DOI: 10.3842/nosc.v27i3.1485

УДК 517.925

ПРО АСИМПТОТИКУ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО КЛАСУ ІСТОТНО НЕЛІНІЙНИХ НЕАВТОНОМНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

В'ячеслав Євтухов, Сергій Голубєв

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
вул. Дворянська, 2, Одеса, 65082, Україна
e-mail: emden@farlep.net, відповідальний за листування
sergii.golubev@stud.onu.edu.ua

We establish the necessary and sufficient conditions for the existence of $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-solutions of a nonautonomous two-term differential equation of the fourth order with a rapidly varying nonlinearity and also find asymptotic representations for these solutions and their derivatives up to the third order inclusively.

Встановлено необхідні й достатні умови існування $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язків для неавтономного двочленного диференціального рівняння четвертого порядку зі швидко змінною нелінійністю, а також асимптотичні зображення для таких розв'язків і їхніх похідних до третього порядку включно.

1. Вступ і деякі попередні відомості. В роботах [1 – 3] розроблено методику дослідження асимптотичної поведінки $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язків диференціального рівняння вигляду

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi(y), \tag{1.1}$$

де $\alpha_0 \in \{-1,1\}$, $p\colon [a,\omega[\longrightarrow]0,+\infty[$ — неперервна функція, $-\infty < a < \omega \le +\infty$, $\varphi\colon \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0,+\infty[$ — двічі неперервно диференційовна функція така, що

$$\varphi'(y) \neq 0, \quad \text{де} \quad y \in \Delta_{Y_0}, \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \varphi(y) = \begin{cases} \text{або} \quad 0, \\ \text{або} \quad +\infty, \end{cases} \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi(y)\varphi''(y)}{\varphi'^2(y)} = 1, \tag{1.2}$$

Y_0 дорівнює або 0, або $\pm\infty$, Δ_{Y_0} — однобічний окіл Y_0.

З (1.2) безпосередньо маємо

$$\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} \sim \frac{\varphi''(y)}{\varphi'(y)} \quad \text{при} \quad y \to Y_0, \quad y \in \Delta_{Y_0}, \quad \text{і} \quad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)} = \pm\infty. \tag{1.3}$$

Згідно з цими умовами (див. [10, p. 91 – 92], Ch. 3, § 3.4) функція φ і її перша похідна є швидко змінними функціями при $y \to Y_0$.

Раніше асимптотичну поведінку розв'язків рівняння (1.1) з такого типу нелінійностями майже не досліджували. Відомі були лише роботи [4 – 7] для рівнянь із експоненціальною нелінійністю ($\varphi(y) = e^{\sigma y}, Y_0 = \pm\infty$), а також роботи [8, 9] і теорема 3.6 із [10, p. 93] (Ch. 3) для деяких частинних випадків рівняння (1.1), коли функція φ, взагалі кажучи, відмінна від експоненціальної. При цьому в [8, 9] встановлено асимптотику класу розв'язків, який визначався через функцію φ, що не зовсім природно, а в [10] — лише розв'язків, які прямують до нуля при $t \to +\infty$ (випадок $\omega = +\infty$).

Основою запропонованого в [1 – 3] методу дослідження асимптотичної поведінки $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків диференціального рівняння вигляду (1.1) є результати роботи [11] (розд. 3, § 10) про апріорні асимптотичні властивості $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків диференціального рівняння (1.1), а також результати з [12, c. 174 – 180)] (п. 3.10) про асимптотичні властивості функцій із класу Γ.

Означення 1.1. *Клас Γ складається з вимірних неспадних і неперервних справа функцій $f\colon [b, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$, для кожної з яких існує вимірна функція $g\colon [b, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$, доповнююча для функції f, така, що*

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{f(y + ug(y))}{f(y)} = e^u \quad \forall u \in [-\infty, +\infty].$$

Із властивостей цих функцій, зокрема, випливає, що функція φ в диференціальному рівнянні (1.1) при $Y_0 = +\infty$ і $\varphi'(y) > 0$ належить до класу Γ з доповнюючою функцією $g(y) = \dfrac{\varphi(y)}{\varphi'(y)}$.

Припустимо тепер, що Y_0 дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, Δ_{Y_0} — деякий однобічний окіл Y_0, і розглянемо неперервну функцію $f\colon \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$. При цьому тут і далі, не применшуючи загальності, будемо вважати, що

$$\Delta_{Y_0} = \Delta_{Y_0}(y_0), \quad \text{де} \quad \Delta_{Y_0}(y_0) = \begin{cases} [y_0, Y_0[, & \text{якщо} \quad \Delta_{Y_0} \text{ — лівий окіл } \quad Y_0, \\ ]Y_0, y_0], & \text{якщо} \quad \Delta_{Y_0} \text{ — правий окіл } \quad Y_0, \end{cases} \tag{1.4}$$

де $y_0 \in \Delta_{Y_0}$ таке, що $|y_0| < 1$ при $Y_0 = 0$ і $y_0 > 1$ $(y_0 < -1)$ при $Y_0 = +\infty$ (при $Y_0 = -\infty$).

Зауважимо, що якщо $f : \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$ — неперервна монотонна функція, яка задовольняє умову

$$\lim_{\substack{y\to Y_0 \\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}} f(y) = Z_0 \in \{0; +\infty\}, \tag{1.5}$$

то неперервною і неспадною на деякому проміжку $[b, +\infty[$, а також прямуючою до $+\infty$ при $y \to +\infty$ буде:

1) функція $f_0(y) = \dfrac{1}{f(y)}$ при $Y_0 = +\infty$ і $Z_0 = 0$;
2) функція $f_0(y) = f(-y)$ при $Y_0 = -\infty$ і $Z_0 = +\infty$;
3) функція $f_0(y) = f\left(\dfrac{1}{y}\right)$ при $Y_0 = 0$, $\Delta_{Y_0} =]0, y_0]$ і $Z_0 = +\infty$;
4) функція $f_0(y) = \dfrac{1}{f\left(\dfrac{1}{y}\right)}$ при $Y_0 = 0$, $\Delta_{Y_0} =]0, y_0]$ і $Z_0 = 0$;
5) функція $f_0(y) = f\left(-\dfrac{1}{y}\right)$ при $Y_0 = 0$, $\Delta_{Y_0} = [y_0, 0[$ і $Z_0 = +\infty$;

6) функція $f_0(y) = \dfrac{1}{f\left(-\dfrac{1}{y}\right)}$ при $Y_0 = 0,\ \Delta_{Y_0} = [y_0, 0[$ і $Z_0 = 0$;

7) функція $f_0(y) \equiv f(y)$ при $Y_0 = +\infty$ і $Z_0 = +\infty$.

Означення 1.2. *Класом $\Gamma_{Y_0}(Z_0)$ будемо називати множину неперервних і монотонних функцій $f\colon \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$, які задовольняють умову (1.5) і для кожної з яких відповідна до неї неперервна й неспадна функція f_0, визначена в 1) – 7), належить класу Γ.*

Згідно з результатами [12] для функцій з класу Γ в [1 – 3] встановлено такі асимптотичні властивості функцій з класу $\Gamma_{Y_0}(Z_0)$.

Лема 1.1. *Якщо $f \in \Gamma(Y_0, Z_0)$, то існує неперервна функція $g\colon \Delta_{Y_0} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, яку називають доповнюючою для f, така, що*

$$\lim_{\substack{y\to Y_0 \\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{f(y+ug(y))}{f(y)} = e^u \quad \forall u \in \mathbb{R}, \tag{1.6}$$

причому доповнююча функція визначається однозначно з точністю до еквівалентних при $y \to Y_0$ функцій, за одну з яких можна обрати функцію

$$\frac{\int_Y^y f(x)\,dx}{f(y)}, \quad \text{де} \quad Y = \begin{cases} y_0, & \text{якщо} \quad \lim_{\substack{y\to Y_0 \\ y\in\Delta_{Y_0}}} f(y) = +\infty, \\ Y_0, & \text{якщо} \quad \lim_{\substack{y\to Y_0 \\ y\in\Delta_{Y_0}}} f(y) = 0. \end{cases}$$

Лема 1.2. 1) *Якщо $f \in \Gamma(Y_0, Z_0)$, то вона є швидко змінною при $y \to Y_0$, а доповнююча для неї функція g задовольняє умову $\lim_{\substack{y\to Y_0 \\ y\in\Delta_{Y_0}}} \dfrac{g(y)}{y} = 0$.*

2) *Якщо $f \in \Gamma(Y_0, Z_0)$ з доповнюючою функцією g, то для будь-якої неперервної функції $u : \Delta_{Y_0} \longrightarrow \mathbb{R}$, яка задовольняє умови*

$$\lim_{\substack{y\to Y_0 \\ y\in\Delta_{Y_0}}} u(y) = u_0 \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0 \\ y\in\Delta_{Y_0}}} f(y + u(y)g(y)) = Z_0,$$

має місце граничне співвідношення

$$\lim_{\substack{y\to Y_0 \\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{f(y+u(y)g(y))}{f(y)} = e^{u_0}.$$

Лема 1.3. *Якщо $f \in \Gamma(Y_0, Z_0)$ з доповнюючою функцією g і є строго монотонною, то обернена для неї функція $f^{-1} : \Delta_{Z_0} \longrightarrow \Delta_{Y_0}$ є повільно змінною при $z \to Z_0$ і задовольняє граничне співвідношення*

$$\lim_{\substack{z\to Z_0 \\ z\in\Delta_{Z_0}}} \frac{f^{-1}(\lambda z) - f^{-1}(z)}{g(f^{-1}(z))} = \ln\lambda \quad \forall \lambda > 0, \tag{1.7}$$

причому для кожного $\Lambda > 1$ це граничне співвідношення виконується рівномірно при $\lambda \in \left[\dfrac{1}{\Lambda}, \Lambda\right]$.

