

## МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦІЇ АДОМЯНА В ТЕОРІЇ АВТОНОМНИХ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ІЗ ПЕРЕМІКАННЯМИ У НЕФІКСОВАНІ МОМЕНТИ ЧАСУ

**Сергій Чуйко**

*Max Planck Institute for Dynamics of Complex Technical Systems  
Magdeburg, Germany*

*Донбаський державний педагогічний університет  
Слов'янськ, 84112, Донецька обл., Україна*

*Інститут прикладної математики і механіки НАН України  
вул. Добровольського, 1, Слов'янськ, 84100, Україна  
e-mails: chuiko@mpi-magdeburg.mpg.de, chujko-slav@ukr.net,  
відповідальний за листування*

**Євген Сілін**

*Донбаський державний педагогічний університет  
Слов'янськ, 84112, Донецька обл., Україна  
e-mail: silin-evgen@meta.ua*

**Катерина Шевцова**

*Інститут прикладної математики і механіки НАН України  
вул. Добровольського, 1, Слов'янськ, 84100, Україна  
e-mail: shevtsova19931993@gmail.com*

We prove the existence of a solution of a nonlinear boundary-value problem for an ordinary differential equation with switchings at not fixed instants of time and construct an iterative scheme for finding the solution of this problem by using the Adomian decomposition method.

Доведено існування розв'язку нелінійної крайової задачі для звичайного диференціального рівняння з перемиканнями у нефіксовані моменти часу та побудовано ітераційну схему для знаходження розв'язку цієї задачі з використанням методу декомпозиції Адомяна.

**1. Постановка задачі.** Досліджуємо задачу про побудову розв'язків [1, 2]

$$z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1\{[a, b] \setminus \{\tau(\varepsilon)\}_I\}, \quad z(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

автономної крайової задачі для рівняння

$$z'(t, \varepsilon) = A z(t, \varepsilon) + \varepsilon Z(z(t, \varepsilon), \varepsilon), \quad \ell z(\cdot, \varepsilon) = 0, \quad (1)$$

неперервних у точці  $t = \tau(\varepsilon)$ . У точці  $t = \tau(\varepsilon)$ :  $a < \tau(\varepsilon) < b$ ,  $\tau(0) := \tau_0$  розв'язок крайової

задачі (1), можливо, знає обмеженого розриву першої похідної [1, 2]. Цей розв'язок шукаємо у малому околі розв'язку

$$z_0(t) \in \mathbb{C}^1 \{[a, b] \setminus \{\tau_0\}_I\}$$

породжуючої крайової задачі

$$z'_0(t) = A z_0(t), \quad \ell z_0(\cdot) = 0. \quad (2)$$

У точці  $t = \tau_0$  розв'язок крайової задачі (2), можливо, знає обмеженого розриву похідної. Тут  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — стала матриця,  $Z(z, \varepsilon)$  — нелінійна вектор-функція, кусково аналітична за невідомою  $z$  у малому околі розв'язку породжуючої задачі (2) та кусково аналітична за малим параметром  $\varepsilon$  на відрізку  $[0, \varepsilon_0]$ . Крім того,

$$\mathcal{L}z(\cdot, \varepsilon) := \begin{pmatrix} \ell z(\cdot, \varepsilon) \\ z(\tau(\varepsilon) + 0, \varepsilon) - z(\tau(\varepsilon) - 0, \varepsilon) \end{pmatrix} = 0$$

і

$$\mathcal{L}z_0(\cdot) := \begin{pmatrix} \ell z_0(\cdot, \varepsilon) \\ z_0(\tau_0 + 0) - z_0(\tau_0 - 0) \end{pmatrix} = 0$$

— лінійні обмежені векторні функціонали.

Поставлена автономна крайова задача (1) із перемиканнями продовжує дослідження нетерових крайових задач, зокрема крайових задач із перемиканнями у фіксовані моменти часу [3], а також із імпульсним збуренням у фіксовані моменти часу [1, 2, 4–8], а також дослідження нелінійних автономних крайових задач [1, 9, 10]. Як відомо [9, 10], автономна крайова задача для системи (1) суттєво відрізняється від аналогічних неавтономних крайових задач; на відміну від останніх, правий кінець  $T(\varepsilon)$  проміжку  $[0, T(\varepsilon)]$ , на якому визначено шуканий розв'язок нелінійної крайової задачі для системи (1) без перемикань, невідомий і підлягає визначенню в процесі побудови розв'язку. У статті [3] досліджено автономну нелінійну крайову задачу з перемиканнями у фіксовані моменти часу, розв'язку на проміжку фіксованої довжини. Таким чином, метою цієї статті є дослідження автономної нелінійної крайової задачі (1) із перемиканнями у не фіксовані моменти часу на проміжку фіксованої довжини. Приклад доцільності дослідження такої задачі буде наведено далі.

У статті [3] поставлено автономну нелінійну крайову задачу з перемиканнями у фіксовані моменти часу, визначену на проміжку фіксованої довжини, та отримано умови, за яких ця задача не має розв'язків окрім положень рівноваги. Водночас залучення перемикань у фіксовані моменти часу дозволяє отримати розв'язки, відмінні від положень рівноваги [3]. З іншого боку, залучення перемикань у фіксовані моменти часу, взагалі кажучи, позбавляє автономну нелінійну крайову задачу з перемиканнями у фіксовані моменти часу, визначену на проміжку фіксованої довжини, неперервних розв'язків.

**Приклад 1.** Продемонструємо той факт, що залучення перемикання у фіксований момент часу  $\theta$ , взагалі кажучи, позбавляє автономну нелінійну крайову задачу з перемиканнями у фіксовані моменти часу

$$\begin{aligned} w''(t, \varepsilon) + \omega^2(\varepsilon) w(t, \varepsilon) &= \varepsilon W(w(t, \varepsilon), w'(t, \varepsilon), \varepsilon), \\ w(0, \varepsilon) - w(2\pi, \varepsilon) &= 0, \quad w(\theta, \varepsilon) - w(\theta, \varepsilon) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

визначену на проміжку фіксованої довжини  $[0, 2\pi]$ , неперервних розв'язків

$$w(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^2\{[0, 2\pi] \setminus \{\theta\}_I\}, \quad w(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

