

**ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ’ЯЗКИ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ НЕОДНОРІДНИХ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ
З ПРЯМОКУТНИМИ ПЕРІОДИЧНИМИ МАТРИЦЯМИ
ТА ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ У ФІКСОВАНІ МОМЕНТИ ЧАСУ**

Михайло Єлішевич

*Київський національний університет будівництва і архітектури
просп. Повітряних Сил України, 31, Київ, 03037, Україна
e-mail: m-a-e@i.ua*

We construct periodic solutions of a system of first-order linear inhomogeneous differential equations with rectangular periodic matrices and pulse action at fixed instants of time and determine the conditions for their existence.

Побудовано періодичні розв’язки системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку з прямокутними періодичними матрицями та імпульсною дією у фіксовані моменти часу і визначено умови їхнього існування.

1. Постановка задачі. Для системи

$$B(t) \frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad t \in R \setminus \{t_i, i \in Z\}, \quad (1)$$

$$x(t_i + 0) = S_i x(t_i - 0) + \eta_i, \quad i \in Z, \quad (2)$$

$$t_{i+d} = t_i + T, \quad S_{i+d} = S_i, \quad \eta_{i+d} = \eta_i, \quad i \in Z, \quad (3)$$

побудуємо періодичні розв’язки з періодом T . Тут t_i , $t_i < t_{i+1}$, $i \in Z$, — точки імпульсної дії, $A(t)$, $B(t)$ — прямокутні матриці-функції розмірності $m \times n$, $f(t)$ — вектор-функція розмірності m , $A(t), B(t), f(t) \in C^\infty(R \setminus \{t_i, i \in Z\}, T)$ — періодичні з періодом T дійсні або комплексні, в точках t_i , $i \in Z$, можуть мати розриви першого роду, S_i , $i \in Z$, — сталі квадратні матриці порядку n , η_i , $i \in Z$, — сталі вектори розмірності n , d — кількість точок імпульсних дій на періоді T .

Задачу без імпульсної дії розглянуто в [1, 2]. У [1, с. 74–78] матриці $A(t)$ і $B(t)$ квадратні, $B(t)$ — вироджена, у [2] — прямокутні. У [3–5] вивчали задачу з імпульсною дією. У [3, с. 82–88, 142–148; 4, с. 240–244] матриця $B(t)$ одинична, у [5] $B(t)$ квадратна вироджена. Загальний розв’язок системи (1), (2) на скінченному відрізку побудовано в [6–8].

2. Основні визначення. Позначимо через I_i нільпотентний блок Жордана порядку i , 0_i — нульовий вектор розмірності i , 0_{ij} — нульову матрицю розмірності $i \times j$,

$$L(t) = A(t) - B(t) \frac{d}{dt}, \quad L^*(t) = A^*(t) + \frac{d}{dt} B^*(t)$$

— оператори, формально спряжені між собою.

Для зручності кожному з точок t_i , $i \in Z$, будемо розглядати як дві різні точки $t_i - 0$ і $t_i + 0$. Похідні в цих точках розуміємо як праву й ліву відповідно.

Означення 1 [1, с. 54]. Елемент $\varphi^{(1)}(t) \in \ker B(t)$ має в точці $t \in R$ скінченний жордановий ланцюжок векторів матриці $B(t)$ щодо оператора $L(t)$ довжини p , $p \geq 1$, якщо існують вектори $\varphi^{(i)}(t)$, $i = \overline{1, p}$, які задовольняють співвідношення

$$B(t)\varphi^{(1)}(t) = 0,$$

$$B(t)\varphi^{(i)}(t) = L(t)\varphi^{(i-1)}(t), \quad i = \overline{2, p},$$

$$L(t)\varphi^{(p)}(t) \notin \operatorname{Im} B(t).$$

Означення 2. Елемент $\tilde{\varphi}^{(1)}(t) \in \ker B(t)$ має в точці $t \in R$ циклічний жордановий ланцюжок векторів матриці $B(t)$ щодо оператора $L(t)$ довжини $\tilde{p}$, $\tilde{p} \geq 1$, якщо існують вектори $\tilde{\varphi}^{(i)}(t)$, $i = \overline{1, \tilde{p}}$, які задовольняють співвідношення

$$B(t)\tilde{\varphi}^{(1)}(t) = 0,$$

$$B(t)\tilde{\varphi}^{(i)}(t) = L(t)\tilde{\varphi}^{(i-1)}(t), \quad i = \overline{2, \tilde{p}},$$

$$L(t)\tilde{\varphi}^{(\tilde{p})}(t) = 0.$$

Означення 3. Елемент $\hat{\varphi}^{(1)}(t)$ має в точці $t \in R$ допоміжний ланцюжок векторів матриці $B(t)$ щодо оператора $L(t)$ довжини $\hat{p}$, $\hat{p} \geq 1$, якщо існують вектори $\hat{\varphi}^{(i)}(t)$, $i = \overline{1, \hat{p}}$, які задовольняють співвідношення

$$B(t)\hat{\varphi}^{(i)}(t) = L(t)\hat{\varphi}^{(i-1)}(t), \quad i = \overline{2, \hat{p}},$$

$$B(t)\hat{\varphi}^{(1)}(t) \notin \operatorname{Im} L(t),$$

$$L(t)\hat{\varphi}^{(\hat{p})}(t) \notin \operatorname{Im} B(t).$$

Аналогічно визначимо ланцюжки векторів на відрізках $[t_i + 0; t_{i+1} - 0]$, $i \in Z$.

У цій роботі розглянемо випадок, коли можуть існувати скінченні, циклічні й допоміжні ланцюжки, але $\operatorname{rank} B(t) = \operatorname{const}$, $\operatorname{rank} L(t) = \operatorname{const}$ на кожному з відрізків $[t_i + 0; t_{i+1} - 0]$, $i \in Z$, внаслідок чого кількості й довжини вказаних ланцюжків на кожному з цих відрізків сталі.

3. Отриманий результат. Розглянемо окремо кожен із відрізків $[t_k + 0; t_{k+1} - 0]$, $k \in Z$. Нехай k фіксовано, $t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0]$. Аналогічно з [2, 7–10] будемо вважати, що існують такі ланцюжки векторів:

– матриці $B(t)$ щодо оператора $L(t)$:

$\check{r}_k$ циклічних одиничної довжини $\check{\varphi}_{ki}(t)$, $i = \overline{1, \check{r}_k}$,

$\tilde{r}_k$ циклічних довжин $(\tilde{s}_{ki} + 1)$: $\tilde{\varphi}_{ki}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \tilde{s}_{ki} + 1}$, $i = \overline{1, \tilde{r}_k}$,

r_k скінченних довжин s_{ki} : $\varphi_{ki}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_{ki}}$, $i = \overline{1, r_k}$,

- $\hat{r}_k$ допоміжних довжин $\hat{s}_{ki} : \hat{\varphi}_{ki}^{(j)}(t), j = \overline{1, \hat{s}_{ki}}, i = \overline{1, \hat{r}_k}$;
 – матриці $B^*(t)$ щодо оператора $L^*(t)$:
 $\check{r}_k$ циклічних одиничної довжини $\psi_{ki}(t), i = \overline{1, \check{r}_k}$,
 $\hat{r}_k$ циклічних довжин $(\hat{s}_{ki} + 1) : \tilde{\psi}_{ki}^{(j)}(t), j = \overline{1, \hat{s}_{ki} + 1}, i = \overline{1, \hat{r}_k}$,
 r_k скінченних довжин $s_{ki} : \psi_{ki}^{(j)}(t), j = \overline{1, s_{ki}}, i = \overline{1, r_k}$,
 $\tilde{r}_k$ допоміжних довжин $\tilde{s}_{ki} : \hat{\psi}_{ki}^{(j)}(t), j = \overline{1, \tilde{s}_{ki}}, i = \overline{1, \tilde{r}_k}$.