Лема 1.4. *Якщо функція* $f : \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$ *є двічі неперервно диференційовною і задовольняє умови*

$$f'(y) \neq 0, \qquad \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} f(y) = Z_0 \in \{0; +\infty\}, \qquad \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{f''(y) f(y)}{f'^2(y)} = 1,$$

то функції f *і* $f'(y)$ *належать класу* $\Gamma(Y_0, Z_0)$ *з доповнюючою функцією* g, *яку визначають однозначно з точністю до еквівалентних при* $y \to Y_0$ *функцій і за одну з них можна обрати одну з функцій*

$$\frac{\displaystyle\int_Y^y f(x)\, dx}{f(y)} \sim \frac{f(y)}{f'(y)} \sim \frac{f'(y)}{f''(y)},$$

де Y *визначено в лемі 1.1.*

Як доповнення до цих лем наведемо також твердження, які стосуються теорії повільно, правильно і швидкозмінних функцій (див., наприклад, [10, p. 117], Appendix, Proposition 10).

Лема 1.5. *Якщо* $f_0 : \Delta_{Y_0} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *— неперервно диференційовна функція і*

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{y f_0'(y)}{f_0(y)} = \sigma, \tag{1.8}$$

то функція f_0 *при* $y \to Y_0$ *є у випадках* $\sigma = 0,\ 0 < |\sigma| < +\infty$ *і* $\sigma = \pm\infty$ *відповідно повільно змінною, правильно змінною порядку* σ *і швидко змінною.*

З приводу повільно, правильно і швидко змінних функцій, а також їхніх властивостей див. монографії [1, 7, 8]. Зокрема відомо, що для кожної знакосталої правильно змінної при $y \to Y_0$ функції $f : \Delta_{Y_0} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ порядку σ має місце подання

$$f(y) = |y|^\sigma L(t), \tag{1.9}$$

де $L : \Delta_{Y_0} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ — повільно змінна функція при $y \to Y_0$ й існує еквівалентна до неї при $y \to Y_0$ неперервно диференційовна функція f_0 (її називають нормалізованою правильно змінною функцією порядку σ), для якої виконується умова (1.8). Крім того, згідно з теоремою про рівномірну збіжність для повільно змінних функцій граничне співвідношення

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{L(y\lambda)}{L(y)} = 1 \quad \forall \lambda > 0, \tag{1.10}$$

яке визначає повільно змінну функцію при $y \to Y_0$, для кожного проміжку $[c, d] \in]0, +\infty[$ виконується рівномірно при $\lambda \in [c, d]$.

З використанням цих лем і апріорних асимптотичних властивостей $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків в [1 – 3] отримано необхідні й достатні умови існування $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків диференціального рівняння (1.1) при всіх можливих значеннях параметра λ_0, а також асимптотичні зображення при $t \uparrow \omega$ для таких розв'язків та їхніх похідних першого порядку.

У подальшому цю методику в роботах [13, 14] поширено на неавтономні двочлені диференціальні рівняння третього порядку зі швидко змінною нелінійністю φ. При цьому виявилося, що при розгляді рівнянь третього порядку при встановленні достатніх умов існування $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків із отриманими асимптотичними зображеннями не виникає складних для дослідження особливих випадків, пов'язаних із існуванням суто уявних коренів характеристичного рівняння граничної матриці коефіцієнтів лінійної частини деякої системи квазілінійних диференціальних рівнянь із майже сталими коефіцієнтами, як це було при розгляді диференціальних рівнянь другого порядку і призводило до необхідності побудови додаткової техніки отримання системи більш зручного для дослідження вигляду.

У зв'язку з викладеним вище запровадження вказаної методики для рівнянь n-го порядку потребує попереднього детального дослідження двочленного диференціального рівняння четвертого порядку зі швидко змінною нелінійністю. Саме розгляду такого рівняння присвячено цю статтю.

2. Постановка задачі та формулювання основних результатів. Розглядаємо диференціальне рівняння

$$y^{(4)} = \alpha_0 p_0(t)[1 + r(t)]\varphi(y), \tag{2.1}$$

де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p_0\colon [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ — неперервна або неперервно диференційовна функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $r: [a, \omega[\longrightarrow]-1, +\infty[$ — неперервна функція така, що

$$\lim_{t \uparrow \omega} r(t) = 0, \tag{2.2}$$

$\varphi\colon \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$ — двічі неперервно диференційовна функція, яка задовольняє умови (1.2), Y_0 і Δ_{Y_0} — ті ж самі, що й у (1.1) (див. також (1.4)).

Означення 2.1. *Розв'язок y диференціального рівняння (2.1) називається $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язком при $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, якщо він визначений на проміжку $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ і задовольняє умови*

$$y(t) \in \Delta_{Y_0} \quad \textit{при} \quad t \in [t_0, \omega[, \qquad \lim_{t \uparrow \omega} y(t) = Y_0, \tag{2.3}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} y^{(k)}(t) = \left[\begin{array}{ll} \textit{або} & 0, \\ \textit{або} & \pm\infty, \end{array} \right. \quad k = \overline{1,3}, \qquad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y'''(t)]^2}{y''(t) y^{(4)}(t)} = \lambda_0. \tag{2.4}$$

У цій роботі встановлюємо необхідні й достатні умови існування $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків диференціального рівняння (2.1) у випадку (неособливий випадок), коли $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right\}$, а також асимптотичних зображень при $t \uparrow \omega$ для таких розв'язків і їхніх похідних до третього порядку включно і визначення їхньої кількості.

Згідно з результатами з [11] (розд. 3, § 10) у цьому випадку кожний $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язок y диференціального рівняння (2.1) має такі апріорні асимптотичні властивості:

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) y^{(k)}(t)}{y^{(k-1)}(t)} = \frac{a_{0k}}{\lambda_0 - 1}, \quad k = \overline{1,4}, \quad \text{де} \quad a_{0k} = (4-k)\lambda_0 + k - 3, \tag{2.5}$$

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо} \quad \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{якщо} \quad \omega < +\infty. \end{cases}$$

Для того щоб сформулювати отримані для рівняння (2.1) результати, введемо необхідні для цього позначення. Покладемо

$$\mu_0 = \operatorname{sign}\varphi'(y), \quad \nu_0 = \operatorname{sign} y_0, \quad \nu_1 = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad \Delta_{Y_0} = [y_0, Y_0[, \\ -1, & \text{якщо} \quad \Delta_{Y_0} =]Y_0, y_0], \end{cases} \tag{2.6}$$

і введемо функції

$$J_0(t) = \int\limits_{A_0}^{t} \pi_\omega^3(\tau) p_0(\tau)\, d\tau, \qquad \Phi(y) = \int\limits_{B}^{y} \frac{ds}{\varphi(s)}, \tag{2.7}$$

де

$$A_0 = \begin{cases} \omega, & \text{якщо} \quad \int_a^\omega \pi_\omega^3(\tau) p_0(\tau)\, d\tau < +\infty, \\ a, & \text{якщо} \quad \int_a^\omega \pi_\omega^3(\tau) p_0(\tau)\, d\tau = +\infty, \end{cases} \qquad B = \begin{cases} Y_0, & \text{якщо} \quad \int_{y_0}^{Y_0} \frac{ds}{\varphi(s)} = \text{const}, \\ y_0, & \text{якщо} \quad \int_{y_0}^{Y_0} \frac{ds}{\varphi(s)} = \pm\infty. \end{cases}$$

З урахуванням означення 2.1 зауважимо, що числа ν_0 і ν_1 визначають знаки $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язку і його першої похідної в деякому лівому околі ω. При цьому зрозуміло, що умови

$$\nu_0 \nu_1 < 0 \quad \text{при} \quad Y_0 = 0, \qquad \nu_0 \nu_1 > 0 \quad \text{при} \quad Y_0 = \pm\infty \tag{2.8}$$

є необхідними для існування таких розв'язків.

Зазначимо також деякі властивості функції Φ. Вона неперервно диференційовна і зберігає знак на проміжку Δ_{Y_0}, прямує або до нуля, або до $\pm\infty$ при $y \to Y_0$, є зростаючою на Δ_{Y_0}, оскільки на цьому проміжку $\Phi'(y) = \dfrac{1}{\varphi(y)} > 0$. Тому для неї існує неперервно диференційовна зростаюча обернена функція $\Phi^{-1} : \Delta_{Z_0} \longrightarrow \Delta_{Y_0}$, де

$$\begin{gathered} Z_0 = \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \Phi(y) = \begin{cases} \text{або} & 0, \\ \text{або} & \pm\infty, \end{cases} \\ \Delta_{Z_0} = \begin{cases} [z_0, Z_0[, & \text{якщо} \quad \Delta_{Y_0} = [y_0, Y_0[, \\ ]Z_0, z_0], & \text{якщо} \quad \Delta_{Y_0} =]Y_0, y_0], \end{cases} \qquad z_0 = \Phi(y_0), \end{gathered} \tag{2.9}$$

для якої

$$\lim_{\substack{z \to Z_0 \\ z \in \Delta_{Z_0}}} \Phi^{-1}(z) = Y_0. \tag{2.10}$$

Враховуючи (1.2), з використанням правила Лопіталя у формі Штольца будемо мати

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\Phi(y)}{\dfrac{1}{\varphi'(y)}} = \frac{\dfrac{1}{\varphi(y)}}{-\dfrac{\varphi''(y)}{\varphi'^2(y)}} = -\frac{\varphi'^2(y)}{\varphi''(y)\varphi(y)} = -1.$$

Звідси випливає, що

$$\Phi(y) \sim -\frac{1}{\varphi'(y)} \quad \text{при} \quad y \to Y_0, \qquad \operatorname{sign}\Phi(y) = -\mu_0. \tag{2.11}$$

З урахуванням асимптотичного співвідношення з (2.11) також знаходимо, що

$$\frac{\Phi'(y)}{\Phi(y)} \sim -\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}, \qquad \frac{\Phi''(y)}{\Phi'(y)} \sim -\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} \quad \text{при} \quad y \to Y_0,$$

і тому

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\Phi''(y)\Phi(y)}{\Phi'^2(y)} = 1.$$

Тоді за лемою 1.4 функція $\Phi(y)$ та її похідна належать до класу $\Gamma(Y_0, Z_0)$ з доповнюючою функцією $g(y)$, яку визначаємо однозначно з точністю до еквівалентних при $y \to Y_0$ функцій і за одну з них можна обрати одну з функцій

$$\frac{\int_Y^y \Phi(x)\,dx}{\Phi(y)} \sim \frac{\Phi(y)}{\Phi'(y)} \sim \frac{\Phi'(y)}{\Phi''(y)} \sim -p\,\frac{\varphi(y)}{\varphi'(y)},$$

де Y визначено у лемі 1.1.