у вигляді положень рівноваги. Тут

$$w(t, \varepsilon) := \begin{cases} x(t, \varepsilon), & t \in [0, \theta[, \\ y(t, \varepsilon), & t \in [\theta, 2\pi], \end{cases} \quad \omega(\varepsilon) := \begin{cases} 1 - \varepsilon, & t \in [0, \theta[, \\ 1 + \varepsilon, & t \in [\theta, 2\pi]. \end{cases}$$

Крім того,

$$W(w(t, \varepsilon), w'(t, \varepsilon), \varepsilon) := \begin{cases} (1 + x(t, \varepsilon)) e^{-\frac{\varepsilon}{1+x'(t, \varepsilon)}}, & t \in [0, \theta[, \\ (1 + y(t, \varepsilon)) e^{-\frac{\varepsilon}{1+y'(t, \varepsilon)}}, & t \in [\theta, 2\pi]. \end{cases}$$

Поведінка розв'язків рівняння (3) із перемиканнями у нефіксовані моменти часу добре відображає поведінку дослідженого у статтях [3, 11] періодичного розв'язку рівняння, яке моделює неізотермічну хімічну реакцію. Положення рівноваги  $w(t, \varepsilon) := w(\varepsilon)$  автономної нелінійної крайової задачі визначає рівняння

$$\omega^2(\varepsilon) w(t, \varepsilon) - \varepsilon W(w(t, \varepsilon), \varepsilon) = 0,$$

розв'язки якого

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon - \varepsilon^2 - \frac{\varepsilon^2}{2} + \dots, \quad t \in [0, \theta[,$$

$$y(t, \varepsilon) = \varepsilon + \varepsilon^2 + \frac{2\varepsilon^2}{2} + \dots, \quad t \in [\theta, 2\pi],$$

знають розриву в точці  $t = \theta$ . Подібні розривні розв'язки застосовують при побудові неперервних розв'язків автономних крайових задач із перемиканнями вигляду (1) як проміжні [12].

**2. Умови розв'язності крайової задачі з перемиканнями у нефіксовані моменти часу.** Позначимо матрицю

$$Q := \mathcal{L}X(\cdot) := \begin{pmatrix} \ell_0 X(\cdot) & \ell_1 X(\cdot) \\ X(\tau_0) & -X(\tau_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n},$$

де

$$X(t) : X'(t) = A X(t), \quad X(0) = I_n$$

— нормальна фундаментальна матриця породжуючої крайової задачі (2),

$$\ell_0 X(\cdot) : \mathbb{C}[a, \tau_0] \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \ell_1 X(\cdot) : \mathbb{C}[\tau_0, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$$

— функціонали, які так само утворюють функціонал

$$\ell X(\cdot) := \ell_0 X(\cdot) + \ell_1 X(\cdot) : \mathbb{C}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Позначимо через  $f(t)$  лінійну неперервну на відрізку  $[a, b]$  вектор-функцію. Розв'язок

$$w(t) = K[f(s); \theta](t) := \int_a^t X(t)X^{-1}(s) f(s) ds, \quad t \in [a, \theta],$$

$$w(t) = K[f(s); \theta](t) := \int_b^t X(t)X^{-1}(s) f(s) ds, \quad t \in [\theta, b],$$

задачі Коші для системи

$$w'(t) = A w(t) + f(t) \quad (4)$$

у критичному випадку  $[1, 2, 5, 6]$   $P_{Q_d^*} \neq 0$  задовольняє крайову умову

$$\mathcal{L}w(\cdot) := \begin{pmatrix} \ell_0 w(\cdot) + \ell_1 w(\cdot) \\ w(\theta + 0) - w(\theta - 0) \end{pmatrix} = 0$$

у випадку

$$P_{Q_d^*} \mathcal{L}[f(s); \theta](\cdot) = 0, \quad \theta \in [0, T],$$

для довільного фіксованого моменту  $\theta \in [a, b]$  перемикання;  $P_{Q_d^*}$  — матриця, утворена з  $d$  лінійно незалежних рядків матриці-ортопроектора

$$P_{Q^*}: \mathbb{R}^{(m+n) \times 2n} \rightarrow \mathbb{N}(Q^*).$$

Автономна крайова задача для системи (1) із перемиканнями у не фіксовані моменти часу на проміжку фіксованої довжини суттєво відрізняється від аналогічних крайових задач із перемиканнями у фіксовані моменти часу [3]. Для демонстрації цього розглянемо такий приклад.

**Приклад 2.** Розглянемо задачу про знаходження розв'язку

$$w(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1\{[0, T] \setminus \{\theta(\varepsilon)\}_I\}, \quad w(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

крайової задачі

$$w'(t, \varepsilon) = \omega^2(\varepsilon) A w(t, \varepsilon) + f(t), \quad \ell z(\cdot, \varepsilon) = 0, \quad (5)$$

неперервного у точці  $t = \theta(\varepsilon)$ . Розв'язок крайової задачі (5) шукаємо у малому околі розв'язку

$$w_0(t) \in \mathbb{C}\{[0, T] \setminus \{\theta_0\}_I\}, \quad \theta_0 := \theta(0), \quad \omega_0 := \omega(0),$$

породжуючої крайової задачі

$$w'_0(t) = \omega_0^2 A w_0(t) + f(t), \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \ell z_0(\cdot) = 0. \quad (6)$$

Позначимо

$$U(t): U'(t) = A U(t), \quad U(0) = I_n$$

нормальну фундаментальну матрицю породжуючої крайової задачі (6), а також матрицю

$$Q := \mathcal{L}X(\cdot) := \begin{pmatrix} U(0) & -U(T) \\ U(\theta_0) & -U(\theta_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}.$$

Для породжуючої крайової задачі (6) буває критичний випадок [1, 2, 5, 6]  $P_{Q_d^*} \neq 0$ . Матриця  $P_{Q_d^*}$  утворена з  $d$  лінійно незалежних рядків матриці-ортопроектора  $P_{Q^*} : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{N}(Q^*)$ . У частинному випадку

$$\ell z(\cdot, \varepsilon) := z(0, \varepsilon) - z(T, \varepsilon), \quad a := 0, \quad b := T.$$

За умови

$$\int_0^T H_r^*(s) f(s) ds = 0$$

породжуюча задача (6) має  $r$ -параметричну сім'ю неперервних  $T$ -періодичних розв'язків

$$w_0(t, c_0) = U_r(t) c_0 + G[f(s); \theta_0](t), \quad c_0 \in \mathbb{R}^r;$$

тут

$$G[f(s); \theta_0](t) = K[f(s); \theta_0](t) - X(t) Q_0^+ \ell K[f(s); \theta_0](\cdot)$$