Також існують:

- $\check{r}_k$ векторів $\check{\varphi}_{ki}(t) \notin \text{Im } B(t) \cup \text{Im } L(t), i = \overline{1, \check{r}_k}$,
 $\check{r}_k$ векторів $\check{\psi}_{ki}(t) \notin \text{Im } B^*(t) \cup \text{Im } L^*(t), i = \overline{1, \check{r}_k}$,
 α_k векторів $q_{ki}(t), i = \overline{1, \alpha_k}$,
 α_k векторів $p_{ki}(t), i = \overline{1, \alpha_k}$.

Тут

$$\check{r}_k \geq 0, \quad \tilde{r}_k \geq 0, \quad r_k \geq 0, \quad \check{r}_k \geq 0, \quad \hat{r}_k \geq 0,$$

$$0 < \tilde{s}_{k1} \leq \dots \leq \tilde{s}_{k\tilde{r}_k}, \quad s_{k1} \geq \dots \geq s_{kr_k} > 0, \quad 0 < \hat{s}_{k1} \leq \dots \leq \hat{s}_{k\hat{r}_k},$$

$$\alpha_k = n - \check{r}_k - \tilde{r}_k - \tilde{s}_k - s_k - \hat{s}_k = m - \check{r}_k - \hat{r}_k - \hat{s}_k - s_k - \tilde{s}_k,$$

$$s_k = \sum_{i=1}^{r_k} s_{ki}, \quad \tilde{s}_k = \sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} \tilde{s}_{ki}, \quad \hat{s}_k = \sum_{i=1}^{\hat{r}_k} \hat{s}_{ki}.$$

Елементи кожної з наведених множин належать $C^\infty[t_k + 0; t_{k+1} - 0]$ і лінійно незалежні:

- 1) $q_{ki}(t), i = \overline{1, \alpha_k}, \check{\varphi}_{ki}(t), i = \overline{1, \check{r}_k}, \hat{\varphi}_{ki}^{(j)}(t), j = \overline{1, \hat{s}_{ki} + 1}, i = \overline{1, \hat{r}_k}, \varphi_{ki}^{(j)}(t), j = \overline{1, s_{ki}}, i = \overline{1, r_k}, \hat{\varphi}_{ki}^{(j)}(t), j = \overline{1, \hat{s}_{ki}}, i = \overline{1, \hat{r}_k}$;
- 2) $B(t)q_{ki}(t), i = \overline{1, \alpha_k}, \check{\varphi}_{ki}(t), i = \overline{1, \check{r}_k}, L(t)\hat{\varphi}_{ki}^{(j)}(t), j = \overline{1, \hat{s}_{ki}}, i = \overline{1, \hat{r}_k}, L(t)\varphi_{ki}^{(j)}(t), j = \overline{1, s_{ki}}, i = \overline{1, r_k}, B(t)\hat{\varphi}_{ki}^{(1)}(t), i = \overline{1, \hat{r}_k}, L(t)\hat{\varphi}_{ki}^{(j)}(t), j = \overline{1, \hat{s}_{ki}}, i = \overline{1, \hat{r}_k}$;
- 3) $p_{ki}(t), i = \overline{1, \alpha_k}, \psi_{ki}(t), i = \overline{1, \check{r}_k}, \tilde{\psi}_{ki}^{(j)}(t), j = \overline{1, \hat{s}_{ki} + 1}, i = \overline{1, \hat{r}_k}, \psi_{ki}^{(j)}(t), j = \overline{1, s_{ki}}, i = \overline{1, r_k}, \hat{\psi}_{ki}^{(j)}(t), j = \overline{1, \hat{s}_{ki}}, i = \overline{1, \hat{r}_k}$;
- 4) $B^*(t)p_{ki}(t), i = \overline{1, \alpha_k}, \check{\psi}_{ki}(t), i = \overline{1, \check{r}_k}, L^*(t)\tilde{\psi}_{ki}^{(j)}(t), j = \overline{1, \hat{s}_{ki}}, i = \overline{1, \hat{r}_k}, L^*(t)\psi_{ki}^{(j)}(t), j = \overline{1, s_{ki}}, i = \overline{1, r_k}, B^*(t)\hat{\psi}_{ki}^{(1)}(t), i = \overline{1, \hat{r}_k}, L^*(t)\hat{\psi}_{ki}^{(j)}(t), j = \overline{1, \hat{s}_{ki}}, i = \overline{1, \hat{r}_k}$;

пари множин 1), 4) і 2), 3) відповідно являють собою біртогональні системи

$$(B(t)q_{ki}(t), p_{ki}(t)) = (q_{ki}(t), B^*(t)p_{ki}(t)) = 1, \quad i = \overline{1, \alpha_k},$$

$$(\check{\varphi}_{ki}(t), \check{\psi}_{ki}(t)) = 1, \quad i = \overline{1, \check{r}_k},$$

$$(\hat{\varphi}_{ki}(t), \hat{\psi}_{ki}(t)) = 1, \quad i = \overline{1, \hat{r}_k},$$

$$(\hat{\varphi}_{ki}^{(j)}(t), L^*(t)\hat{\psi}_{ki}^{(\hat{s}_{ki}+1-j)}(t)) = (L(t)\hat{\varphi}_{ki}^{(j)}(t), \hat{\psi}_{ki}^{(\hat{s}_{ki}+1-j)}(t)) = 1, \quad j = \overline{1, \hat{s}_{ki}}, \quad i = \overline{1, \hat{r}_k},$$

$$(\hat{\varphi}_{ki}^{(\hat{s}_{ki}+1)}(t), B^*(t)\hat{\psi}_{ki}^{(1)}(t)) = 1, \quad i = \overline{1, \hat{r}_k},$$

$$(\hat{\varphi}_{ki}^{(j)}(t), L^*(t)\tilde{\psi}_{ki}^{(\hat{s}_{ki}+1-j)}(t)) = (L(t)\hat{\varphi}_{ki}^{(j)}(t), \tilde{\psi}_{ki}^{(\hat{s}_{ki}+1-j)}(t)) = 1, \quad j = \overline{1, \hat{s}_{ki}}, \quad i = \overline{1, \hat{r}_k},$$

$$\begin{aligned} \left(B(t) \hat{\varphi}_{ki}^{(1)}(t), \tilde{\psi}_{ki}^{(\hat{s}_{ki}+1)}(t) \right) &= 1, \quad i = \overline{1, \hat{r}_k}, \\ \left(\varphi_{ki}^{(j)}(t), L^*(t) \psi_{ki}^{(\hat{s}_{ki}+1-j)}(t) \right) &= \left(L(t) \varphi_{ki}^{(j)}(t), \psi_{ki}^{(\hat{s}_{ki}+1-j)}(t) \right) = 1, \quad j = \overline{1, \hat{s}_{ki}}, \quad i = \overline{1, \hat{r}_k}, \end{aligned}$$

усі інші скалярні добутки векторів із відповідних пар множин рівні 0.