Крім того, з (2.11) з урахуванням (1.3) і введених позначень маємо

$$\frac{y}{\varphi(y)\Phi(y)} \sim -\frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)} \longrightarrow \pm\infty \quad \text{при} \quad y \to Y_0, \tag{2.12}$$

де знак нескінченності визначається знаком числа $-\nu_0\mu_0$. Також, враховуючи (2.10) і (2.11), отримуємо, що

$$\lim_{\substack{z\to Z_0\\ z\in\Delta_{Z_0}}} \frac{z\big(\varphi(\Phi^{-1}(z))\big)'}{\varphi(\Phi^{-1}(z))} = \lim_{\substack{z\to Z_0\\ z\in\Delta_{Z_0}}} \frac{z\varphi'(\Phi^{-1}(z)\varphi(\Phi^{-1}(z)}{\varphi(\Phi^{-1}(z)}$$

$$= \lim_{\substack{z\to Z_0\\ z\in\Delta_{Z_0}}} z\varphi'(\Phi^{-1}(z)) = \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \Phi(y)\varphi'(y) = -1.$$

Отже, за лемою 1.5 функція $\varphi\big(\Phi^{-1}(z)\big)$ є правильно змінною функцією порядку -1 при $z \to Z_0$ і тому її можна записати у вигляді

$$\varphi\big(\Phi^{-1}(z)\big) = \frac{L(z)}{z}, \tag{2.13}$$

де $L\colon \Delta_{Z_0} \longrightarrow \mathbb{R}$ — повільно змінна функція при $z \to Z_0$. Аналогічно з використанням першої з умов (1.3) встановлюємо, що функція $\varphi'\big(\Phi^{-1}(z)\big)$ також є правильно змінною функцією порядку -1 при $z \to Z_0$.

Далі, при $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ уведемо додаткові допоміжні позначення

$$K(\lambda_0) = \frac{(\lambda_0 - 1)^3}{\lambda_0(2\lambda_0 - 1)}, \qquad Y(t) = \Phi^{-1}(\alpha_0 K(\lambda_0) J_0(t)),$$

$$q(t) = \frac{Y'(t)}{\alpha_0 J_3(t)}, \qquad H(t) = \frac{Y(t)\varphi'(Y(t))}{\varphi(Y(t))},$$

$$J_1(t) = \int\limits_{A_1}^{t} p_0(\tau)\varphi(Y(\tau))\,d\tau, \qquad J_i(t) = \int\limits_{A_i}^{t} J_{i-1}(\tau)d\tau, \quad i = 2, 3,$$

де

$$A_1 = \begin{cases} a_0, & \text{якщо} \quad \displaystyle\int_{a_0}^{\omega} p_0(\tau)\varphi(Y(\tau)))\,d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо} \quad \displaystyle\int_{a_0}^{\omega} p_0(\tau)\varphi(Y(\tau)))\,d\tau < +\infty, \end{cases} \qquad a_0 \in [a, \omega[,$$

$$A_i = \begin{cases} a_0, & \text{якщо} \quad \displaystyle\int_{a_0}^{\omega} J_{i-1}(\tau)d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо} \quad \displaystyle\int_{a_0}^{\omega} J_{i-1}(\tau)d\tau < +\infty. \end{cases} \qquad i = 2, 3.$$

Для рівняння (2.1) справедливі такі результати.

Теорема 2.1. *Нехай* $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right\}$. *Для існування* $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$*-розв'язків диференціального рівняння (2.1) необхідно, щоб виконувалися нерівності*

$$\alpha_0\nu_0\lambda_0(2\lambda_0 - 1)(3\lambda_0 - 2) > 0, \qquad \alpha_0\nu_1 K(\lambda_0)\pi_\omega(t) > 0 \quad \textit{при} \quad t \in]a, \omega[\tag{2.14}$$

і умови

$$\alpha_0\mu_0 K(\lambda_0) J_0(t) < 0 \quad \textit{при} \quad t \in]a, \omega[, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) J_0'(t)}{J_0(t)} = \pm\infty, \tag{2.15}$$

$$\alpha_0 K(\lambda_0) J_0(t) \subset \Delta_{Z_0} \quad \textit{при} \quad t \in [t_1, \omega[\ \ (t_1 \in [a, \omega]), \qquad Z_0 = \alpha_0 K(\lambda_0) \lim_{t\uparrow\omega} J_0(t), \tag{2.16}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} H(t) = \pm\infty, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) J_1'(t)}{J_1(t)} = \frac{1}{\lambda_0 - 1}, \tag{2.17}$$

де знак нескінченності у (2.15) визначено знаком числа $-\alpha_0\mu_0 K(\lambda_0)$, *а у (2.17) — знаком числа* $\nu_0\mu_0$, *причому кожний такий розв'язок допускає при* $t \uparrow \omega$ *асимптотичні зображення*

$$y(t) = Y(t)\left[1 + \frac{o(1)}{H(t)}\right], \qquad y^{(k)}(t) = \alpha_0 J_{4-k}(t)[1 + o(1)], \quad k = 1, 2, 3. \tag{2.18}$$

Теорема 2.2. *Нехай* $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right\}$, $p_0 : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ *— неперервна функція і виконуються умови (2.15) – (2.17). Нехай, крім того, виконуються граничні співвідношення*

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)^2} \left|\frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right|^{\frac{3}{4}} = 0, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} (1 - q(t))|H(t)|^{\frac{3}{4}} = 0. \tag{2.19}$$

Тоді у випадку, коли $\alpha_0\mu_0 = -1$, *диференціальне рівняння (2.1) має двопараметричну сім'ю* $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$*-розв'язків, кожний з яких задовольняє при* $t\uparrow\omega$ *асимптотичні зображення*

$$y(t) = Y(t)\left[1+\frac{o(1)}{H(t)}\right], \qquad y^{(k)}(t) = \alpha_0 J_{4-k}(t)\left[1+\frac{o(1)}{|H(t)|^{\frac{4-k}{4}}}\right], \quad k=1,2,3. \tag{2.20}$$

Теорема 2.3. *Нехай* $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\left\{0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},1\right\}$, $p_0\colon [a,\omega[\ \longrightarrow\ ]0,+\infty[$ *— неперервно диференційовна функція і виконуються умови (2.15) – (2.17). Нехай, крім того, разом із першим граничним співвідношенням (2.19) виконується співвідношення*

$$\lim_{t\uparrow\omega}\pi_\omega(t)q'(t)|H(t)|^{\frac{1}{2}} = 0. \tag{2.21}$$

Тоді у випадку, коли $\alpha_0\mu_0 = -1$, *диференціальне рівняння (2.1) має двопараметричну сім'ю* $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$*-розв'язків, кожний з яких допускає при* $t\uparrow\omega$ *асимптотичні зображення*

$$y(t) = Y(t)\left[1+\frac{o(1)}{H(t)}\right], \qquad y^{(k)}(t) = \alpha_0 J_{4-k}(t)\left[q(t)+\frac{o(1)}{|H(t)|^{\frac{4-k}{4}}}\right], \quad k=1,2,3. \tag{2.22}$$

Зауваження 2.1. У теоремі 2.1 нерівності (2.14) визначають знаки $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язку і його першої похідної у деякому лівому околі ω, а також згідно з (2.8) значення Y_0. Умови (2.15) дозволяють визначити границю інтегрування функції J_0 і той факт (згідно з лемою 1.5), що J_0 є швидко змінною функцією при $t\uparrow\omega$. Умови (2.16) визначають для $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язку множину значень функції $\Phi(y(t))$ при $t\in[t_0,\omega[$. Умови (2.17) для функції $\varphi\big(\Phi^{-1}(\alpha_0 K(\lambda_0)J_0(t))\big)$ дозволяють підтвердити, що розглядуваний розв'язок рівняння (2.1) із асимптотичними зображеннями (2.18) дійсно є $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язком.

Зауваження 2.2. У теоремі 2.2 друга з граничних умов (2.19) є достатньо жорсткою. У теоремі 2.3 її замінено на менш жорстку умову (2.21).

3. Деякі допоміжні твердження.