— оператор Гріна породжуючої  $T$ -періодичної задачі (6) і  $H_r(t)$  —  $(n \times r)$ -вимірна матриця, утворена з  $r$  лінійно незалежних  $T$ -періодичних розв'язків системи, спряженої [13, 14] до породжуючої  $T$ -періодичної задачі (6);  $U_r(t) := U(t) P_{Q_r}$ . Матриця  $P_{Q_r}$  утворена з  $r$  лінійно незалежних стовпців матриці-ортопроектора

$$P_{Q_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}(Q_0), \quad Q_0 := \ell X(\cdot).$$

Крім того,  $Q_0^+$  — псевдообернена матриця за Муром–Пенроузом [1, 14]. Розв'язок нелінійної періодичної крайової задачі (5) із перемиканнями шукаємо у вигляді

$$w(t, \varepsilon) := w_0(t, c_0^*) + u_1(t, \varepsilon) + \dots + u_k(t, \varepsilon) + \dots,$$

$$\theta(\varepsilon) = \theta_0 + \xi_1(\varepsilon) + \xi_2(\varepsilon) + \dots + \xi_k(\varepsilon) + \dots$$

Перше наближення до розв'язку нелінійної періодичної крайової задачі (5) із перемиканнями у критичному випадку

$$w_1(t, \varepsilon) = w_0(t, c_0) + v_1(t, \varepsilon), \quad \theta_1(\varepsilon) = \theta_0 + \xi_1(\varepsilon),$$

$$w_1(t, \varepsilon) = U(t) c_1(\varepsilon) + G[(\omega^2(\varepsilon) - \omega_0^2) w_0(s, c_0)](t)$$

визначає розв'язок нелінійної періодичної крайової задачі першого наближення

$$w_1'(t, \varepsilon) = (\omega^2(\varepsilon) - \omega_0^2) w_0(t, c_0), \quad \ell w_1(\cdot, \varepsilon) = 0.$$

Умова розв'язності періодичної крайової задачі першого наближення

$$P_{Q_r^*} \ell K [(\omega^2(\varepsilon) - \omega_0^2) w_0(s, c_0); \theta(\varepsilon)](\cdot) = 0$$

приводить до рівняння

$$F_0(c_0, \theta_0) := P_{Q_r^*} \ell K [\omega_0^2 w_0(s, c_0); \theta_0](\cdot) = 0. \quad (7)$$

Рівняння (7) будемо далі називати рівнянням для породжуючих констант нелінійної періодичної крайової задачі (5) із перемиканнями у критичному випадку. Розв'язність рівняння (7) є необхідною умовою існування розв'язку періодичної крайової задачі (5) із перемиканнями. Функція  $\theta(\varepsilon)$  є власною функцією [15, 16] нелінійної періодичної крайової задачі (5) із перемиканнями у критичному випадку, яка забезпечує розв'язність цієї задачі. Рівняння (7), взагалі кажучи, нелінійне, не зважаючи на те, що періодична крайова задача (5) із перемиканнями у не фіксовані моменти часу на проміжку фіксованої довжини лінійна.

Припустимо, що рівняння для породжуючих констант (7) має дійсні корені. Фіксуємо один із дійсних розв'язків  $c_0^* \in \mathbb{R}^n$ ,  $\theta_0^* \in \mathbb{R}$  рівняння (7), приходимо до задачі про побудову розв'язку періодичної крайової задачі (5) із перемиканнями у малому околі розв'язку

$$w_0(t, c_0^*) = U_r(t) c_0^* + G[f(s); \theta_0^*](t)$$

породжуючої  $T$ -періодичної задачі (6). Традиційною умовою розв'язності крайової задачі (5) із перемиканнями у малому околі розв'язку породжуючої задачі є вимога [1, 14]

$$P_{B_0^*} P_{Q_r^*} = 0, \quad B_0 := F'_{c_0}(c_0^*, \theta_0^*) \in \mathbb{R}^{r \times (r+1)}, \quad \check{c}_0 := (c_0 \quad \theta_0)^*,$$

де  $P_{B_0^*} : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{N}(B_0^*)$  — матриця-ортопроектор [1, 14]. Дійсно, взагалі кажучи, нелінійне рівняння для породжуючих констант (7) для лінійної періодичної крайової задачі (5) із перемиканнями рівнозначне рівнянню

$$B_0 \check{c}_0 = P_{Q_r^*} \ell K \{ \omega_0^2 G[f(s); \theta](t) \}(\cdot),$$

розв'язному за умови  $P_{B_0^*} P_{Q_r^*} = 0$ .

Покладемо для визначеності

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 5t \end{pmatrix}, \quad \omega(\varepsilon) := \begin{cases} 1 + \varepsilon, & t \in [0, \theta(\varepsilon)[, \\ 1 - \varepsilon, & t \in [\theta(\varepsilon), T]. \end{cases}$$

Породжуюча  $T$ -періодична задача (6) при цьому має сім'ю розв'язків

$$w_0(t, c_0) = U_r(t) c_0 + K[f(s); \theta_0](t), \quad c_0 \in \mathbb{R}^2,$$

де

$$U(t) = U_r(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

До того ж

$$K[f(s); \theta_0](t) = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} \cos t - \cos 5t \\ -\sin t + 5 \sin 5t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Покладемо

$$\theta_0^* := \frac{\pi}{2}, \quad c_0 := (c_{0a} \quad c_{0b})^*.$$

Рівняння для породжуючих констант (7) періодичної крайової задачі (5) із перемиканнями

$$F_0(c_0, \theta_0) = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 3\pi(1 + 24c_{0a}) \\ 72\pi c_{0b} - 4 \end{pmatrix} = 0$$

має дійсний розв'язок

$$c_{0a}^* = -\frac{1}{24}, \quad c_{0b}^* = \frac{1}{18\pi}, \quad \theta_0^* = \frac{\pi}{2},$$

для якого

$$B_0 = \frac{1}{18\pi} \begin{pmatrix} 36\pi^2 & 0 & 15\pi \\ 0 & 36\pi^2 & -4 \end{pmatrix}$$