З використанням елементів множин 1), 3) складемо прямокутні матриці і вектори, що належать $C^\infty[t_k + 0; t_{k+1} - 0]$:

$$\begin{aligned} Q_k(t) &= [q_{k1}(t), \dots, q_{k\alpha_k}(t)], \\ \Phi_{ki}(t) &= [\varphi_{ki}^{(1)}(t), \dots, \varphi_{ki}^{(\hat{s}_{ki})}(t)], \quad i = \overline{1, r_k}, \\ \tilde{\Phi}_{kij}(t) &= [\tilde{\varphi}_{ki}^{(j)}(t), \dots, \tilde{\varphi}_{ki}^{(1)}(t)], \quad j = \tilde{s}_{ki}, \tilde{s}_{ki} + 1, \quad i = \overline{1, \tilde{r}_k}, \\ \hat{\Phi}_{ki}(t) &= [\hat{\varphi}_{ki}^{(1)}(t), \dots, \hat{\varphi}_{ki}^{(\hat{s}_{ki})}(t)], \quad i = \overline{1, \hat{r}_k}, \\ P_k(t) &= [p_{k1}(t), \dots, p_{k\alpha_k}(t)], \\ \Psi_{ki}(t) &= [\psi_{ki}^{(\hat{s}_{ki})}(t), \dots, \psi_{ki}^{(1)}(t)], \quad i = \overline{1, r_k}, \\ \tilde{\Psi}_{kij}(t) &= [\tilde{\psi}_{ki}^{(j)}(t), \dots, \tilde{\psi}_{ki}^{(1)}(t)], \quad j = \hat{s}_{ki}, \hat{s}_{ki} + 1, \quad i = \overline{1, \hat{r}_k}, \\ \hat{\Psi}_{ki}(t) &= [\hat{\psi}_{ki}^{(1)}(t), \dots, \hat{\psi}_{ki}^{(\hat{s}_{ki})}(t)], \quad i = \overline{1, \tilde{r}_k}, \end{aligned}$$

$X_k(t)$ — фундаментальна матриця однорідної системи

$$\begin{aligned} \frac{dx_k}{dt} &= P_k^*(t)(L(t)Q_k(t))x_k, \\ \tilde{X}_k(t) &= Q_k(t)X_k(t), \\ \tilde{x}_k(t) &= \tilde{X}_k(t) \int_{t_k+0}^t X_k^{-1}(\tau) P_k^*(\tau) f(\tau) d\tau - \sum_{i=1}^{r_k} \Phi_{ki}(t) \sum_{j=0}^{\hat{s}_{ki}-1} I_{\hat{s}_{ki}}^j \frac{d^j}{dt^j} (\Psi_{ki}^*(t) f(t)) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} \tilde{\Phi}_{kij}(t) \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{ki}-1} (I_{\tilde{s}_{ki}}^T)^j \frac{d^j}{dt^j} (\hat{\Psi}_{ki}^*(t) f(t)) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{\hat{r}_k} \hat{\Phi}_{ki}(t) \sum_{j=0}^{\hat{s}_{ki}-1} I_{\hat{s}_{ki}}^j \frac{d^j}{dt^j} (\tilde{\Psi}_{kij}^*(t) f(t)), \\ \hat{X}_k &= \left[\tilde{X}_k(t_{k+1} - 0), \tilde{\Phi}_{k1, \tilde{s}_{k1}+1}(t_{k+1} - 0), \dots, \right. \\ &\quad \left. \tilde{\Phi}_{k\tilde{r}_k, \tilde{s}_{k\tilde{r}_k}+1}(t_{k+1} - 0), \check{\varphi}_{k1}(t_{k+1} - 0), \dots, \check{\varphi}_{k\check{r}_k}(t_{k+1} - 0) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_k &= \text{col} \left[\sum_{i=0}^{s_{k1}-1} I_{s_{k1}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\Psi_{k1}^*(t)A(t)), \dots, \sum_{i=0}^{s_{kr_k}-1} I_{s_{kr_k}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\Psi_{kr_k}^*(t)A(t)), \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=0}^{\hat{s}_{k1}-1} I_{\hat{s}_{k1}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\tilde{\Psi}_{k1\hat{s}_{k1}}^*(t)A(t)), \dots, \sum_{i=0}^{\hat{s}_{kr_k}-1} I_{\hat{s}_{kr_k}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\tilde{\Psi}_{kr_k\hat{s}_{kr_k}}^*(t)A(t)) \right] \Big|_{t=t_k+0}, \\ \tilde{f}_k &= \text{col} \left[\sum_{i=0}^{s_{k1}-1} I_{s_{k1}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\Psi_{k1}^*(t)f(t)), \dots, \sum_{i=0}^{s_{kr_k}-1} I_{s_{kr_k}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\Psi_{kr_k}^*(t)f(t)), \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=0}^{\hat{s}_{k1}-1} I_{\hat{s}_{k1}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\tilde{\Psi}_{k1\hat{s}_{k1}}^*(t)f(t)), \dots, \sum_{i=0}^{\hat{s}_{kr_k}-1} I_{\hat{s}_{kr_k}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\tilde{\Psi}_{kr_k\hat{s}_{kr_k}}^*(t)f(t)) \right] \Big|_{t=t_k+0}, \end{aligned}$$

$$\tilde{B}_k = X_k^{-1}(t_k + 0)P_k^*(t_k + 0)B(t_k + 0), \quad \hat{A}_k = \tilde{A}_k S_k \hat{X}_{k-1},$$

$$\Xi_k = \hat{A}_k^-, \quad \hat{x}_k = S_k \tilde{x}_{k-1}(t_k - 0) + \eta_k,$$

матриці Θ_k і Υ_k складемо з елементів базисів $\ker \hat{A}_k$ і $\ker \hat{A}_k^*$ відповідно, матриці Ξ_k і Θ_k подамо у вигляді

$$\begin{aligned} \Xi_k &= \text{col} \left(\Xi_{k0}, \tilde{\Xi}_{k1}^{(0)}, \dots, \tilde{\Xi}_{k1}^{(\hat{s}_{k-1,1})}, \dots, \tilde{\Xi}_{k\tilde{r}_{k-1}}^{(0)}, \dots, \tilde{\Xi}_{k\tilde{r}_{k-1}}^{(\hat{s}_{k-1,\tilde{r}_{k-1}})}, \check{\Xi}_{k1}, \dots, \check{\Xi}_{k\check{r}_{k-1}} \right), \\ \Theta_k &= \text{col} \left(\Theta_{k0}, \tilde{\Theta}_{k1}^{(0)}, \dots, \tilde{\Theta}_{k1}^{(\hat{s}_{k-1,1})}, \dots, \tilde{\Theta}_{k\tilde{r}_{k-1}}^{(0)}, \dots, \tilde{\Theta}_{k\tilde{r}_{k-1}}^{(\hat{s}_{k-1,\tilde{r}_{k-1}})}, \check{\Theta}_{k1}, \dots, \check{\Theta}_{k\check{r}_{k-1}} \right), \end{aligned}$$

де Ξ_{k0} і Θ_{k0} — прямокутні матриці розмірності $\alpha_{k-1} \times (s_k + \hat{s}_k)$ і $\alpha_{k-1} \times \dim \ker \hat{A}_k$, всі інші компоненти матриць Ξ_k і Θ_k — матриці-рядки розмірності $(s_k + \hat{s}_k)$ і $\dim \ker \hat{A}_k$ відповідно.

Зауваження 1. З періодичності $A(t)$, $B(t)$, $f(t)$ з періодом T випливають рівності

$$Q_{k+d}(t+T) = Q_k(t), \quad t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k \in Z,$$

$$\hat{X}_{k+d} = \hat{X}_k, \quad k \in Z.$$

Аналогічні рівності виконуються для всіх побудованих вище матриць і векторів.

Далі, $\tilde{\beta}_{ki}(t) \in C^\infty[t_k + 0; t_{k+1} - 0]$, $\tilde{\beta}_{k+d,i}(t+T) = \tilde{\beta}_{ki}(t)$, $i = \overline{1, \tilde{r}_k}$, $\check{\beta}_{ki}(t) \in C^\infty[t_k + 0; t_{k+1} - 0]$, $\check{\beta}_{k+d,i}(t+T) = \check{\beta}_{ki}(t)$, $i = \overline{1, \check{r}_k}$, — довільні скалярні функції, $\tilde{c}_k$, $\check{c}_{k+d} = \tilde{c}_k$ — довільні сталі вектори розмірності $\dim \ker \hat{A}_k$,