Лема 3.1. *Нехай при* $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\left\{0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},1\right\}$ *виконуються умови (2.14) – (2.17). Тоді справедливі співвідношення*

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J_2'(t)}{J_2(t)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}, \qquad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J_3'(t)}{J_3(t)} = \frac{2\lambda_0-1}{\lambda_0-1}, \tag{3.1}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} q(t) = 1, \qquad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\alpha_0\pi_\omega(t)J_3(t)}{Y(t)} = \frac{3\lambda_0-2}{\lambda_0-1}. \tag{3.2}$$

Доведення. Покладаючи

$$x_0(t) = \frac{\pi_\omega(t)J_2'(t)}{J_2(t)},$$

будемо мати

$$x_0'(t) = \frac{J_2'(t)}{J_2(t)} + \frac{\pi_\omega(t)J_1'(t)}{J_2(t)} - \pi_\omega(t)\left(\frac{J_2'(t)}{J_2(t)}\right)^2$$

$$= \frac{1}{\pi_\omega(t)} \left[\frac{\pi_\omega(t) J_2'(t)}{J_2(t)} + \frac{\pi_\omega(t) J_2'(t)}{J_2(t)} \frac{\pi_\omega(t) J_1'(t)}{J_1(t)} - \left(\frac{\pi_\omega(t) J_2'(t)}{J_2(2)} \right)^2 \right],$$

тобто введена функція $x_0(t)$ є визначеним у деякому лівому околі ω розв'язком диференціального рівняння

$$x' = f(t, x) \tag{3.3}$$

де

$$f(t, x) = \frac{1}{\pi_\omega(t)} \left(x + x \frac{\pi_\omega(t) J_1'(t)}{J_1(t)} - x^2 \right).$$

Для цього рівняння розглянемо функцію

$$f(t, c) = \frac{1}{\pi_\omega(t)} \left(c - c \frac{\pi_\omega(t) J_1'(t)}{J_1(t)} - c^2 \right),$$

де c — дійсна стала. Згідно з другою з умов (2.17) ця функція при кожному значенні $c \in \mathbb{R}$ за виключенням дійсних коренів алгебраїчного рівняння

$$c + c \frac{1}{\lambda_0 - 1} - c^2 = 0$$

зберігає знак у деякому лівому околі ω. Тоді на підставі леми 2.1 з [6] для кожного розв'язку диференціального рівняння (3.3), визначеного у лівому околі ω, а тому і для функції $x_0(t)$, існує скінченна або нескінченна границя при $t \uparrow \omega$. Покажемо, що нескінченою вона бути не може. Дійсно, у супротивному випадку існує визначений у лівому околі ω розв'язок $x(t)$ диференціального рівняння (3.3), який має нескінченну границю при $t \uparrow \omega$. Для цього розв'язку згідно з виглядом (3.3) і другою з умов (2.17) виконується асимптотичне співвідношення

$$x'(t) = -\frac{x^2(t)}{\pi_\omega(t)} [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega$$

або

$$\frac{x'(t)}{x^2(t)} = -\frac{1}{\pi_\omega(t)} [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Інтегруючи це співвідношення на проміжку від t_0 до t, одержуємо

$$-\frac{1}{x(t)} = \frac{1}{x(t_0)} = -\ln |\pi_\omega(t)| [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Тут вираз, що стоїть зліва, згідно з припущенням прямує до сталої при $t \uparrow \omega$, а справа — до нескінченності, чого бути не може. Отже, для кожного розв'язку диференціального рівняння (3.3), визначеного у лівому околі ω, а тому і для $x_0(t)$, існує скінченна границя при $t \uparrow \omega$.

Знаменник функції x_0 прямує або до $\pm\infty$, або до 0 при $t \uparrow \omega$, причому у другому випадку згідно з тільки що доведеним чисельник функції x_0 також прямує до 0 при $t \uparrow \omega$. Таким чином, для знаходження границі функції x_0 при $t \uparrow \omega$ у першому випадку можемо скористатися правилом Лопіталя у формі Штольца, а у другому — просто правилом Лопіталя, і тому з урахуванням другої з умов (2.17) отримаємо

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J_2'(t)}{J_2(t)}=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{(\pi_\omega(t)J_2'(t))'}{J_2'(t)}=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{J_2'(t)+\pi_\omega(t)J_2''(t)}{J_2'(t)}$$
$$=\lim_{t\uparrow\omega}\left[1+\frac{\pi_\omega(t)J_1'(t)}{J_1(t)}\right]=1+\frac{1}{\lambda_0-1}=\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1},$$

тобто справджується перша з граничних умов (3.1).

Далі, використовуючи отримане граничне співвідношення, аналогічно з попереднім встановлюємо справедливість другої з граничних умов (3.1).

Доведемо тепер справедливість першої з умов (3.2). Оскільки

$$q(t)=\frac{Y'(t)}{\alpha_0J_3(t)}=\frac{\big(\Phi^{-1}(\alpha_0K(\lambda_0J_0(t))\big)'}{\alpha_0J_3(t)}=\frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha_0K(\lambda_0)J_0(t)))\alpha_0K(\lambda_0)p_0(t)\pi_\omega^3(t)}{\alpha_0J_3(t)}$$

і згідно з (3.1) та другою з умов (2.17)

$$J_3(t)=\frac{J_3(t)}{J_2(t)}\frac{J_2(t)}{J_1(t)}\frac{J_1(t)}{J_1'(t)}J_1'(t)=\frac{J_3(t)}{J_3'(t)}\frac{J_2(t)}{J_2'(t)}\frac{J_1(t)}{J_1'(t)}J_1'(t)$$
$$\sim\frac{(\lambda_0-1)^3}{(2\lambda_0-1)\lambda_0}\pi_\omega^3(t)p_0(t)\varphi\big(\Phi^{-1}(\alpha_0K(\lambda_0)J_0(t))\big)\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega,$$

то $q(t)\sim 1$ при $t\uparrow\omega$, тобто виконується перша з граничних умов (3.2).

Розглянемо функцію

$$x_1(t)=\frac{Y(t)}{\alpha_0\pi_\omega(t)J_3(t)}.$$

Тут згідно з умовами (3.1) і властивостями функції Φ чисельник зберігає знак у деякому лівому околі ω і прямує або до 0, або до $\pm\infty$ при $t\uparrow\omega$. Покажемо, що знаменник теж має таку властивість. Покладаючи $\psi(t)=\pi_\omega(t)J_3(t)$ і враховуючи другу з умов (3.1), будемо мати

$$\psi'(t)=J_3(t)+\pi_\omega(t)J_3'(t)=J_3(t)\left[1+\frac{\pi_\omega(t)J_3'(t)}{J_3(t)}\right]$$
$$=\psi(t)\left[1+\frac{2\lambda_0-1}{\lambda_0-1}+o(1)\right]=\psi(t)\left[\frac{3\lambda_0-2}{\lambda_0-1}+o(1)]\right]\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega,$$

звідки одержуємо

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)}=\frac{1}{\pi_\omega(t)}\left[\frac{3\lambda_0-2}{\lambda_0-1}+o(1)]\right]\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega.$$

Інтегруючи це співвідношення, отримаємо

$$\ln|\psi(t)|=\ln|\pi_\omega(t)\left[\frac{3\lambda_0-2}{\lambda_0-1}+o(1)]\right]\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega.$$

Тут права частина прямує до нескінченності при $t \uparrow \omega$, а функція ψ прямує або до 0, або до $\pm\infty$ при $t \uparrow \omega$. Тому для визначення границі функції x_1 при $t \uparrow \omega$ може бути застосовано правило Лопіталя у формі Штольца. При цьому з урахуванням першої з умов (3.2) дістанемо, що

$$\lim_{t\uparrow\omega} x_1(t) = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{Y'(t)}{\alpha_0(\pi_\omega(t)J_3(t))'} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{Y'(t)}{\alpha_0 J_3(t)\left[\dfrac{3\lambda_0-2}{\lambda_0-1}+o(1)\right]} = \frac{\lambda_0-1}{3\lambda_0-2}$$

і тому справджується друга з граничних умов (3.2).

Лему 3.1 доведено.

Лема 3.2. *Якщо для функції*

$$z(y) = \frac{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)^2}\left|\frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right|^{\frac{3}{4}}$$

існує скінченна або рівна $\pm\infty$ границя, то цією границею може бути лише нуль, тобто

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)^2}\left|\frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right|^{\frac{3}{4}} = 0. \tag{3.4}$$

Доведення. Припустимо супротивне. Тоді виконується співвідношення

$$\frac{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\left|\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right|^{\frac{5}{4}}} = \frac{z(y)}{|y|^{\frac{3}{4}}},$$

в якому

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} z(y) = \begin{cases} \text{або} \quad \mathrm{const} \neq 0, \\ \text{або} \quad \pm\infty. \end{cases} \tag{3.5}$$

Інтегруючи це співвідношення на проміжку від y_0 до y, де $y_0, y \in \Delta_{Y_0}$, одержуємо

$$\mu_0\left(\left|\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right|^{-\frac{1}{4}} - \left|\frac{\varphi'(y_0)}{\varphi(y_0)}\right|^{-\frac{1}{4}}\right) = \int\limits_{y_0}^{y} \frac{z(s)}{|s|^{\frac{3}{4}}}\,ds. \tag{3.6}$$

Далі, розглянемо два можливі випадки.

1) Припустимо спочатку, що $\displaystyle\int_{y_0}^{Y_0} \frac{z(s)}{|s|^{\frac{3}{4}}}\,ds = \pm\infty$. У цьому випадку (3.6) можна записати у вигляді

$$\mu_0\left|\frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right|^{-\frac{1}{4}} = \frac{\displaystyle\int_{y_0}^{y} \frac{z(s)}{|s|^{\frac{3}{4}}}\,ds}{|y|^{\frac{1}{4}}}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad y \to Y_0. \tag{3.7}$$

Згідно з правилом Лопіталя у формі Штольца

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\displaystyle\int_{y_0}^{y} \frac{z(s)}{|s|^{\frac{3}{4}}}\,ds}{|y|^{\frac{1}{4}}} = \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} 4\nu_0 z(y)$$

і тому на підставі (3.5) права частина в (3.7) прямує або до сталої, відмінної від нуля, або до нескінченності при $y \to Y_0$. До того ж згідно з другою з умов (3.1) ліва частина в (3.7) прямує до нуля при $y \to Y_0$, тобто отримуємо суперечність.