— матриця повного рангу. Для побудови розв'язків автономної періодичної крайової задачі (7) із перемиканнями застосовний метод простих ітерацій [1, 14]. Застосовуючи метод простих ітерацій, на першому кроці отримуємо

$$w_1(t, \varepsilon) := w_0(t, c_0^*) + u_1(t, \varepsilon), \quad \theta_1(\varepsilon) = \theta_0^* + \xi_1(\varepsilon), \quad \xi_1(\varepsilon) = \varepsilon \theta_0^*,$$

де

$$u_1(t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{144\pi} \begin{pmatrix} -7\pi \cos t + 16t \cos t - 13\pi \cos 5t + 16 \sin t \\ 16 \cos t + 7\pi \sin t - 16t \sin t + 5\pi \sin 5t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \theta_1(\varepsilon)],$$

$$u_1(t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{144\pi} \begin{pmatrix} -\pi \cos t - 16t \cos t + 13\pi \cos 5t + 16 \sin t \\ 6 \cos t + \pi \sin t + 16t \sin t - 5\pi \sin 5t \end{pmatrix}, \quad t \in [\theta_1(\varepsilon), 2\pi].$$

На другому кроці маємо

$$w_2(t, \varepsilon) := w_0(t, c_0^*) + u_1(t, \varepsilon) + u_2(t, \varepsilon), \quad \theta_2(\varepsilon) = \theta_0^* + \xi_1(\varepsilon) + \xi_2(\varepsilon), \quad \xi_2(\varepsilon) = \varepsilon^2 \theta_0^*,$$

де

$$u_2(t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2592\pi} \begin{pmatrix} -1305\pi \cos t + 720t \cos t - 144\pi \cos 5t + 688 \sin t \\ 688 \cos t - 993\pi^2 \cos t + 252\pi t \cos t - 288t^2 \cos t \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{2592\pi} \begin{pmatrix} -993\pi^2 \sin t + 252\pi t \sin t - 288t^2 \sin t \\ 1305\pi \sin t - 720t \sin t + 150\pi \sin 5t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \theta_2(\varepsilon)],$$

$$u_2(t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2592\pi} \begin{pmatrix} -441\pi \cos t - 432t \cos t - 174\pi \cos 5t + 688 \sin t \\ 688 \cos t + 231\pi^2 \cos t - 36\pi t \cos t - 288t^2 \cos t \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{2592\pi} \begin{pmatrix} 231\pi^2 \sin t - 36\pi t \sin t - 288t^2 \sin t \\ 441\pi \sin t + 432t \sin t + 150\pi \sin 5t \end{pmatrix}, \quad t \in [\theta_2(\varepsilon), 2\pi].$$

На третьому кроці одержуємо

$$w_3(t, \varepsilon) := w_0(t, c_0^*) + u_1(t, \varepsilon) + u_2(t, \varepsilon) + u_3(t, \varepsilon),$$

$$\theta_3(\varepsilon) = \theta_0^* + \xi_1(\varepsilon) + \xi_2(\varepsilon) + \xi_3(\varepsilon), \quad \xi_3(\varepsilon) = \varepsilon^3 \theta_0^*,$$

де

$$u_3(t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon^3}{5184\pi} \left( \begin{aligned} &211\pi \cos t + 3328t \cos t - 3972\pi^2 t \cos t + 504\pi t^2 \cos t \\ &5472\pi \cos t - 1728t^2 \cos t - 211\pi \sin t - 3328t \sin t \end{aligned} \right)$$

$$+ \frac{\varepsilon^3}{5184\pi} \left( \begin{aligned} &-384t^3 \cos t - 211\pi \cos 5t + 5472\pi t \sin t - 1728t^2 \sin t \\ &3972\pi^2 t \sin t - 504\pi t^2 \sin t + 384t^3 \sin t + 275\pi \sin 5t \end{aligned} \right), \quad t \in [0, \theta_3(\varepsilon)],$$

$$u_3(t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon^3}{5184\pi} \left( \begin{aligned} &4141\pi \cos t - 1512\pi^3 \cos t - 2176t \cos t - 924\pi^2 t \cos t \\ &5760\pi^2 \cos t - 1728\pi t \cos t - 576t^2 \cos t - 4141\pi \sin t \end{aligned} \right)$$

$$+ \frac{\varepsilon^3}{5184\pi} \left( \begin{aligned} &72\pi t^2 \cos t + 384t^3 \cos t + 5760\pi^2 \sin t - 1728\pi t \sin t \\ &1512\pi^3 \sin t + 2176t \sin t + 924\pi^2 t \sin t - 72\pi t^2 \sin t \end{aligned} \right)$$

$$+ \frac{\varepsilon^3}{5184\pi} \left( \begin{aligned} &-576t^2 \sin t + 211\pi \cos 5t \\ &-384t^3 \sin t - 275\pi \sin 5t \end{aligned} \right), \quad t \in [\theta_3(\varepsilon), 2\pi].$$

Для отриманих наближень існують константи

$$0 < \gamma := 0,997 < 1, \quad 0 < \delta := 0,997 < 1,$$

для яких виконуються нерівності

$$\|u_1(t, \varepsilon)\| \leq \gamma \|w_0(t, c_0^*)\|, \quad \|u_{k+1}(t, \varepsilon)\| \leq \gamma \|u_k(t, \varepsilon)\|,$$

$$|\xi_1(\varepsilon)| \leq \delta |\theta_0^*|, \quad |\xi_{k+1}(\varepsilon)| \leq \delta |\xi_k(\varepsilon)|, \quad k = 0, 1, 2,$$

що свідчить про практичну збіжність отриманих наближень до розв'язку автономної періодичної крайової задачі (5) із перемиканнями на проміжку  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ ,  $0 \leq \varepsilon_0 \approx 0,233\,054$ . Точність знайдених наближень до розв'язку автономної періодичної крайової задачі (5) із перемиканнями визначають нев'язки

$$\Delta_k(\varepsilon) := \|w'_k(t, \varepsilon) - \omega^2(\varepsilon) A w_k(t, \varepsilon) - f(t)\|, \quad k = 1, 2, 3.$$

Зокрема,

$$\Delta_0(0,1) \approx 0,0472\,958, \quad \Delta_1(0,1) \approx 0,00\,628\,188,$$

$$\Delta_2(0,1) \approx 0,00\,267\,313, \quad \Delta_3(0,1) \approx 0,000\,839\,959,$$

$$\Delta_0(0,01) \approx 0,00\,452\,688, \quad \Delta_1(0,01) \approx 0,0000\,651\,329,$$

$$\Delta_2(0,01) \approx 2,56\,024 \times 10^{-6}, \quad \Delta_3(0,01) \approx 8,10\,376 \times 10^{-8}.$$

Умова розв'язності автономної нелінійної крайової задачі (1) із перемиканнями

$$P_{Q_r^*} \mathcal{L} K[Z(z(s, \varepsilon), \varepsilon); \tau(\varepsilon)](\cdot) = 0$$

приводить до рівняння

$$F_0(c_0, \tau_0) := P_{Q_r^*} \mathcal{L} K[Z(z_0(s, c_0), 0); \tau_0](\cdot) = 0. \quad (8)$$

Необхідні умови існування розв'язку автономної нелінійної крайової задачі (1) із перемиканнями у критичному випадку визначає така лема.