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 S_1 \hat{X}_0 \Theta_1 & -\Theta_{20} & 0_{\alpha_1, \dim \ker \hat{A}_3} & \dots & 0_{\alpha_1, \dim \ker \hat{A}_{d-1}} & 0_{\alpha_1, \dim \ker \hat{A}_d} \\ 0_{\alpha_2, \dim \ker \hat{A}_1} & \tilde{B}_2 S_2 \hat{X}_1 \Theta_2 & -\Theta_{30} & \dots & 0_{\alpha_2, \dim \ker \hat{A}_{d-1}} & 0_{\alpha_2, \dim \ker \hat{A}_d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0_{\alpha_{d-1}, \dim \ker \hat{A}_1} & 0_{\alpha_{d-1}, \dim \ker \hat{A}_2} & 0_{\alpha_{d-1}, \dim \ker \hat{A}_3} & \dots & \tilde{B}_{d-1} S_{d-1} \hat{X}_{d-2} \Theta_{d-1} & -\Theta_{d0} \\ -\Theta_{10} & 0_{\alpha_d, \dim \ker \hat{A}_2} & 0_{\alpha_d, \dim \ker \hat{A}_3} & \dots & 0_{\alpha_d, \dim \ker \hat{A}_{d-1}} & B_d S_d \hat{X}_{d-1} \Theta_d \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$\bar{\Xi} = \bar{A}^-,$$

$$\begin{aligned} \bar{f} = \text{col} \Big(& \tilde{B}_1 \left(S_1 \hat{X}_0 \bar{\Xi}_1 (\tilde{A}_1 \hat{x}_1 + \tilde{f}_1) - \hat{x}_1 \right) - \Xi_{20} (\tilde{A}_2 \hat{x}_2 + \tilde{f}_2), \dots, \\ & \tilde{B}_{d-1} \left(S_{d-1} \hat{X}_{d-2} \bar{\Xi}_{d-1} (\tilde{A}_{d-1} \hat{x}_{d-1} + \tilde{f}_{d-1}) - \hat{x}_{d-1} \right) - \Xi_{d0} (\tilde{A}_d \hat{x}_d + \tilde{f}_d), \\ & \tilde{B}_d \left(S_d \hat{X}_{d-1} \bar{\Xi}_d (\tilde{A}_d \hat{x}_d + \tilde{f}_d) - \hat{x}_d \right) - \Xi_{10} (\tilde{A}_1 \hat{x}_1 + \tilde{f}_1) \Big), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\bar{c} = \text{col}(\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_d), \quad (6)$$

Матриці $\bar{\Theta}$ і $\bar{\Upsilon}$ складемо з елементів базисів $\ker \bar{A}$ і $\ker \bar{A}^*$ відповідно. Матриці $\bar{\Xi}$ і $\bar{\Theta}$ запишемо у вигляді

$$\bar{\Xi} = \text{col}(\bar{\Xi}_1, \dots, \bar{\Xi}_d), \quad \bar{\Theta} = \text{col}(\bar{\Theta}_1, \dots, \bar{\Theta}_d), \quad (7)$$

де $\bar{\Xi}_k$ і $\bar{\Theta}_k$, $k = \overline{1, d}$, — прямокутні матриці розмірності $\dim \ker \hat{A}_k \times \sum_{i=1}^d \alpha_i$ і $\dim \ker \hat{A}_k \times \dim \ker \bar{A}$ відповідно, і покладемо

$$\bar{\Xi}_{k+d} = \bar{\Xi}_k, \quad \bar{\Theta}_{k+d} = \bar{\Theta}_k, \quad k \in Z, \quad (8)$$

$\bar{c}$ — довільний сталий вектор розмірності $\dim \ker \bar{A}$.

Теорема 1. Якщо існують множини векторів 1)–4), то система (1)–(3) розв'язна і має періодичні з періодом T розв'язки в тому і тільки тому випадку, коли виконуються рівності

$$\sum_{j=0}^{\hat{s}_{ki}} \frac{d^j}{dt^j} \left(f(t), \tilde{\psi}_{ki}^{(\hat{s}_{ki}-j+1)}(t) \right) = 0, \quad i = \overline{1, \hat{r}_k}, \quad t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k = \overline{1, d}, \quad (9)$$

$$(f(t), \check{\psi}_{ki}(t)) = 0, \quad i = \overline{1, \check{r}_k}, \quad t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k = \overline{1, d}, \quad (10)$$

$$\Upsilon_k^* (\tilde{A}_k \hat{x}_k + \tilde{f}_k) = 0, \quad k = \overline{1, d}, \quad (11)$$

$$\bar{\Upsilon} \bar{f} = 0. \quad (12)$$

При їхньому виконанні ці розв'язки набувають вигляду

$$\begin{aligned} x(t) = & \tilde{X}_k(t) \left[\bar{\Theta}_{k+1,0} (\bar{\Theta}_{k+1} \bar{c} + \bar{\Xi}_{k+1} \bar{f}) - \Xi_{k+1,0} (\tilde{A}_{k+1} \hat{x}_{k+1} + \tilde{f}_{k+1}) \right] \\ & + \tilde{x}_k(t) + \sum_{i=1}^{\check{r}_k} \sum_{j=0}^{\hat{s}_{ki}} \left(\frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{ki}(t) \right) \tilde{\varphi}_{ki}^{(\hat{s}_{ki}-j+1)}(t) \\ & + \sum_{i=1}^{\check{r}_k} \check{\beta}_{ki}(t) \check{\varphi}_{ki}(t), \quad t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k \in Z, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\left. \frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{ki}(t) \right|_{t=t_{k+1}-0} = \tilde{\Theta}_{k+1,i}^{(j)} (\bar{\Theta}_{k+1} \bar{c} + \bar{\Xi}_{k+1} \bar{f}) - \tilde{\Xi}_{k+1,i}^{(j)} (\tilde{A}_{k+1} \hat{x}_{k+1} + \tilde{f}_{k+1}), \quad (14)$$

$$j = \overline{0, \check{s}_{ki}}, \quad i = \overline{1, \check{r}_k}, \quad k \in Z,$$

$$\begin{aligned}\check{\beta}_{ki}(t_{k+1}-0) &= \check{\Theta}_{k+1,i}(\bar{\Theta}_{k+1}\bar{c} + \bar{\Xi}_{k+1}\bar{f}) \\ &\quad - \check{\Xi}_{k+1,i}(\tilde{A}_{k+1}\hat{x}_{k+1} + \tilde{f}_{k+1}), \quad i = \overline{1, \check{r}_k}, \quad k \in Z,\end{aligned}\quad (15)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_{ki}(t_k+0) &= \left(S_k \hat{X}_{k-1} \left[\Theta_k(\bar{\Theta}_k \bar{c} + \bar{\Xi}_k \bar{f}) - \Xi_k(\tilde{A}_k \hat{x}_k + \tilde{f}_k) \right] \right. \\ &\quad \left. + \hat{x}_k, B^*(t_k+0) \hat{\psi}_{ki}^{(1)}(t_k+0) \right), \quad i = \overline{1, \tilde{r}_k}, \quad k \in Z,\end{aligned}\quad (16)$$

$$\begin{aligned}\left. \frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{ki}(t) \right|_{t=t_k+0} &= \left[\left(S_k \hat{X}_{k-1} \left[\Theta_k(\bar{\Theta}_k \bar{c} + \bar{\Xi}_k \bar{f}) - \Xi_k(\tilde{A}_k \hat{x}_k + \tilde{f}_k) \right] + \hat{x}_k, L^*(t) \hat{\psi}_{ki}^{(j)}(t) \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{u=0}^{j-1} \frac{d^u}{dt^u} \left(f(t), \hat{\psi}_{ki}^{(j-u)}(t) \right) \right] \Big|_{t=t_k+0}, \quad j = \overline{1, \tilde{s}_{ki}}, \quad i = \overline{1, \tilde{r}_k}, \quad k \in Z,\end{aligned}\quad (17)$$

$$\begin{aligned}\check{\beta}_{ki}(t_k+0) &= \left(S_k \hat{X}_{k-1} \left[\Theta_k(\bar{\Theta}_k \bar{c} + \bar{\Xi}_k \bar{f}) - \Xi_k(\tilde{A}_k \hat{x}_k + \tilde{f}_k) \right] + \hat{x}_k, \check{\psi}_{ki}(t_k+0) \right), \\ i &= \overline{1, \check{r}_k}, \quad k \in Z.\end{aligned}\quad (18)$$