2) Нехай тепер $\displaystyle\int_{y_0}^{Y_0} \frac{z(s)}{|s|^{\frac{3}{4}}}\,ds = \mathrm{const}$, що можливо лише при $Y_0 = 0$. У цьому випадку з (3.6) маємо

$$\mu_0 \left|\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right|^{-\frac{1}{4}} = c + \int\limits_0^y \frac{z(s)}{|s|^{\frac{3}{4}}}\,ds,$$

де c — дійсна стала. Покажемо, що $c = 0$. Якщо це не так, то маємо співвідношення

$$\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} = c_1 + o(1) \quad \text{при} \quad y \to 0, \quad \text{де} \quad c_1 \neq 0,$$

з якого випливає, що

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)} = 0.$$

Проте це суперечить другій із умов (1.3).

Таким чином, у випадку 2) маємо

$$\mu_0 \left|\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right|^{-\frac{1}{4}} = \int\limits_0^y \frac{z(s)}{|s|^{\frac{3}{4}}}\,ds,$$

звідки знаходимо, що

$$\mu_0 \left|\frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right|^{-\frac{1}{4}} = \frac{\displaystyle\int_0^y \frac{z(s)}{|s|^{\frac{3}{4}}}\,ds}{|y|^{\frac{1}{4}}}.$$

Тут границя при $y \to 0$ правої частини на підставі правила Лопіталя і (3.5) є або відмінною від нуля сталою, або дорівнює $\pm\infty$, а лівої частини згідно з другою з умов (1.3) дорівнює нулю. Отримані суперечності у кожному з розглянутих двох можливих випадків свідчать про те, що припущення щодо ненульової границі функції $z(y)$ при $y \to Y_0$ було не правильним і тому справджується гранична умова (3.4).

Лему 3.2 доведено.

4. Доведення основних результатів. ***Доведення теореми 2.1.*** Нехай $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ і $y\colon [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_0}$ — $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язок диференціального рівняння (2.1). Тоді згідно з (2.1), умовами (2.4), (2.5) і введеними позначеннями маємо

$$\begin{gathered} \operatorname{sign} y(t) = \nu_0, \qquad \operatorname{sign} y'(t) = \nu_1, \qquad \operatorname{sign} y''(t) = \alpha_0 \operatorname{sign}\lambda_0, \\ \operatorname{sign} y'''(t) = \alpha_0 \operatorname{sign}\left[(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)\right], \qquad \operatorname{sign} y^{(4)}(t) = \alpha_0. \end{gathered} \tag{4.1}$$

При цьому, як було встановлено, виконується умова (2.8).

Крім того, з (2.5) випливає, що

$$y^{(4)}(t) = \frac{y^{(4)}(t)}{y'''(t)}\,\frac{y'''(t)}{y''(t)}\,\frac{y''(t)}{y'(t)}\,\frac{y'(t)}{y(t)}\,y(t) \sim \frac{\lambda_0(2\lambda_0-1)(3\lambda_0-2)}{(\lambda_0-1)^4}\,\frac{y(t)}{\pi_\omega^4(t)} \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

$$y^{(4)}(t) = \frac{y^{(4)}(t)}{y'''(t)}\,\frac{y'''(t)}{y''(t)}\,\frac{y''(t)}{y'(t)}\,y'(t) \sim \frac{\lambda_0(2\lambda_0-1)}{(\lambda_0-1)^3}\,\frac{y'(t)}{\pi_\omega^3(t)} \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega$$

і тому з (2.1) одержуємо

$$\frac{y(t)}{\varphi(y(t)} = \frac{\alpha_0(\lambda_0-1)^4}{\lambda_0(2\lambda_0-1)(3\lambda_0-2)}\,\pi_\omega^4(t)p_0(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega \tag{4.2}$$

і

$$\frac{y't)}{\varphi(y(t)} = \frac{\alpha_0(\lambda_0-1)^3}{\lambda_0(2\lambda_0-1)}\,\pi_\omega^3(t)p_0(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{4.3}$$

З цих співвідношень, зокрема, отримуємо знакові умови

$$\nu_0 = \alpha_0\,\mathrm{sign}\,[\lambda_0(2\lambda_0-1)(3\lambda_0-2)],$$

$$\nu_1 = \alpha_0\,\mathrm{sign}\,[\lambda_0(\lambda_0-1)(2\lambda_0-1)\pi_\omega(t)].$$

Тоді виконуються нерівності (2.14), а також справджується рівність

$$\nu_0\nu_1 = \;\mathrm{sign}\,(\lambda_0-1)(3\lambda_0-2)\pi_\omega(t)],$$

яка згідно з (2.8) дозволяє визначити Y_0.

Далі, інтегруючи асимптотичне співвідношення (4.3) на проміжку від t_0 до t, знаходимо

$$\int\limits_{y((t_0)}^{y(t)} \frac{ds}{\varphi(s)} = \frac{\alpha_0(\lambda_0-1)^3}{\lambda_0(2\lambda_0-1)} \int\limits_{t_0}^{t} \pi_\omega^3(\tau)p_0(\tau)[1+o(1)]\,d\tau.$$

Звідси з урахуванням (2.3) і правила обрання границь інтегрування A_0 і B у функціях (2.7) одержуємо, що

$$\int\limits_{B}^{y(t)} \frac{ds}{\varphi(s)} = \frac{\alpha_0(\lambda_0-1)^3}{\lambda_0(2\lambda_0-1)} \int\limits_{A}^{t} \pi_\omega^3(\tau)p_0(\tau)\,d\tau[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

тобто

$$\Phi(y(t)) = \alpha_0 K(\lambda_0)J_0(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{4.4}$$

З цього співвідношення згідно з (2.3) і властивостями функції Φ (2.9), (2.11) випливають нерівність із (2.15) і друга з умов (2.16). Крім того, з (4.2) і (4.4), враховуючи (2.3) і (2.12), будемо мати

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J_0'(t)}{J_0(t)}=\pm\infty,$$

де знак нескінченності визначено знаком числа $-\alpha_0\mu_0K(\lambda_0)$.

Таким чином, виконується друга з умов (2.15).

Права частина в (4.4) на підставі (2.3) належить множині значень функції $\Phi(y(t))$ при $t\in[t_0,\omega[$, тобто

$$\alpha_0K(\lambda_0)J_0(t)[1+o(1)]\subset\Delta_{Z_0}\quad\text{при}\quad t\in[t_0,\omega[,\tag{4.5}$$

і тому з урахуванням другої з умов (2.16) приходимо до висновку про існування $t_1\in[t_0,\omega[$ такого, що виконується перша з умов (2.16).

На додаток, враховуючи існування для функції $\Phi:\Delta_{Y_0}\longrightarrow\Delta_{Z_0}$ оберненої функції $\Phi^{-1}:\Delta_{Z_0}\longrightarrow\Delta_{Y_0}$, з (4.4) отримуємо, що

$$y(t)=\Phi^{-1}(\alpha_0K(\lambda_0)J_0(t)[1+o(1)])\quad\text{при}\quad t\in[t_1,\omega[.\tag{4.6}$$

Оскільки, як було встановлено вище, $\Phi(y)\in\Gamma(Y_0,Z_0)$ із доповнюючою функцією $g(y)=-\dfrac{\varphi(y)}{\varphi'(y)}$ і виконуються умови (2.16), то на підставі леми 1.3 маємо

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\Phi^{-1}(\alpha_0K(\lambda_0)J_0(t)[1+o(1)])-\Phi^{-1}(\alpha_0K(\lambda_0)J_0(t))}{-\dfrac{\varphi\big(\Phi^{-1}(\alpha_0K(\lambda_0)J_0(t))\big)}{\varphi'(\Phi^{-1}(\alpha_0K(\lambda_0)J_0(t)))}}$$

$$=\lim_{\substack{z\to Z_0\\ z\in\Delta_{Z_0}}}\frac{\Phi^{-1}(z[1+o(1)])-\Phi^{-1}(z)}{-\dfrac{\varphi\big(\Phi^{-1}(z)\big)}{\varphi'(\Phi^{-1}(z))}}=0,$$

звідки знаходимо, що

$$\Phi^{-1}(\alpha_0K(\lambda_0)J_0(t)[1+o(1)])=Y(t)+\frac{\varphi(Y(t))}{\varphi'(Y(t))}\,o(1)\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega$$

і тому (4.6) можна записати у вигляді

$$y(t)=Y(t)+\frac{\varphi(Y(t))}{\varphi'(Y(t))}\,o(1)\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega,$$

з якого отримуємо перше з асимптотичних співвідношень (2.18). У цьому співвідношенні функція H згідно з (2.16), (2.10) і (1.3) задовольняє першу з умов (2.17), у якій знак нескінченності визначається знаком числа $\nu_0\mu_0$, і тому воно також може бути записане у вигляді

$$y(t)=Y(t)[1+o(1)]\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega.\tag{4.7}$$

Оскільки, крім того, функція $\varphi\big(\Phi^{-1}(z)\big)$ є правильно змінною порядку -1 при $z\to Z_0$, тобто допускає зображення вигляду (2.13), то з урахуванням (2.16) і теореми про рівномірну збіжність для повільно змінних функцій (див., наприклад, [12, p. 6], Ch. 1, Theorem 1.2) будемо також мати

$$\varphi(Y(t))[1+o(1)])=\varphi(Y(t))[1+o(1)]\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega.\tag{4.8}$$

Тоді, підставляючи (4.6) у праву частину рівняння (2.1), одержимо

$$y^{(4)}(t) = \alpha_0 p_0(t)\varphi(Y(t))[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{4.9}$$

Інтегруючи це асимптотичне співвідношення на проміжку від t_1 до t, з урахуванням перших з умов (2.4) і правила обрання границі інтегрування A_1 у функції $J_1(t)$ одержимо асимптотичне співвідношення

$$y'''(t) = \alpha_0 J_1(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{4.10}$$

тобто справджується друге з асимптотичних співвідношень (2.18) при $k = 3$. Звідси з урахуванням умов (2.4) і правила обрання границь інтегрування A_2 і A_3 у функціях J_2 і J_3 у такий же спосіб встановлюємо справедливість других із асимптотичних співвідношень (2.18) при $k = 2$ і $k = 1$. До того ж, з (4.8) і (4.9) маємо

$$\frac{\pi_\omega(t) y^{(4)}(t)}{y'''(t)} = \frac{\pi_\omega(t) J_1'(t)}{J_1(t)}$$

і тоді згідно з (2.5) при $k = 4$ виконується друга з умов (2.17).