**Лема.** Припустимо, що для породжуючої крайової задачі (2) трапляється критичний випадок. При цьому породжуюча задача (2) має  $r$ -параметричну сім'ю розв'язків

$$z_0(t, c_0) = X_r(t) c_0, \quad c_0 \in \mathbb{R}^r.$$

Припустимо, що автономна нелінійна крайова задача (1) із перемиканнями у нефіксовані моменти часу в околі породжуючого розв'язку  $z_0(t, c_0)$  має розв'язок

$$z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}\{[a, b] \setminus \{\tau(\varepsilon)\}_I\}, \quad z(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0].$$

За цих умов виконується рівність (8).

Рівняння (8) будемо далі називати рівнянням для породжуючих констант крайової задачі (1) із перемиканнями у критичному випадку. Припустимо, що рівняння для породжуючих констант (8) крайової задачі (1) із перемиканнями має дійсні корені. Фіксуємо один із дійсних розв'язків  $c_0^* \in \mathbb{R}^r$ ,  $\tau_0^* \in \mathbb{R}$  рівняння (8), одержуємо задачу про побудову розв'язку нелінійної крайової задачі (1) у малому околі розв'язку

$$z_0(t, c_0^*) = X_r(t) c_0^*, \quad c_0^* \in \mathbb{R}^r,$$

породжуючої крайової задачі (2).

**3. Знаходження наближень до розв'язку крайової задачі з перемиканнями у нефіксовані моменти часу.** Традиційною умовою розв'язності крайової задачі (1) у малому околі розв'язку породжуючої задачі є вимога [1, 14]

$$P_{B_0^*} P_{Q_d^*} \neq 0, \quad B_0 := F'_{\check{c}_0}(c_0^*, \tau_0^*) \in \mathbb{R}^{d \times (r+1)}, \quad \check{c}_0 := (c_0 \quad \tau_0)^*, \quad (9)$$

де  $P_{B_0^*} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{N}(B_0^*)$  — матриця-ортопроектор [1, 14].

Розв'язок крайової задачі (1) із перемиканнями шукаємо у вигляді

$$z(t, \varepsilon) := z_0(t, c_0^*) + u_1(t, \varepsilon) + \dots + u_k(t, \varepsilon) + \dots,$$

$$\tau(\varepsilon) = \tau_0^* + \xi_1(\varepsilon) + \xi_2(\varepsilon) + \dots + \xi_k(\varepsilon) + \dots$$

Нелінійна вектор-функція  $Z(z(t, \varepsilon), \varepsilon)$  аналітична за невідомою  $z(t, \varepsilon)$  у малому околі розв'язку породжуючої крайової задачі (2) та константи  $\tau_0^*$ , тому у зазначеному околі існує розклад [17]

$$Z(z(t, \varepsilon), \varepsilon) = Z_0(z_0(t, c_0^*), \varepsilon) + Z_1(z_0(t, c_0^*), u_1(s, \varepsilon), \varepsilon) \\ + Z_2(z_0(t, c_0^*), u_1(s, \varepsilon), u_2(s, \varepsilon), \varepsilon) + \dots$$

Перше наближення до розв'язку нелінійної крайової задачі (1) у критичному випадку

$$z_1(t, \varepsilon) = z_0(t, c_0^*) + u_1(t, \varepsilon), \quad \tau_1(\varepsilon) = \tau_0^* + \xi_1(\varepsilon), \\ u_1(t, \varepsilon) = X_r(t)c_1(\varepsilon) + \varepsilon G[Z_0(z_0(s, c_0^*), z_0'(s, c_0^*), \varepsilon); \tau_0^*](t)$$

визначає розв'язок нелінійної крайової задачі першого наближення

$$u_1'(t, \varepsilon) = A u_1(t, \varepsilon) + \varepsilon Z_0(z_0(t, c_0^*), \varepsilon), \quad \mathcal{L} u_1(\cdot, \varepsilon) = 0.$$

Ключова при дослідженні крайової задачі (1) матриця  $B_0$  набуває вигляду

$$B_0 = P_{Q_r^*} \ell K[\mathcal{A}_0(s)X_r(s); 1](\cdot),$$

де

$$\mathcal{A}_0(t) = \left. \frac{\partial Z(z(t, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial z(t, \varepsilon)} \right|_{\substack{z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_0^*), \\ \varepsilon = 0}},$$

—  $(r \times r)$ -вимірна матриця. Друге наближення до розв'язку нелінійної крайової задачі (1) у критичному випадку

$$z_2(t, \varepsilon) := z_0(t, c_0^*) + u_1(t, \varepsilon) + u_2(t, \varepsilon), \quad \tau_2(\varepsilon) = \tau_0^* + \xi_1(\varepsilon) + \xi_2(\varepsilon)$$

визначає розв'язок нелінійної крайової задачі другого наближення

$$u_2'(t, \varepsilon) = A u_2(t, \varepsilon) + \varepsilon Z_1(z_0(t, c_0^*), u_1(t, \varepsilon), \varepsilon), \quad \ell u_2(\cdot, \varepsilon) = 0.$$

Умова розв'язності крайової задачі другого наближення

$$F_1(c_1(\varepsilon), \xi_1(\varepsilon)) := P_{Q_d^*} \mathcal{L} K[Z_1(z_0(s, c_0^*), u_1(s, \varepsilon), z_0'(s, c_0^*), u_1(s, \varepsilon), \varepsilon); \xi_1(\varepsilon)](\cdot) = 0$$

є лінійними рівняннями

$$F_1(c_1(\varepsilon), \xi_1(\varepsilon)) = B_0 \check{c}_1(\varepsilon) + \gamma_1(\varepsilon) = 0, \quad \check{c}_1(\varepsilon) := (c_1(\varepsilon) \quad \xi_1(\varepsilon))^*,$$