Доведення. Згідно з [7] для розв'язності системи (1), (2) на парі відрізків $[t_k+0; t_{k+1}-0]$ і $[t_{k+1}+0; t_{k+2}-0]$ необхідно й достатньо виконання рівностей (9) – (11) для відповідних значень k . При їхньому виконанні ця система на згаданий парі відрізків має загальний розв'язок

$$\begin{aligned}x(t) &= \tilde{X}_k(t) \left[\Theta_{k+1,0} \tilde{c}_{k+1} - \Xi_{k+1,0} (\tilde{A}_{k+1} \hat{x}_{k+1} + \tilde{f}_{k+1}) \right] + \tilde{x}_k(t) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{ki}} \left(\frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{ki}(t) \right) \tilde{\varphi}_{ki}^{(\tilde{s}_{ki}-j+1)}(t) + \sum_{i=1}^{\check{r}_k} \check{\beta}_{ki}(t) \check{\varphi}_{ki}(t), \quad t \in [t_k+0; t_{k+1}-0],\end{aligned}\quad (19)$$

$$\begin{aligned}x(t) &= \tilde{X}_{k+1}(t) \tilde{B}_{k+1} \left\{ S_{k+1} \hat{X}_k \left[\Theta_{k+1} \tilde{c}_{k+1} - \Xi_{k+1} (\tilde{A}_{k+1} \hat{x}_{k+1} + \tilde{f}_{k+1}) \right] + \hat{x}_{k+1} \right\} \\ &\quad + \tilde{x}_{k+1}(t) + \sum_{i=1}^{\tilde{r}_{k+1}} \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{k+1,i}} \left(\frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{k+1,i}(t) \right) \tilde{\varphi}_{k+1,i}^{(\tilde{s}_{k+1,i}-j+1)}(t) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\check{r}_{k+1}} \check{\beta}_{k+1,i}(t) \check{\varphi}_{k+1,i}(t), \quad t \in [t_{k+1}+0; t_{k+2}-0],\end{aligned}\quad (20)$$

$$\left. \frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{ki}(t) \right|_{t=t_{k+1}-0} = \tilde{\Theta}_{k+1,i}^{(j)} \tilde{c}_{k+1} - \tilde{\Xi}_{k+1,i}^{(j)} (\tilde{A}_{k+1} \hat{x}_{k+1} + \tilde{f}_{k+1}), \quad j = \overline{0, \tilde{s}_{ki}}, \quad i = \overline{1, \tilde{r}_k}, \quad (21)$$

$$\check{\beta}_{ki}(t_{k+1}-0) = \check{\Theta}_{k+1,i} \tilde{c}_{k+1} - \check{\Xi}_{k+1,i} (\tilde{A}_{k+1} \hat{x}_{k+1} + \tilde{f}_{k+1}), \quad i = \overline{1, \check{r}_k}, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_{k+1,i}(t_{k+1}+0) = & \left(S_{k+1} \hat{X}_k \left[\Theta_{k+1} \tilde{c}_{k+1} - \Xi_{k+1} (\tilde{A}_{k+1} \hat{x}_{k+1} + \tilde{f}_{k+1}) \right] + \hat{x}_{k+1}, \right. \\ & \left. B^*(t_{k+1}+0) \hat{\psi}_{k+1,i}^{(1)}(t_{k+1}+0) \right), \quad i = \overline{1, \tilde{r}_k}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{k+1,i}(t) \right|_{t=t_{k+1}+0} = & \left[\left(S_{k+1} \hat{X}_k \left[\Theta_{k+1} \tilde{c}_{k+1} - \Xi_{k+1} (\tilde{A}_{k+1} \hat{x}_{k+1} + \tilde{f}_{k+1}) \right] + \hat{x}_{k+1}, \right. \right. \\ & \left. \left. L^*(t) \hat{\psi}_{k+1,i}^{(j)}(t) + \sum_{u=0}^{j-1} \frac{d^u}{dt^u} \left(f(t), \hat{\psi}_{k+1,i}^{(j-u)}(t) \right) \right) \right] \Big|_{t=t_{k+1}+0}, \quad j = \overline{1, \tilde{s}_{k+1,i}}, \quad i = \overline{1, \tilde{r}_{k+1}}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \check{\beta}_{k+1,i}(t_{k+1}+0) = & \left(S_{k+1} \hat{X}_k \left[\Theta_{k+1} \tilde{c}_{k+1} - \Xi_{k+1} (\tilde{A}_{k+1} \hat{x}_{k+1} + \tilde{f}_{k+1}) \right] \right. \\ & \left. + \hat{x}_{k+1}, \check{\psi}_{k+1,i}(t_{k+1}+0) \right), \quad i = \overline{1, \check{r}_{k+1}}. \end{aligned} \quad (25)$$

Прирівнюючи (19) при k і (20) при $(k-1)$, з урахуванням лінійної незалежності векторів множини 1) отримуємо

$$\Theta_{k+1,0} \tilde{c}_{k+1} - \Xi_{k+1,0} (\tilde{A}_{k+1} \hat{x}_{k+1} + \tilde{f}_{k+1}) = \tilde{B}_k \left\{ S_k \hat{X}_{k-1} \left[\Theta_k \tilde{c}_k - \Xi_k (\tilde{A}_k \hat{x}_k + \tilde{f}_k) \right] + \hat{x}_k \right\}. \quad (26)$$

Із зауваження 1 маємо, що рівності (9)–(11), (26) співпадають для тих k , які мають рівні залишки від ділення на d . Звідси випливає, що для розв'язності системи (1)–(3) необхідно й достатньо виконання цих рівностей при $k = \overline{1, \tilde{d}}$, а для існування її періодичних розв'язків — ще й рівності $x(t_0+0) = x(t_d+0)$. Підставляючи сюди (19) при $t = t_0+0$ і (20) при $t = t_d+0$, з урахуванням лінійної незалежності векторів множини 1) і зауваження 1 одержуємо

$$\Theta_{10} \tilde{c}_1 - \Xi_{10} (\tilde{A}_1 \hat{x}_1 + \tilde{f}_1) = \tilde{B}_d \left\{ S_d \hat{X}_{d-1} \left[\Theta_d \tilde{c}_d - \Xi_d (\tilde{A}_d \hat{x}_d + \tilde{f}_d) \right] + \hat{x}_d \right\}. \quad (27)$$

Об'єднуючи (26) і (27), з урахуванням (4)–(6) маємо

$$\bar{A} \tilde{c} = \bar{f}.$$

Звідси при виконанні умови умови (12)

$$\tilde{c} = \bar{\Theta} \bar{c} + \bar{\Xi} \bar{f}. \quad (28)$$

Визначаючи звідси з урахуванням (4)–(8) $\tilde{c}_k$, $k \in Z$, і підставляючи до (19)–(25), отримуємо (13)–(18).

Теорему доведено.

Зауваження 2. Рівність (13) еквівалентна рівності

$$\begin{aligned} x(t) = & \tilde{X}_k(t) \tilde{B}_k \left\{ S_k \hat{X}_{k-1} \left[\Theta_k (\bar{\Theta}_k \bar{c} + \bar{\Xi}_k \bar{f}) - \Xi_k (\tilde{A}_k \hat{x}_k + \tilde{f}_k) \right] + \hat{x}_k \right\} \\ & + \tilde{x}_k(t) + \sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{ki}} \left(\frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{ki}(t) \right) \tilde{\varphi}_{ki}^{(\tilde{s}_{ki}-j+1)}(t) \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=1}^{\check{r}_k} \check{\beta}_{ki}(t) \check{\varphi}_{ki}(t), \quad t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k \in Z.$$