Теорему 2.1 доведено.

Доведення теореми 2.2. Нехай $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ і виконуються умови (2.14) – (2.17). Доведемо, що у цьому випадку при $\alpha_0\mu_0 = -1$ диференціальне рівняння (2.1) має хоча б один розв'язок, що задовольняє при $t \uparrow \omega$ асимптотичні співвідношення (2.18), і визначимо кількість таких розв'язків.

Покладаючи

$$\begin{gathered} y(t) = Y(t)\left[1 + \frac{y_1(t)}{H(t)}\right], \\ y^{(k)}(t) = \alpha_0 J_{4-k}(t)[1 + y_{k+1}(t)], \quad k = 1, 2, 3, \end{gathered} \tag{4.11}$$

зведемо рівняння (2.1) до системи диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} y_1' &= \alpha_0 J_3(t)\, \frac{\varphi'(Y(t))}{\varphi(Y(t))}\, [1 - q(t) + h(t)q(t)y_1 + y_2], \\ y_2' &= \frac{J_3'(t)}{J_3(t)}\, (y_3 - y_2), \\ y_3' &= \frac{J_2'(t)}{J_2(t)}\, (y_4 - y_3), \\ y_4' &= \frac{J_1'(t)}{J_1(t)} \left[-1 - y_4 + (1 + r(t))\, \frac{\varphi\left(Y(t) + \dfrac{\varphi(Y(t))}{\varphi'(Y(t))} y_1\right)}{\varphi(Y(t))} \right], \end{aligned}$$

де

$$h(t) = \left. \frac{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)^2} \right|_{y=Y(t)}.$$

Цю систему рівнянь будемо розглядати на множині $\Omega = [t_1, \omega[\times D$, де $D = \Big\{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 : \ |y_i| \le \dfrac{1}{2},\ i = 1, \dots, 4)\Big\}$ і число $t_1 \in [a, \omega[$ обрано з урахуванням умов (2.16) таким чином, що

$$Y(t) + \frac{\varphi(Y(t))}{\varphi'(Y(t))} y_1 \subset \Delta_{Y_0} \quad \text{при} \quad t \in [t_1, \omega[\quad \text{і} \quad |y_1| \le \frac{1}{2}.$$

На цій множині праві частини системи неперервні і мають неперервні частинні похідні до другого порядку включно за змінними $y_i,\ i = 1, \dots, 4$. Використовуючи останній факт, уточнимо вигляд четвертого рівняння системи. Покладаючи

$$R(t, y_1) = (1 + r(t)) \left[\frac{\varphi\left(Y(t) + \dfrac{\varphi(Y(t))}{\varphi'(Y(t))}\, y_1\right)}{\varphi(Y(t))} - 1 - y_1 \right], \tag{4.12}$$

запишемо це рівняння у вигляді

$$y_4' = \frac{J_1'(t)}{J_1(t)} [r(t) + (1 + r(t)) y_1 - y_4 + R(t, y_1)] \tag{4.13}$$

і визначимо властивості нелінійного доданка R.

По-перше, зауважимо, що $R(t, 0) \equiv 0$ при $t \in [t_1, \omega[$ і

$$R'_{y_1}(t, y_1) = (1 + r(t)) \left[\frac{\varphi'\left(Y(t) + \dfrac{\varphi(Y(t))}{\varphi'(Y(t))} y_1\right)}{\varphi'(Y(t))} - 1 \right].$$

Оскільки $\varphi'(y) \in \Gamma(Y_0, Z_0)$ з доповнюючою функцією $g(y) = -\dfrac{\varphi(y)}{\varphi'(y)}$, то з урахуванням умов (2.16) згідно з лемою 1.1 маємо

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\varphi'\left(Y(t) + \dfrac{\varphi(Y(t))}{\varphi'(Y(t))} y_1\right)}{\varphi'(Y(t))} = \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \delta_{Y_0}}} \frac{\varphi'\left(y + \dfrac{\varphi(y)}{\varphi'(y)} y_1\right)}{\varphi'(y)} = e^{-y_1} \quad \forall y_1 \in \left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right].$$

Звідси з урахуванням леми 1.2 випливає, що

$$R'_{y_1}(t, y) = (1 + r(t)) \big[e^{-y_1}(1 + r_1(t, y_1)) - 1\big],$$

де $\lim_{t \uparrow \omega} r_1(t, y_1) = 0$ рівномірно при $y_1 \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$. Тому для числа $\varepsilon = 1$ існують числа $t_2 \in [t_1, \omega[$ і $\delta_0 \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right]$ такі, що

$$\left|R'_{y_1}(t, y_1)\right| \le 1 \quad \text{при} \quad t \in [t_2, \omega[\quad \text{і} \quad |y_1| \le \delta_0.$$

Отже, функція R на множині $[t_2,\omega[\,\times D_{10},\ D_{10}=\{y_1\in\mathbb{R}\colon |y_1|<|\delta_0|\}$, задовольняє оцінку зі сталою Ліпшица $L=1$. З цієї умови з урахуванням тотожності $R(t,0)\equiv 0$ безпосередньо випливає оцінка

$$|R(t,y_1)|\le |y_1| \tag{4.14}$$

на множині $[t_2,\omega[\,\times D_{10}$.

Далі, отримаємо більш важливу оцінку для функції R.

Оскільки при фіксованому t за формулою Тейлора по змінній y_1 в околі нуля з залишковим членом у формі Лагранжа

$$\varphi\biggl(Y(t)+\frac{\varphi(Y(t))}{\varphi'(Y(t))}\,y_1\biggr)=\varphi(Y(t))+\varphi(Y(t))y_1$$

$$+\frac{1}{2}\,\varphi''\biggl(Y(t)+\frac{\varphi(Y(t))}{\varphi'(Y(t))}\,\xi\biggr)\frac{\varphi^2(Y(t)}{\varphi'^2(Y(t))}\,y_1^2,$$

де $|\xi|<|y_1|$, то з (4.11) будемо мати

$$R(t,y_1)=(1+r(t))\,\frac{1}{2}\,\varphi''\biggl(Y(t)+\frac{\varphi(Y(t))}{\varphi'(Y(t))}\,\xi\biggr)\frac{\varphi(Y(t)}{\varphi'^2(Y(t))}\,y_1^2.$$

Тут згідно з (2.16) і другою з умов (1.2)

$$\varphi''\biggl(Y(t)+\frac{\varphi(Y(t))}{\varphi'(Y(t))}\,\xi\biggr)=\frac{\varphi'^2\biggl(Y(t)+\dfrac{\varphi(Y(t))}{\varphi'(Y(t))}\,\xi\biggr)}{\varphi\biggl(Y(t)+\dfrac{\varphi(Y(t))}{\varphi'(Y(t))}\xi\biggr)}\,[1+r_2(t,y_1],$$

де $\lim_{t\uparrow\omega} r_2(t,y_1)=0$ рівномірно при $y_1\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, і тому попереднє співвідношення можна записати у вигляді

$$R(t,y_1)=[1+r(t)][1+r_2(t,y_1)]\,\frac{1}{2}\,\frac{\varphi'^2\biggl(Y(t)+\dfrac{\varphi(Y(t))}{\varphi'(Y(t))}\xi\biggr)}{\varphi'^2(Y(t))}\,\frac{\varphi(Y(t))}{\varphi\biggl(Y(t)+\dfrac{\varphi(Y(t))}{\varphi'(Y(t))}\xi\biggr)}\,y_1^2.$$

Звідси з огляду на те, що функції $\varphi(y),\ \varphi'(y)$ належать до $\Gamma(Y_0,Z_0)$ з доповнюючою функцією $g(y)=-\dfrac{\varphi(y)}{\varphi'(y)}$, з використанням умов (2.16) і лем 1.1 і 1.2 будемо мати

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\varphi'\biggl(Y(t)+\dfrac{\varphi(Y(t)}{\varphi'(Y(t))}\,\xi\biggr)}{\varphi'(Y(t))}=\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}}\frac{\varphi'\biggl(y+\dfrac{\varphi(y)}{\varphi'(y)}\xi\biggr)}{\varphi'(y)}=e^{-\xi},$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\varphi\biggl(Y(t)+\dfrac{\varphi(Y(t)}{\varphi'(Y(t)}\,\xi\biggr)}{\varphi(Y(t))}=\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}}\frac{\varphi\biggl(y+\dfrac{\varphi(y)}{\varphi'(y)}\,\xi\biggr)}{\varphi(y)}=e^{-\xi}$$

рівномірно при $y_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, і тому одержимо

$$R(t, y_1) = [1 + r(t)][1 + r_2(t, y_1)]\,\frac{1}{2}\left[e^{-\xi}[1 + r_3(t, y_1)\right]y_1^2,$$

де $\lim_{t\uparrow\omega} r_3(t, y_1) = 0$ рівномірно при $y_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Оскільки $e^{-\xi} \longrightarrow 1$ при $y_1 \longrightarrow 0$, то для числа $\varepsilon = 2$ існують числа $t_3 \in [t_1, \omega[$ і $\delta_1 \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$ такі, що

$$\Big|[1 + r(t)][1 + r_2(t, y_1)]e^{-\xi}[1 + r_3(t, y_1)]\Big| \le \varepsilon = 2 \quad \text{при} \quad t \in [t_3, \omega[\quad \text{і} \quad |y_1| \le \delta_1|,$$

і тоді на множині $[t_3, \omega[\, \times D_{11}$, де $D_{11} = \{y_1 \in \mathbb{R} \colon |y_1| < \delta_1\}$, будемо мати оцінку

$$|R(t, y_1)| \le |y_1|^2. \tag{4.15}$$

Далі, покладаючи

$$t_0 = \max\{t_2, t_3\}, \qquad \delta = \min\{\delta_0, \delta_1\},$$

отриману вище систему диференціальних рівнянь будемо розглядати на множині

$$\Omega_0 = [t_0, \omega[\, \times D_0, \quad D_0 = \big\{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 \colon \ |y_i| \le \delta,\ i = 1, \dots, 4)\big\}. \tag{4.16}$$

На цій множині функція R у рівнянні (4.12) буде задовольняти умову Ліпшица за змінною y_1 зі сталою Ліпшица $L = 1$ і оцінки (4.13), (4.14).