принаймні однозначно розв'язним у випадку (9); тут  $\gamma_1(\varepsilon) := F_1(\check{c}_1(\varepsilon)) - B_0 \check{c}_1(\varepsilon)$ . Дійсно, позначимо вектор-функції [17–19]

$$v(t, \varepsilon, \mu) := z_0(t, c_0^*) + \mu u_1(t, \varepsilon) + \dots + \mu^k u_k(t, \varepsilon) + \dots,$$

$$g(\varepsilon, \mu) := \tau_0^* + \mu \xi_1(\varepsilon) + \mu^2 \xi_2(\varepsilon) + \dots + \mu^k \xi_k(\varepsilon) + \dots;$$

при цьому

$$\begin{aligned}
F_1(c_1(\varepsilon), \xi_1(\varepsilon)) &= P_{Q_d^*} \mathcal{L}K[Z_1(z_0(s, c_0^*), u_1(s, \varepsilon), \varepsilon); \xi_1(\varepsilon)](\cdot) \\
&= P_{Q_d^*} \mathcal{L}K[Z'_\mu(v(t, \varepsilon, \mu), \varepsilon); g'_\mu(\varepsilon, \mu)](\cdot) \Big|_{\mu=0} \\
&= P_{Q_d^*} \mathcal{L}K[A_0(s)u_1(s, \varepsilon); \xi_1(\varepsilon)](\cdot).
\end{aligned}$$

Отже,

$$B_0 := F'_{\check{c}_1(\varepsilon)}(\check{c}_1(\varepsilon)) \in \mathbb{R}^{d \times (r+1)}.$$

Таким чином, за умови (9) отримуємо принаймні один розв'язок крайової задачі першого наближення

$$\begin{aligned}
z_1(t, \varepsilon) &:= z_0(t, c_0^*) + u_1(t, \varepsilon), \quad \tau_1(\varepsilon) = \tau_0^* + \xi_1(\varepsilon), \quad \check{c}_1(\varepsilon) = -B_0^+ \gamma_1(\varepsilon), \\
u_1(t, \varepsilon) &= X_r(t)c_1(\varepsilon) + \varepsilon G[Z_1(z_0(s, c_0^*), u'_1(s, \varepsilon), \varepsilon); \xi_1(\varepsilon)](t).
\end{aligned}$$

Умови розв'язності крайових задач наступних наближень

$$F_j(\check{c}_j(\varepsilon)) := P_{Q_d^*} \ell K[Z_j(z_0(s, c_0^*), u_1(t, \varepsilon), \dots, u_j(s, \varepsilon), \xi_j(\varepsilon), \varepsilon)](\cdot) = 0$$

являють собою лінійні рівняння

$$F_j(\check{c}_j(\varepsilon)) = B_0 \check{c}_j(\varepsilon) + \gamma_j(\varepsilon) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

де

$$B_0 = F'(\check{c}_j(\varepsilon)), \quad \gamma_j(\varepsilon) := F(\check{c}_j(\varepsilon)) - B_0 \check{c}_j(\varepsilon), \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

У випадку (9) останнє рівняння принаймні однозначно розв'язне. Послідовність наближень до розв'язку нелінійної крайової задачі (1)) у критичному випадку визначає ітераційна схема

$$\begin{aligned}
z_1(t, \varepsilon) &= z_0(t, c_0^*) + u_1(t, \varepsilon), \quad \tau_1(\varepsilon) = \tau_0^* + \xi_1(\varepsilon), \quad \check{c}_1(\varepsilon) = -B_0^+ \gamma_1(\varepsilon), \\
u_1(t, \varepsilon) &= X_r(t)c_1(\varepsilon) + \varepsilon G[Z_1(z_0(s, c_0^*), u'_1(s, \varepsilon), \varepsilon); \xi_1(\varepsilon)](t), \\
z_2(t, \varepsilon) &= z_0(t, c_0^*) + u_1(t, \varepsilon) + u_2(t, \varepsilon), \quad \tau_2(\varepsilon) = \tau_0^* + \xi_1(\varepsilon) + \xi_2(\varepsilon), \\
u_2(t, \varepsilon) &= X_r(t)c_2(\varepsilon) + \varepsilon G[Z_2(z_0(s, c_0^*), u_1(s, \varepsilon), u_2(s, \varepsilon), \varepsilon); \xi_2(\varepsilon)](t), \quad (10) \\
z_{k+1}(t, \varepsilon) &= z_0(t, c_0^*) + u_1(t, \varepsilon) + \dots + u_{k+1}(t, \varepsilon), \\
\tau_{k+1}(\varepsilon) &= \tau_0^* + \xi_1(\varepsilon) + \dots + \xi_{k+1}(\varepsilon), \\
u_{k+1}(t, \varepsilon) &= X_r(t)c_{k+1}(\varepsilon) \\
&\quad + \varepsilon G[Z_k(z_0(s, c_0^*), u_1(s, \varepsilon), \dots, u_k(s, \varepsilon), \varepsilon); \xi_k(\varepsilon)](t), \quad k = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

**Теорема.** Припустимо, що для породжуючої крайової задачі (2) має місце критичний випадок. При цьому породжуюча задача (2) має сім'ю розв'язків

$$z_0(t, c_0) = X_r(t)c_0, \quad c_0 \in \mathbb{R}^r.$$

У випадку (9) у малому околі породжуючого розв'язку  $z_0(t, c_0^*)$  і константи  $\tau_0^*$  задача (1) із перемиканнями має принаймні один розв'язок. Послідовність наближень до розв'язку

$$z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}\{[a, b] \setminus \{\tau(\varepsilon)\}_I\}, \quad z(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

автономної крайової задачі (1) із перемиканнями визначено ітераційною схемою (10). Якщо існують константи  $0 < \gamma < 1$  і  $0 < \delta < 1$ , для яких виконуються нерівності

$$\begin{aligned} \|u_1(t, \varepsilon)\| &\leq \gamma \|z_0(t, c_0^*)\|, & \|u_{k+1}(t, \varepsilon)\| &\leq \gamma \|u_k(t, \varepsilon)\|, \\ |\xi_1(\varepsilon)| &\leq \delta |\tau_0^*|, & |\xi_{k+1}(\varepsilon)| &\leq \delta |x_{i_k}(\varepsilon)|, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (11)$$

то ітераційна схема (10) збігається до розв'язку автономної крайової задачі (1) із перемиканнями.