Наслідок 1. Відповідна до (1), (2) однорідна система

$$B(t) \frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad t \in R \setminus \{t_i, i \in Z\},$$

$$x(t_i + 0) = S_i x(t_i - 0), \quad i \in Z,$$

$$t_{i+d} = t_i + T, \quad S_{i+d} = S_i, \quad i \in Z,$$

розв'язна і має періодичні розв'язки

$$\begin{aligned} x(t) = & \tilde{X}_k(t) \Theta_{k+1,0} \bar{\Theta}_{k+1} \bar{c} + \sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{ki}} \left(\frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{ki}(t) \right) \tilde{\varphi}_{ki}^{(\tilde{s}_{ki}-j+1)}(t) \\ & + \sum_{i=1}^{\check{r}_k} \check{\beta}_{ki}(t) \check{\varphi}_{ki}(t), \quad t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k \in Z, \end{aligned}$$

або

$$x(t) = \tilde{X}_k(t) \tilde{B}_k S_k \hat{X}_{k-1} \Theta_k \bar{\Theta}_k \bar{c} + \sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{ki}} \left(\frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{ki}(t) \right) \tilde{\varphi}_{ki}^{(\tilde{s}_{ki}-j+1)}(t) + \sum_{i=1}^{\check{r}_k} \check{\beta}_{ki}(t) \check{\varphi}_{ki}(t),$$

$$t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k \in Z,$$

$$\left. \frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{ki}(t) \right|_{t=t_{k+1}-0} = \tilde{\Theta}_{k+1,i}^{(j)} \bar{\Theta}_{k+1} \bar{c}, \quad j = \overline{0, \tilde{s}_{ki}}, \quad i = \overline{1, \tilde{r}_k}, \quad k \in Z,$$

$$\check{\beta}_{ki}(t_{k+1} - 0) = \check{\Theta}_{k+1,i} \bar{\Theta}_{k+1} \bar{c}, \quad i = \overline{1, \check{r}_k}, \quad k \in Z,$$

$$\tilde{\beta}_{ki}(t_k + 0) = \left(S_k \hat{X}_{k-1} \Theta_k \bar{\Theta}_k \bar{c}, B^*(t_k + 0) \hat{\psi}_{ki}^{(1)}(t_k + 0) \right), \quad i = \overline{1, \tilde{r}_k}, \quad k \in Z,$$

$$\left. \frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{ki}(t) \right|_{t=t_k+0} = \left(S_k \hat{X}_{k-1} \Theta_k \bar{\Theta}_k \bar{c}, L^*(t) \hat{\psi}_{ki}^{(j)}(t) \right) \Big|_{t=t_k+0}, \quad j = \overline{1, \tilde{s}_{ki}}, \quad i = \overline{1, \tilde{r}_k}, \quad k \in Z,$$

$$\check{\beta}_{ki}(t_k + 0) = \left(S_k \hat{X}_{k-1} \Theta_k \bar{\Theta}_k \bar{c}, \check{\psi}_{ki}(t_k + 0) \right), \quad i = \overline{1, \check{r}_k}, \quad k \in Z.$$

Зауваження 3. Якщо при деякому k :

$r_k = \hat{r}_k = 0$, то умова (11) відсутня, потрібно покласти в (4)

$$\Theta_k = E_{\alpha_{k-1} + \tilde{s}_{k-1} + \tilde{r}_{k-1} + \check{r}_{k-1}}, \quad \Theta_{k0} = [E_{\alpha_{k-1}}, 0_{\alpha_{k-1}, \tilde{s}_{k-1} + \tilde{r}_{k-1} + \check{r}_{k-1}}],$$

у (5)

$$\Xi_k(\tilde{A}_k \hat{x}_k + \tilde{f}_k) = 0_{\alpha_{k-1} + \tilde{s}_{k-1} + \tilde{r}_{k-1} + \check{r}_{k-1}}, \quad \Xi_{k0}(\tilde{A}_k \hat{x}_k + \tilde{f}_k) = 0_{\alpha_{k-1}},$$

у (6)

$$\tilde{c}_k = \text{col} \left(c_{k-1}, \tilde{\beta}_{k-1,1}(t), \dots, \frac{d^{\tilde{s}_{k-1,1}}}{dt^{\tilde{s}_{k-1,1}}} \tilde{\beta}_{k-1,1}(t), \dots, \tilde{\beta}_{k-1, \tilde{r}_{k-1}}(t), \dots, \right.$$

$$\left. \frac{d^{\tilde{s}_{k-1}, \tilde{r}_{k-1}}}{dt^{\tilde{s}_{k-1}, \tilde{r}_{k-1}}} \tilde{\beta}_{k-1, \tilde{r}_{k-1}}(t), \tilde{\beta}_{k-1, 1}(t), \dots, \tilde{\beta}_{k-1, \tilde{r}_{k-1}}(t) \right|_{t=t_k-0},$$

де c_{k-1} — довільний сталий вектор розмірності α_{k-1} ; після визначення вектора $\tilde{c}_k$ із (28) у (13) вираз у квадратних дужках слід замінити вектором c_{k-1} , у (16)–(18) — вектором $\tilde{c}_k$;

$\alpha_k = \tilde{r}_k = \check{r}_k = 0$, то в (11) маємо покласти $\Upsilon_{k+1} = E_{s_{k+1} + \tilde{s}_{k+1}}$;

$\alpha_k = 0$, то рівність (26) відсутня, в (4)–(7) відсутні відповідні блокові рядки, ті вектори $\tilde{c}_i$, що не увійшли до (6), замість (28) вибираємо довільно.

4. Приклад. Нехай в (1)–(3) $m = n = 2$, $d = 2$,

$$B(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix},$$

$$S_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \eta_k = \begin{bmatrix} \eta_{k1} \\ \eta_{k2} \end{bmatrix}, \quad k \in Z,$$

$a_{ij}(t) \in C^\infty(R \setminus \{t_k, k \in Z\}, T)$, $i, j = 1, 2$, $f_i(t) \in C^\infty(R \setminus \{t_k, k \in Z\}, T)$, $i = 1, 2$, — дійсні скалярні функції, η_{ki} , $i = 1, 2$, $k \in Z$, — дійсні числа, жорданова структура одна й та ж на відрізках $[t_k + 0; t_{k+1} - 0]$, $\eta_{k+2} = \eta_k$, $k \in Z$.

Розглянемо такі випадки [2, 7–10]:

1. $a_{22}(t) \neq 0 \quad \forall t \in R$. Маємо $r_k = 1$, $s_{k1} = 1$, $\check{r}_k = \tilde{r}_k = \hat{r}_k = 0$, $\alpha_k = 1$,

$$\varphi_{k1}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \psi_{k1}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix}, \quad q_{k1}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix}, \quad p_{k1}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{12}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix},$$

$$X_k(t) = \exp \left(\int_{t_k+0}^t \lambda(z) dz \right), \quad \tilde{X}_k(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix} \exp \left(\int_{t_k+0}^t \lambda(z) dz \right),$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}_k(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix} \int_{t_k+0}^t \exp \left(\int_{\tau}^t \lambda(z) dz \right) \\ &\quad \times (f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)) d\tau - \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22}^{-1}(t)f_2(t) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

де $\lambda(t) = a_{11}(t) - a_{12}(t)a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t)$ — скалярна функція,

$$\hat{X}_k = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t_{k+1}-0)a_{22}^{-1}(t_{k+1}-0) \end{bmatrix} \exp \left(\int_{t_k+0}^{t_{k+1}-0} \lambda(z) dz \right),$$

$$\tilde{A}_k = [a_{21}(t_k+0)a_{22}^{-1}(t_k+0) \quad 1], \quad \tilde{f}_k = a_{22}^{-1}(t_k+0)f_2(t_k+0), \quad \tilde{B}_k = [1 \quad 0],$$

$$\hat{A}_k = \exp \left(\int_{t_{k-1}+0}^{t_k-0} \lambda(z) dz \right), \quad \Xi_k = \exp \left(- \int_{t_{k-1}+0}^{t_k-0} \lambda(z) dz \right), \quad \Theta_k = \Upsilon_k = 0,$$

$$\hat{x}_k = \begin{bmatrix} \eta_{k1} \\ \int_{t_{k-1}+0}^{t_k-0} \exp\left(\int_{\tau}^{t_k-0} \lambda(z)dz\right) (f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau))d\tau + \eta_{k2} \end{bmatrix},$$

$$\bar{A} = \bar{\Xi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\Theta} = \bar{\Upsilon} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \bar{f} = & \text{col} \left(-\eta_{11} - \exp\left(-\int_{t_1+0}^{t_2-0} \lambda(z)dz\right) \right. \\ & \times (a_{21}(t_2+0)a_{22}^{-1}(t_2+0)\eta_{21} + \eta_{22} + a_{22}^{-1}(t_2+0)f(t_2+0)) \\ & - \int_{t_1+0}^{t_2-0} \exp\left(-\int_{t_1+0}^{\tau} \lambda(z)dz\right) (f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau))d\tau, \\ & - \eta_{21} - \exp\left(-\int_{t_0+0}^{t_1-0} \lambda(z)dz\right) (a_{21}(t_1+0)a_{22}^{-1}(t_1+0)\eta_{11} + \eta_{12} + a_{22}^{-1}(t_1+0)f(t_1+0)) \\ & \left. - \int_{t_0+0}^{t_1-0} \exp\left(-\int_{t_0+0}^{\tau} \lambda(z)dz\right) (f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau))d\tau \right), \end{aligned}$$