Покладемо

$$\xi_1(t) = \frac{\alpha_0 \pi_\omega(t) J_3(t)}{Y(t)}, \qquad \xi_{k+1}(t) = \frac{\pi_\omega(t) J'_{4-k}(t)}{J_{4-k}(t)}, \quad k = 1, 2, 3, \tag{4.17}$$

і запишемо отриману вище систему диференціальних рівнянь у вигляді

$$\begin{aligned}
y_1' &= \frac{H(t)}{\pi_\omega(t)}\big\{\xi_1(t)[(1 - q(t)) + h(t)q(t)y_1 + y_2]\big\}, \\
y_2' &= \frac{1}{\pi_\omega(t)}[\xi_2(t)(y_3 - y_2)], \\
y_3' &= \frac{1}{\pi_\omega(t)}[\xi_3(t)(y_4 - y_3)], \\
y_4' &= \frac{1}{\pi_\omega(t)}\big\{\xi_4(t)[r(t) + (1 + r(t))y_1 - y_4 + R(t, y_1)]\big\}.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Тут згідно з другою з умов (2.17) і лемою 3.1

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\uparrow\omega} \xi_1(t) = \frac{3\lambda_0 - 2}{\lambda_0 - 1}, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \xi_2(t) = \frac{2\lambda_0 - 1}{\lambda_0 - 1}, \\
&\lim_{t\uparrow\omega} \xi_3(t) = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \xi_4(t) = \frac{1}{\lambda_0 - 1}.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

З метою вирівнювання множників, що стоять перед квадратними дужками у рівняннях системи, застосуємо до неї перетворення

$$y_1 = x_1, \qquad y_2 = |H(t)|^{-\frac{3}{4}} x_2, \qquad y_3 = |H(t)|^{-\frac{1}{2}} x_3, \qquad y_4 = |H(t)|^{-\frac{1}{4}} x_4. \tag{4.20}$$

У результаті отримаємо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned}
x_1' &= \frac{|H(t)|^{\frac{1}{4}} \operatorname{sign} H(t)}{\pi_\omega(t)} \Big\{ \xi_1(t) \Big[(1-q(t))|H(t)|^{\frac{3}{4}} + h(t)q(t)|H(t)|^{\frac{3}{4}} x_1 + x_2 \Big] \Big\}, \\
x_2' &= \frac{|H(t)|^{\frac{1}{4}}}{\pi_\omega(t)} \left\{ \xi_2(t) x_3 + \left[\frac{3}{4} \frac{\pi_\omega(t) H'(t)}{H(t)} |H(t)|^{-\frac{1}{4}} - \xi_2(t)|H(t)|^{-\frac{1}{4}} \right] x_2 \right\}, \\
x_3' &= \frac{|H(t)|^{\frac{1}{4}}}{\pi_\omega(t)} \left\{ \xi_3(t) x_4 + \left[\frac{1}{2} \frac{\pi_\omega(t) H'(t)}{H(t)} |H(t)|^{-\frac{1}{4}} - \xi_3(t)|H(t)|^{-\frac{1}{4}} \right] x_3 \right\}, \\
x_4' &= \frac{|H(t)|^{\frac{1}{4}}}{\pi_\omega(t)} \Bigg\{ \xi_4(t)[r(t) + (1+r(t))x_1 + R(t,x_1)] \\
&\qquad + \left[\frac{1}{4} \frac{\pi_\omega(t) H'(t)}{H(t)} |H(t)|^{-\frac{1}{4}} - \xi_4(t)|H(t)|^{-\frac{1}{4}} \right] x_4 \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Враховуючи, що $\operatorname{sign} H(t) = \nu_0\mu_0$, перепишемо цю систему у вигляді

$$\begin{aligned}
x_i' &= \frac{|H(t)|^{\frac{1}{4}}}{\pi_\omega(t)} \left[f_i(t) + \sum_{k=1}^{4} c_{ik}(t) x_k \right], \quad i = 1,2,3, \\
x_4' &= \frac{|H(t)|^{\frac{1}{4}}}{\pi_\omega(t)} \left[f_4(t) + \sum_{k=1}^{4} c_{4k}(t) x_k + R(t,x_1) \right],
\end{aligned} \tag{4.22}$$

де

$$f_1(t) = \nu_0\mu_0 \xi_1(t)(1-q(t))|H|^{\frac{3}{4}}(t), \qquad f_i(t) \equiv 0, \quad i = 2,3, \qquad f_4(t) = \xi_4(t) r(t),$$

$$c_{11}(t) = \nu_0\mu_0 \xi_1(t) q(t) h(t) |H|^{\frac{3}{4}}(t), \qquad c_{12}(t) = \nu_0\mu_0 \xi_1(t), \qquad c_{1k}(t) \equiv 0, \quad k = 3,4,$$

$$c_{21}(t) \equiv 0, \quad c_{22}(t) = \frac{3}{4} \frac{\pi_\omega(t) H'(t)}{H(t)} |H(t)|^{-\frac{1}{4}} - \xi_2(t)|H(t)|^{-\frac{1}{4}}, \quad c_{23}(t) = \xi_2(t), \quad c_{24}(t) \equiv 0,$$

$$c_{3k}(t) \equiv 0, \quad k = 1,2, \qquad c_{33}(t) = \frac{1}{2} \frac{\pi_\omega(t) H'(t)}{H(t)} |H(t)|^{-\frac{1}{4}} - \xi_3(t)|H(t)|^{-\frac{1}{4}}, \qquad c_{34}(t) = \xi_3(t),$$

$$c_{41}(t) = \xi_4(t)(1+r(t)), \qquad c_{4k}(t) \equiv 0, \quad k = 2,3,$$

$$c_{44}(t) = \frac{1}{4} \frac{\pi_\omega(t) H'(t)}{H(t)} |H(t)|^{-\frac{1}{4}} - \xi_4(t)|H(t)|^{-\frac{1}{4}}.$$

Тут

$$\frac{\pi_\omega(t)H'(t)}{H(t)} = \frac{\pi_\omega(t)Y'(t)}{Y(t)}\left[1 + \frac{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}} Y(t)\right] = \frac{\pi_\omega(t)H'(t)}{H(t)}$$

$$= \frac{\pi_\omega(t)Y'(t)}{Y(t)}[1 + h(t)H(t)] = q(t)\xi_1(t)[1 + h(t)H(t)]. \tag{4.23}$$

Гранична матриця коефіцієнтів при $x_1, \ldots, x_4$, що стоять у квадратних дужках цієї системи, має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3\lambda_0 - 2}{\lambda_0 - 1}(\nu_0\mu_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\lambda_0 - 1}{\lambda_0 - 1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} \\ \frac{1}{\lambda_0 - 1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.24}$$

Її характеристичним рівнянням є рівняння

$$\lambda^4 = \nu_0\mu_0 \, \frac{3\lambda_0 - 2}{\lambda_0 - 1} \, \frac{2\lambda_0 - 1}{\lambda_0 - 1} \, \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} \, \frac{1}{\lambda_0 - 1}$$

або з урахуванням (2.14)

$$\lambda^4 = \alpha_0\mu_0 \frac{|3\lambda_0 - 2||2\lambda_0 - 1||\lambda_0|}{(\lambda_0 - 1)^4}. \tag{4.25}$$

У випадку, коли $\alpha_0\mu_0 = -1$, рівняння (4.24) має корені

$$\lambda_{k+1} = \frac{\sqrt[4]{|3\lambda_0 - 2||2\lambda_0 - 1||\lambda_0|}}{|\lambda_0 - 1|} \, e^{i\frac{\pi + 2\pi k}{4}}, \quad k = \overline{0, 3},$$

тобто

$$\begin{aligned} \lambda_{1,4} &= \frac{\sqrt[4]{|3\lambda_0 - 2||2\lambda_0 - 1||\lambda_0|}}{|\lambda_0 - 1|} \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i), \\ \lambda_{2,3} &= \frac{\sqrt[4]{|3\lambda_0 - 2||2\lambda_0 - 1||\lambda_0|}}{|\lambda_0 - 1|} \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 \pm i). \end{aligned} \tag{4.26}$$

Тут два корені з додатною дійсною частиною і два — з від'ємною (коренів із нульовою дійсною частиною не існує), і тому свідомо існують два корені, дійсні частини яких мають знак, протилежний знаку функції $\pi_\omega(t)$. Крім того, маємо

$$\int_a^\omega \frac{|H(t)|^{\frac{1}{4}}}{\pi_\omega(t)} \, dt = \pm\infty \qquad \text{і} \qquad \lim_{x_1 \to 0} \frac{\xi_4(t)R(t, x_1)}{x_1} = 0 \quad \text{рівномірно при } \ t \in [t_0, \omega]. \tag{4.27}$$

Таким чином, для системи диференціальних рівнянь (4.21) виконано всі умови теореми 2.2 з роботи [15]. На підставі цієї теореми система (4.21) має двопараметричну сім'ю розв'язків $(x_i)_{i=1}^4 : [t^0, \omega[\longrightarrow \mathbf{R^4}$, $t^0 \in [t_0, \omega]$, що прямують до нуля при $t \uparrow \omega$. Кожному такому розв'язку системи згідно з перетвореннями (4.10) і (4.19) відповідає розв'язок $y : [t^0, \omega[$ диференціального рівняння (2.1), що задовольняє при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (2.20). Враховуючи умови теореми, неважко також переконатись у тому, що кожний із цих розв'язків є $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язком рівняння (2.1).