Отримана умова збіжності (11) ітераційної схеми (10) дозволяє оцінити проміжок значень малого параметра  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ ,  $0 \leq \varepsilon_* \leq \varepsilon_0$ , для яких зберігається збіжність ітераційної схеми (10), проте відрізняється від аналогічних оцінок [20, 21].

Частинним випадком автономної крайової задачі (1) із перемиканнями є періодична задача для рівняння, яке моделює неізотермічну хімічну реакцію [3, 11]. Специфікою таких моделей є той факт, що за відсутності перемикань рівняння, яке моделює неізотермічну хімічну реакцію, зазвичай має єдиний розв'язок, який є положенням рівноваги [3]. Зі свого боку, поведінка розв'язків наступного рівняння з перемиканнями у нефіксовані моменти часу добре відображає поведінку періодичного розв'язку рівняння, яке моделює неізотермічну хімічну реакцію, дослідженого у статтях [3, 11].

**Приклад 3.** Продемонструємо ефективність доведеної теореми на прикладі задачі про знаходження  $2\pi$ -періодичних розв'язків

$$z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^2\{[0, 2\pi] \setminus \{\tau(\varepsilon)\}_I\}, \quad z(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

нелінійного рівняння з перемиканнями

$$\begin{aligned} z''(t, \varepsilon) + \omega(\varepsilon) z(t, \varepsilon) &= \varepsilon z^3(t, \varepsilon), \\ z(0, \varepsilon) - z(2\pi, \varepsilon) &= 0, \quad z(\tau(\varepsilon), \varepsilon) - z(\tau(\varepsilon), \varepsilon) = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

неперервного у точці  $t = \tau(\varepsilon)$ . У точці  $t = \tau(\varepsilon)$ :  $0 < \tau(\varepsilon) < 2\pi$ ,  $\tau(0) := \tau_0$  розв'язок крайової задачі (12), можливо, зазнає обмеженого розриву першої похідної. Розв'язок крайової задачі (12) із перемиканнями шукаємо у малому околі розв'язку

$$z_0(t) \in \mathbb{C}\{[0, 2\pi] \setminus \{\tau_0\}_I\}$$

породжуючої крайової задачі. Тут

$$z(t, \varepsilon) := \begin{cases} x(t, \varepsilon), & t \in [0, \tau(\varepsilon)[, \\ y(t, \varepsilon), & t \in [\tau(\varepsilon), 2\pi], \end{cases} \quad w(\varepsilon) := \begin{cases} 1 - \varepsilon, & t \in [0, \tau(\varepsilon)[, \\ 1 + \varepsilon, & t \in [\tau(\varepsilon), 2\pi]. \end{cases}$$

Для породжуючої крайової задачі (2) є критичний випадок. Породжуюча задача (2) має сім'ю розв'язків

$$z_0(t, c_0) = X_r(t) c_0, \quad X_r(t) := \cos t, \quad c_0 \in \mathbb{R}.$$

Рівняння (8) для породжуючих констант періодичної задачі для нелінійного рівняння (12) із перемикальниками набуває вигляду

$$F_0(c_0, \tau_0) = \frac{c_0 \sin \tau_0}{4} [\pi(4 + 3c_0^2) - 4\tau_0] = 0,$$

дійсний корінь

$$c_0^* = 1, \quad \tau_0^* = \pi$$

для якого

$$B_0 = -\frac{3\pi}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{B_0^*} = 0.$$

Використовуючи ітераційну схему (10), на першому кроці отримуємо

$$z_1(t, \varepsilon) = z_0(t, c_0^*) + u_1(t, \varepsilon), \quad t \in [0, 2\pi],$$

$$u_1(t, \varepsilon) = X_r(t)c_1(\varepsilon) + \varepsilon G[Z_1(z_0(s, c_0^*), u_1(s, \varepsilon), z_0'(s, c_0^*), u_1'(s, \varepsilon), \varepsilon); \xi_1(\varepsilon)](t);$$

при цьому

$$u_1(t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{96}(11 \cos t - 3 \cos 3t - 12t \sin t), \quad t \in [0, \tau_1(\varepsilon)], \quad \xi_1(\varepsilon) = -\frac{\varepsilon \pi}{2},$$

$$u_1(t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{96}(11 \cos t - 3 \cos 3t - 168\pi \sin t + 84t \sin t), \quad t \in [\tau_1(\varepsilon), 2\pi].$$

На другому кроці маємо

$$z_2(t, \varepsilon) = z_0(t, c_0^*) + u_1(t, \varepsilon) + u_2(t, \varepsilon), \quad \xi_2(\varepsilon) = -\frac{3\varepsilon^2 \pi}{8},$$

де

$$u_2(t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{3072}(-3 \cos t - 24t^2 \cos t + 3 \cos 5t + 208t \sin t + 36t \sin 3t), \quad t \in [0, \tau_2(\varepsilon)].$$

Крім того,

$$\begin{aligned} u_2(t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{3072} & \left( 189 \cos t - 4704 \pi^2 \cos t + 4704 t \cos t \right. \\ & - 1176 t^2 \cos t - 192 \cos 3t + 3 \cos 5t - 3424 \pi \sin t \\ & \left. - \pi \sin t + 1712 t \sin t + 504 \pi \sin 3t - 252 t \sin 3t \right), \quad t \in [\tau_2(\varepsilon), 2\pi]. \end{aligned}$$

Використовуючи ітераційну схему (10), на третьому кроці одержуємо

$$z_3(t, \varepsilon) = z_0(t, c_0^*) + u_1(t, \varepsilon) + u_2(t, \varepsilon) + u_3(t, \varepsilon), \quad \xi_3(\varepsilon) = 0,$$

де

$$u_3(t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon^3}{98\,304} (513 \cos t + 920 t^2 \cos t - 502 \cos 3t + 216 t^2 \cos 3t - 8 \cos 5t \\ - 3 \cos 7t + 280 t \sin t + 32 t^3 \sin t - 756 t \sin 3t - 60 t \sin 5t), \quad t \in [0, \tau_3(\varepsilon)].$$