умови (9), (10) відсутні, (11) виконується, з (12) випливає

$$\begin{aligned} \eta_{11} + \exp\left(-\int_{t_1+0}^{t_2-0} \lambda(z)dz\right) (a_{21}(t_2+0)a_{22}^{-1}(t_2+0)\eta_{21} + \eta_{22} + a_{22}^{-1}(t_2+0)f(t_2+0)) \\ + \int_{t_1+0}^{t_2-0} \exp\left(-\int_{t_1+0}^{\tau} \lambda(z)dz\right) (f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau))d\tau = 0, \\ \eta_{21} + \exp\left(-\int_{t_0+0}^{t_1-0} \lambda(z)dz\right) (a_{21}(t_1+0)a_{22}^{-1}(t_1+0)\eta_{11} + \eta_{12} + a_{22}^{-1}(t_1+0)f(t_1+0)) \\ + \int_{t_0+0}^{t_1-0} \exp\left(-\int_{t_0+0}^{\tau} \lambda(z)dz\right) (f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau))d\tau = 0. \end{aligned}$$

При її виконанні система (1)–(3) має єдиний періодичний розв'язок (13):

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix} \exp\left(\int_{t_k+0}^t \lambda(z)dz\right) \eta_{k1} + \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \times \int_{t_k+0}^t \exp\left(\int_{\tau}^t \lambda(z) dz\right) (f_1(\tau) - a_{12}(\tau) a_{22}^{-1}(\tau) f_2(\tau)) d\tau \\ & - \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22}^{-1}(t) f_2(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k \in Z. \end{aligned}$$

2. $a_{22}(t) \equiv 0$, $a_{12}(t) \neq 0$, $a_{21}(t) \neq 0 \quad \forall t \in R$. Маємо $r_k = 1$, $s_{k1} = 2$, $\check{r}_k = \check{r}_k = \tilde{r}_k = \hat{r}_k = 0$, $\alpha_k = 0$,

$$\begin{aligned} \varphi_{k1}^{(1)}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \varphi_{k1}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} a_{12}(t) \\ a_{12}^{-1}(t) \frac{d}{dt} a_{12}(t) - a_{11}(t) \end{bmatrix}, \\ \psi_{k1}^{(1)}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ a_{12}^{-1}(t) a_{21}^{-1}(t) \end{bmatrix}, \quad \psi_{k1}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} a_{12}^{-1}(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{x}_k(t) &= \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(t) f_2(t) \\ a_{12}^{-1}(t) \left(a_{11}(t) a_{21}^{-1}(t) f_2(t) - f_1(t) - \frac{d}{dt} (a_{21}^{-1}(t) f_2(t)) \right) \end{bmatrix}, \\ \tilde{A}_k &= \begin{bmatrix} a_{11}(t_k + 0) a_{12}^{-1}(t_k + 0) + \frac{d}{dt} a_{12}^{-1}(t) \Big|_{t=t_k+0} & 1 \\ a_{12}^{-1}(t_k + 0) & 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{f}_k &= \begin{bmatrix} a_{12}^{-1}(t_k + 0) f_1(t_k + 0) + \frac{d}{dt} (a_{12}^{-1}(t) a_{21}^{-1}(t) f_2(t)) \Big|_{t=t_k+0} \\ a_{12}^{-1}(t_k + 0) a_{21}^{-1}(t_k + 0) f_2(t_k + 0) \end{bmatrix}, \quad \Upsilon_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \hat{x}_k &= \begin{bmatrix} \eta_{k1} \\ -a_{21}^{-1}(t_k - 0) f_2(t_k - 0) + \eta_{k2} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

умови (9), (10), (12) відсутні, (11) з урахуванням зауваження 3 має вигляд

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \left(a_{11}(t_k + 0) a_{12}^{-1}(t_k + 0) + \frac{d}{dt} a_{12}^{-1}(t) \Big|_{t=t_k+0} \right) \eta_{k1} - a_{21}^{-1}(t_k - 0) f_2(t_k - 0) + \eta_{k2} \\ a_{12}^{-1}(t_k + 0) \eta_{k1} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} a_{12}^{-1}(t_k + 0) f_1(t_k + 0) + \frac{d}{dt} (a_{12}^{-1}(t) a_{21}^{-1}(t) f_2(t)) \Big|_{t=t_k+0} \\ a_{12}^{-1}(t_k + 0) a_{21}^{-1}(t_k + 0) f_2(t_k + 0) \end{bmatrix} = 0, \quad k = 1, 2. \end{aligned}$$

Якщо ці рівності виконуються, то система (1) – (3) має єдиний періодичний розв'язок (13):

$$x(t) = \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(t) f_2(t) \\ a_{12}^{-1}(t) \left(a_{11}(t) a_{21}^{-1}(t) f_2(t) - f_1(t) - \frac{d}{dt} (a_{21}^{-1}(t) f_2(t)) \right) \end{bmatrix},$$

$$t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k \in Z.$$

3. $a_{22}(t) \equiv 0$, $a_{12}(t) \neq 0$, $a_{21}(t) \equiv 0 \quad \forall t \in R$. Маємо $\tilde{r}_k = 1$, $\tilde{s}_{k1} = 1$, $\check{r}_k = 1$, $\check{r}_k = r_k = \hat{r}_k = 0$, $\alpha_k = 0$,

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{k1}^{(1)}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\varphi}_{k1}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} a_{12}(t) \\ a_{12}^{-1}(t) \frac{d}{dt} a_{12}(t) - a_{11}(t) \end{bmatrix}, \quad \check{\psi}_{k1}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \hat{\psi}_{k1}^{(1)}(t) &= \begin{bmatrix} a_{12}^{-1}(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \check{\varphi}_{k1}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}_k(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -a_{12}^{-1}(t) f_1(t) \end{bmatrix}, \\ \hat{X}_k &= \begin{bmatrix} a_{12}(t_{k+1} - 0) & 0 \\ a_{12}^{-1}(t_{k+1} - 0) \frac{d}{dt} a_{12}(t) \Big|_{t=t_{k+1}-0} - a_{11}(t_{k+1} - 0) & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{x}_k = \begin{bmatrix} \eta_{k1} \\ \eta_{k2} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

умови (9), (11), (12) відсутні, (10) має вигляд

$$f_2(t) \equiv 0. \quad (29)$$

Якщо ця рівність виконується, то система (1)–(3) має періодичні розв'язки (13), (14), (16), (17) з урахуванням зауваження 3:

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} a_{12}(t) \tilde{\beta}_{k1}(t) \\ a_{12}^{-1}(t) \tilde{\beta}_{k1}(t) \frac{d}{dt} a_{12}(t) - a_{11}(t) \tilde{\beta}_{k1}(t) - a_{12}^{-1}(t) f_1(t) + \frac{d}{dt} \tilde{\beta}_{k1}(t) \end{bmatrix}, \\ t &\in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k \in Z, \\ \tilde{\beta}_{k1}(t_k + 0) &= a_{12}^{-1}(t_k + 0) \eta_{k1}, \quad k \in Z, \\ \frac{d}{dt} \tilde{\beta}_{k1}(t) \Big|_{t=t_k+0} &= \left(a_{11}(t_k + 0) a_{12}^{-1}(t_k + 0) - a_{12}^{-2}(t_k + 0) \frac{d}{dt} a_{12}(t) \Big|_{t=t_k+0} \right) \eta_{k1} \\ &+ a_{12}(t_k - 0) \tilde{\beta}_{k1}(t_k - 0) + \eta_{k2} + a_{12}^{-1}(t_1 + 0) f_1(t_k + 0), \quad k \in Z. \end{aligned}$$

4. $a_{22}(t) \equiv 0$, $a_{12}(t) \equiv 0$, $a_{21}(t) \neq 0 \quad \forall t \in R$. Маємо $\check{r}_k = 1$, $\hat{r}_k = 1$, $\hat{s}_{k1} = 1$, $\tilde{r}_k = r_k = \check{r}_k = 0$, $\alpha_k = 0$,

$$\begin{aligned} \check{\varphi}_{k1}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\psi}_{k1}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\psi}_{k1}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} a_{21}(t) \\ -a_{11}(t) - a_{21}^{-1}(t) \frac{d}{dt} a_{21}(t) \end{bmatrix}, \quad \hat{\varphi}_{k1}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} a_{21}^{-1}(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \check{\psi}_{k1}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}_k(t) = \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(t) f_2(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{X}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \tilde{A}_k &= \begin{bmatrix} a_{21}(t_k + 0) & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{f}_k = f_2(t_k + 0), \quad \hat{A}_k = \Xi_k = 0, \quad \Theta_k = \Upsilon_k = 1, \end{aligned}$$

$$\hat{x}_k = \begin{bmatrix} \eta_{k1} \\ -a_{21}^{-1}(t_k - 0)f_2(t_k - 0) + \eta_{k2} \end{bmatrix},$$

$\tilde{c}_k$ — скалярні сталі, $\tilde{c}_{k+2} = \tilde{c}_k$, умови (10), (12) відсутні, (9), (11) мають вигляд

$$a_{21}(t)f_1(t) - a_{11}(t)f_2(t) - a_{21}^{-1}(t)f_2(t) \frac{d}{dt} a_{21}(t) + \frac{d}{dt} f_2(t) \equiv 0,$$

$$a_{21}(t_k + 0)\eta_{k1} + f_2(t_k + 0) = 0, \quad k = 1, 2.$$

Якщо ці рівності виконуються, то система (1) – (3) має періодичні розв'язки (13), (15), (18) з урахуванням зауваження 3:

$$x(t) = \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(t)f_2(t) \\ \check{\beta}_{k1} \end{bmatrix}, \quad t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k \in Z,$$

$$\check{\beta}_{k1}(t_{k+1} - 0) = \tilde{c}_{k+1}, \quad k \in Z,$$

$$\check{\beta}_{k1}(t_k + 0) = -a_{21}^{-1}(t_k - 0)f_2(t_k - 0) + \eta_{k2}, \quad k \in Z.$$

5. $a_{22}(t) \equiv 0$, $a_{12}(t) \equiv 0$, $a_{21}(t) \equiv 0 \quad \forall t \in R$. Маємо $\check{r}_k = 1$, $\check{r}_k = 1$, $\tilde{r}_k = r = \hat{r}_k = 0$, $\alpha_k = 1$,

$$\check{\varphi}_{k1}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \check{\psi}_{k1}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \check{\varphi}_{k1}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\check{\psi}_{k1}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad q_{k1}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_{k1}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$X_k(t) = \exp \left(\int_{t_k+0}^t a_{11}(z) dz \right),$$

$$\tilde{X}_k(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \exp \left(\int_{t_k+0}^t a_{11}(z) dz \right),$$

$$\tilde{x}_k(t) = \begin{bmatrix} \int_{t_k+0}^t \exp \left(\int_{\tau}^t a_{11}(z) dz \right) f_1(\tau) d\tau \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{X}_k = \begin{bmatrix} \exp \left(\int_{t_k+0}^{t_{k+1}-0} a_{11}(z) dz \right) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Theta_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\hat{x}_k = \begin{bmatrix} \eta_{k1} \\ \int_{t_{k-1}+0}^{t_k-0} \exp\left(\int_{\tau}^{t_k-0} a_{11}(z) dz\right) f_1(\tau) d\tau + \eta_{k2} \end{bmatrix},$$

$$\Xi_k(\tilde{A}_k \hat{x}_k + \tilde{f}_k) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f} = \begin{bmatrix} -\eta_{11} \\ -\eta_{21} \end{bmatrix}, \quad \bar{\Xi} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\Theta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\Upsilon} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{bmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \end{bmatrix},$$

умови (9), (11) відсутні, (12) виконується, (10) співпадає з (29). Якщо ця рівність виконується, то система (1)–(3) має періодичні розв'язки (13), (15), (18) з урахуванням зауваження 3:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \exp\left(\int_{t_k+0}^t a_{11}(z) dz\right) \eta_{k1} + \int_{t_k+0}^t \exp\left(\int_{\tau}^t a_{11}(z) dz\right) f_1(\tau) d\tau \\ \check{\beta}_{k1}(t) \end{bmatrix},$$

$$t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k \in Z,$$

$$\check{\beta}_{k1}(t_{k+1} - 0) = \bar{c}_1, \quad k = 2i, \quad i \in Z,$$

$$\check{\beta}_{k1}(t_{k+1} - 0) = \bar{c}_2, \quad k = 2i + 1, \quad i \in Z,$$

$$\begin{aligned} \check{\beta}_{k+1,1}(t_{k+1} + 0) &= \exp\left(\int_{t_k+0}^{t_{k+1}-0} a_{11}(z) dz\right) \eta_{k1} \\ &+ \int_{t_k+0}^{t_{k+1}-0} \exp\left(\int_{\tau}^{t_{k+1}-0} a_{11}(z) dz\right) f_1(\tau) d\tau + \eta_{k+1,2}, \quad k \in Z. \end{aligned}$$

Автор заявляє про відсутність конфлікту інтересів і спеціального фінансування цієї роботи. Всі необхідні дані містяться в статті.

Література

1. А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець, *Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями*, Вища школа, Київ (2000).

2. М. А. Елишевич, *Периодические решения системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка с прямоугольными периодическими матрицами*, Нелін. коливання, **18**, № 1, 38–54 (2015).
3. А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк, *Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием*, Вища школа, Київ (1987).
4. А. М. Самойленко, А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, *Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи*, Інститут математики НАН України, Київ (1995).
5. С. І. Балоба, І. І. Король, *Періодичні розв'язки вироджених імпульсних систем*, Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки, вип. 4, 43–46 (2012).
6. М. А. Єлішевич, *Задача Коші для системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку з виродженою матрицею при похідних і імпульсною дією у фіксовані моменти часу*, Нелін. коливання, **25**, № 4, 325–340 (2022).
7. М. А. Єлішевич, *Задача Коші для системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку з прямокутними матрицями і однією імпульсною дією у фіксований момент часу*, Нелін. коливання, **27**, № 1, 64–81 (2024).
8. М. А. Єлішевич, *Задача Коші для системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку з прямокутними матрицями та імпульсною дією у фіксовані моменти часу*, Нелін. коливання, **27**, № 2, 180–202 (2024).
9. М. А. Елишевич, *Некоторые свойства жордановых наборов векторов матрицы относительно оператора, содержащего дифференцирование*, Журн. обчисл. та прикл. математики, № 2(108), 119–134 (2012).
10. М. А. Елишевич, *Задача Коши для системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка с прямоугольными матрицами*, Нелін. коливання, **16**, № 2, 173–190 (2013).

Одержано 13.06.24