Теорему 2.2 доведено.

Доведення теореми 2.3. Нехай $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right\}$, $p_0 : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ — неперервно диференційовна функція і виконуються умови (2.15) – (2.17). Нехай, до того ж, разом із першим граничним співвідношенням (2.19) виконується граничне співвідношення (2.21). Покажемо, що в цьому випадку при $\alpha_0\mu_0 = -1$ диференціальне рівняння (2.1) має хоча б один розв'язок, який задовольняє при $t \uparrow \omega$ асимптотичні співвідношення (2.22), і визначимо кількість таких розв'язків.

Спочатку у такий же спосіб, як і при доведенні теореми 2.1, диференціальне рівняння (2.1) за допомогою замін (4.10) зводимо до системи диференціальних рівнянь (4.17), у якій функції ξ_i, $i = 2, 3, 4$, визначаються з формул (4.16) і задовольняють умови (4.18), а функція $R(t, y_1)$ задовольняє нерівність (4.14).

Далі, на відміну від доведення теореми 2.2 в системі (4.17) зробимо допоміжне перетворення

$$y_1 = v_1, \quad y_k = q(t) - 1 + v_k, \quad k = 2, 3, 4, \tag{4.28}$$

яке полягає у тому, щоб вилучити доданки, які містять різницю $1 - q(t)$ у неоднорідних членах у перших трьох рівняннях системи.

У результаті цього перетворення отримуємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{H(t)}{\pi_\omega(t)}(h(t)q(t)v_1 + v_2), \\ v_k' &= \frac{1}{\pi_\omega(t)}\big[-q'(t)\pi_\omega(t) + \xi_k(t)(v_{k+1} - v_k)\big], \quad k = 2, 3, \\ v_4' &= \frac{1}{\pi_\omega(t)}\big[-q'(t)\pi_\omega(t) + \xi_4(t)(r(t) + 1 - q(t) + (1 + r(t))v_1 - v_4 + R(t, v_1))\big]. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Зрештою, застосовуючи до системи (4.28) перетворення

$$v_1 = x_1, \qquad v_2 = |H(t)|^{-\frac{3}{4}}x_2, \qquad v_3 = |H(t)|^{-\frac{1}{2}}x_3, \qquad v_4 = |H(t)|^{-\frac{1}{4}}x_4, \tag{4.30}$$

одержуємо систему диференціальних рівнянь (4.21), у якій на відміну від системи цього вигляду з доведення теореми 2.2 маємо

$$f_1(t) \equiv 0, \qquad f_2(t) = -q'(t)\pi_\omega(t)|H(t)|^{\frac{1}{2}},$$

$$f_3(t) = -q'(t)\pi_\omega(t)|H(t)|^{\frac{1}{4}}, \qquad f_4(t) = -q'(t)\pi_\omega(t) + \xi_4(t)[r(t) + 1 - q(t)],$$

$$c_{11}(t) = \nu_0\mu_0\xi_1(t)q(t)h(t)|H|^{\frac{3}{4}}(t), \qquad c_{12}(t) = \nu_0\mu_0\xi_1(t), \qquad c_{1k}(t) \equiv 0, \quad k = 3, 4,$$

$$c_{21}(t)=0,\qquad c_{22}(t)=\frac{3}{4}\,\frac{\pi_\omega(t)H'(t)}{H(t)}\frac{1}{|H(t)|^{\frac14}}-\frac{\xi_2(t)}{|H(t)|^{\frac14}},$$

$$c_{23}(t)=\xi_2(t),\qquad c_{24}(t)=0,$$

$$c_{31}(t)=0,\qquad c_{32}(t)=0,$$

$$c_{33}(t)=\frac{1}{2}\,\frac{\pi_\omega(t)H'(t)}{H(t)}\,\frac{1}{|H(t)|^{\frac14}}-\frac{\xi_3(t)}{|H(t)|^{\frac14}},\qquad c_{34}(t)=\xi_3(t),$$

$$c_{41}(t)=\xi_4(t)[1+r(t)],\quad c_{4k}(t)=0,\quad k=2,3,$$

$$c_{44}(t)=\frac{1}{4}\,\frac{\pi_\omega(t)H'(t)}{H(t)}\frac{1}{|H(t)|^{\frac14}}-\frac{\xi_4(t)}{|H(t)|^{\frac14}}.$$

У цій системі згідно з умовами (2.2), (2.19), (2.21) і (4.18)

$$\lim_{t\uparrow\omega} f_i(t)=0,\quad i=1,\ldots,4,$$

і гранична матриця коефіцієнтів при $x_1,\ldots,x_4$, що стоять у квадратних дужках цієї системи, має вигляд (4.23). Характеристичне рівняння матриці (4.23) з урахуванням нерівностей (2.14) запишемо у вигляді (4.24). При $\alpha_0\mu_0=-1$ це рівняння має корені (4.25). Крім того, виконуються умови (4.26). Тому у такий спосіб, як і при доведенні теореми 2.2, встановлюємо із застосуванням теореми 2.2 з [15], що система рівнянь (4.21) отриманого вигляду має двопараметричну сім'ю розв'язків $(x_i)_{i=1}^4 : [t^0,\omega[\longrightarrow \mathbf{R^4},\ t^0\in[t_0,\omega]$, які прямують до нуля при $t\uparrow\omega$. Кожному такому розв'язку цієї системи згідно з перетвореннями (4.10), (4.27) і (4.29) відповідає розв'язок $y:[t^0,\omega[$ диференціального рівняння (2.1), що задовольняє при $t\uparrow\omega$ асимптотичні зображення (2.22). Враховуючи умови теореми, переконуємося також у тому, що кожний із цих розв'язків є $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язком рівняння (2.1).

Теорему 2.3 доведено.

Зауваження 4.1. Проблема про фактичне існування у диференціального рівняння (2.1) $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язків, що допускають при $t\uparrow\omega$ асимптотичні зображення (2.18) у випадку, коли $\alpha_0\mu_0=1$, поки що не розв'язана.

Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів. Усі необхідні дані містяться в статті. Всі автори зробили рівномірний внесок у цю роботу, а також заявляють про відсутність спеціального фінансування для її виконання.

Література

1. В. М. Евтухов, А. Г. Черникова, *Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющимися нелинейностями*, Укр. мат. журн., **69**, № 10, 1345 – 1363 (2017).
2. В. М. Евтухов, А. Г. Черникова, *Об асимптотике решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющимися нелинейностями*, Укр. мат. журн., **71**, № 1, 73 – 91 (2019).
3. А. Г. Чернікова, *Асимптотична поведінка розв'язків звичайних диференціальних рівнянь зі швидко змінними нелінійностями*, дис. . . . канд. фіз.-мат. наук, Одеса (2020).
4. V. M. Evtukhov, N. G. Drik, *Asymptotic behavior of solutions of a second order nonlinear differential equation*, Georgian Math. J., **3**, № 2, 101 – 120 (1996).

5. Н. Г. Дрик, *Асимптотическое поведение решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка*, дис. . . . канд. физ.-мат. наук, Одесса (1992).
6. В. М. Евтухов, В. Н. Шинкаренко, *Асимптотические представления решений двучленных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с экспоненциальной нелинейностью*, Дифференц. уравнения, **44**, № 3, 308 – 322 (2008).
7. В. Н. Шинкаренко, *Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений n-го порядка с экспоненциальной нелинейностью*, дис. . . . канд. фіз.-мат. наук, Одесса (2005).
8. В. М. Евтухов, В. М. Харьков, *Асимптотические представления решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка*, Дифференц. уравнения, **43**, № 9, 1311 – 1323 (2007).
9. В. М. Харьков, *Асимптотические представления решений существенно нелинейных дифференциальных и разностных уравнений второго порядка*, дис. . . . канд. фіз.-мат. наук, Одесса (2009).
10. V. Maric, *Regular variation and differential equations*, Lecture Notes in Math., **1726** (2000).
11. В. М. Евтухов, *Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений*, дис. . . . д-ра физ.-мат. наук, Киев (1997).
12. N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels, *Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications*, Cambridge University Press, Cambridge (1987).
13. V. M. Evtukhov, N. V. Sharay, *Asymptotic behaviour of solutions of third order differential equation with rapidly varying nonlinearities*, Mem. Differ. Equat. Math. Phys., **77**, 1 – 15 (2019).
14. В. М. Євтухов, Н. В. Шарай, *Асимптотика швидко змінних розв'язків диференціальних рівнянь третього порядку зі швидко змінною нелінійністю*, Укр. мат. журн., **74**, № 6, 812 – 828 (2022).
15. В. М. Євтухов, А. М. Самойленко, *Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений*, Укр. мат. журн., **62**, № 1, 52 – 80 (2010).

Одержано 22.07.24