, № 3, 368–396 (2016).
28. С. П. Пафик, В. П. Яковець, *Асимптотичний аналіз загального розв'язку лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь вищих порядків із виродженнями*, Нелін. коливання, **18**, № 1, 79–101 (2015).
29. С. П. Пафик, *Асимптотика загального розв'язку лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь вищих порядків із виродженнями у випадку кратного спектра граничної в'язки матриць*, Динам. системы, **3(31)**, № 3-4, 255–274 (2014).

Одержано 22.04.24