До того ж,

$$u_3(t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon^3}{98\,304} (10\,881 \cos t - 174\,496 \pi^2 \cos t + 174\,496 \pi t \cos t \\ - 43\,624 t^2 \cos t - 11\,254 \cos 3t + 42\,336 \pi^2 \cos 3t - 42\,336 \pi t \cos 3t \\ + 10\,584 t^2 \cos 3t + 376 \cos 5t - 3 \cos 7t - 104\,816 \pi \sin t + 87\,808 \pi^3 \sin t \\ + 52\,408 t \sin t - 131\,712 \pi^2 t \sin t + 65\,856 \pi t^2 \sin t - 10\,976 t^3 \sin t \\ + 40\,680 \pi \sin 3t - 20\,340 t \sin 3t - 840 \pi \sin 5t + 420 t \sin 5t), \quad t \in [\tau_3(\varepsilon), 2\pi].$$

Відзначимо, що для будь-яких значень малого параметра  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ ,  $\varepsilon_0 \approx 1,32\,933$ , виконуються нерівності (11), які свідчать про практичну збіжність отриманих наближень до розв'язку періодичної задачі для нелінійного рівняння (12); тут  $\gamma := 0,997 < 1$ . Точність знайдених наближень до розв'язку періодичної задачі для нелінійного рівняння (12) із перемиканнями визначають нев'язки

$$\Delta_k(\varepsilon) := \|z_k''(t, \varepsilon) + \omega(\varepsilon) z_k(t, \varepsilon) - \varepsilon z_k^3(t, \varepsilon)\|_{\mathbb{C}[0, 2\pi]}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Зокрема,

$$\begin{aligned} \Delta_0(0,1) &\approx 0,2, & \Delta_1(0,1) &\approx 0,0320\,091, \\ \Delta_2(0,1) &\approx 0,0154\,934, & \Delta_3(0,1) &\approx 0,00266\,162, \\ \Delta_0(0,01) &\approx 0,02, & \Delta_1(0,01) &\approx 0,000\,349\,490, \\ \Delta_2(0,01) &\approx 0,0000\,151\,745, & \Delta_3(0,01) &\approx 1,61\,195 \times 10^{-7}. \end{aligned}$$

Наведений приклад періодичної задачі для нелінійного рівняння (12) демонструє, що завдяки перемиканню автономна крайова задача стає розв'язною на проміжку фіксованої довжини на відміну від аналогічних автономних крайових задач без перемикань, для яких, взагалі кажучи, правий кінець  $T(\varepsilon)$  проміжку  $[0, T(\varepsilon)]$ , на якому визначено шуканий розв'язок нелінійної крайової задачі для системи (1), невідомий і підлягає визначенню при побудові розв'язку [9, 10, 19, 21].

Отримані у статті результати дослідження умов розв'язності та побудови розв'язків наближень до розв'язку крайової задачі (1) узагальнюють результати дослідження умов розв'язності та побудови розв'язків крайових задач із імпульсним впливом у фіксовані моменти часу [1, 2, 5, 6, 22 – 24] і, зокрема, зі зосередженим запізненням [25, 26]. Одержані у цій роботі результати можуть бути перенесені на матричні крайові задачі [27, 28].

Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів. Усі необхідні дані містяться в статті. Опубліковані в цій статті результати отримані Катериною Шевцовою самостійно. Постановку задач, розв'язаних у роботі, перевірку й обговорення результатів здійснювали Сергій Чуйко та Євген Сілін.

Дослідження Сергія Чуйка частково підтримано грантом у рамках двосторонньої угоди між Академіями наук Австрії і НАН України.

Дослідження Катерини Шевцової частково підтримано фондом Simons Foundation (Award 1160640, Presidential Discretionary-Ukraine Support Grants), а також стипендією НАН України для молодих учених.

### Література

1. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. Second edition*, De Gruyter, Berlin, Boston (2016).
2. A. M. Samoilenko, N. A. Perestyuk, *Impulsive differential equations*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ (1995).
3. P. Benner, S. Chuiko, A. Zuyev, *A periodic boundary value problem with switchings under nonlinear perturbations*, Bound. Value Probl., **50**, 1 – 12 (2023).
4. S. Šchwabik, *Differential equations with interface conditions*, Časopis Pěst. Mat., **105**, 391 – 410 (1980).
5. S. M. Chuiko, *A generalized Green operator for a boundary value problem with impulse action*, Differ. Equat., **37**, № 8, 1189 – 1193 (2001).
6. S. M. Chuiko, *A Green operator for boundary value problems with an impulsive effect*, Dokl. Math., **64**, № 1, 41 – 43 (2001).
7. С. М. Чуйко, *Метод наименьших квадратов в теории некорректно поставленных линейных краевых задач с импульсным воздействием*, Укр. мат. журн., **62**, № 5, 690 – 697 (2010); **English translation**: Ukr. Math. J., **62**, № 5, 794 – 803 (2010).
8. С. М. Чуйко, М. В. Дзюба, *Матрична диференціально-алгебраїчна крайова задача з імпульсною дією*, Нелін. коливання, **20**, № 4, 564 – 573 (2017); **English translation**: J. Math. Sci. (N.Y.), **238**, № 3, 333 – 343 (2019).
9. I. G. Malkin, *Some problems in the theory of nonlinear oscillations*, US Atomic Energy Commission, Technical Information Service, Maryland (1959).
10. A. Boichuk, S. Chuiko, *Autonomous weakly nonlinear boundary-value problems in critical cases*, Differ. Equat., № 10, 1353 – 1358 (1992).
11. P. Benner, A. Seidel-Morgenstern, A. Zuyev, *Periodic switching strategies for an isoperimetric control problem with application to nonlinear chemical reactions*, Appl. Math. Model., **69**, 287 – 300 (2019).
12. P. Benner, С. М. Чуйко, О. Л. Зуєв, *Ітераційні схеми для періодичних крайових задач із перемиканнями*, Нелін. коливання, **26**, № 1, 6 – 21 (2023); **English translation**: J. Math. Sci. (N.Y.), **278**, № 6, 932 – 949 (2024).
13. Е. А. Гребеников, Ю. А. Рябов, *Конструктивные методы анализа нелинейных систем*, Наука, Москва (1979).
14. О. А. Бойчук, С. М. Чуйко, *Конструктивні методи аналізу крайових задач теорії нелінійних коливань*, Наук. думка, Київ (2023).
15. В. А. Якубович, В. М. Старжинский, *Параметрический резонанс в линейных системах*, Наука, Москва (1987).
16. С. М. Чуйко, *Нелінійна нетерова крайова задача у випадку параметричного резонансу*, Нелін. коливання, **17**, № 1, 137 – 148 (2014); **English translation**: J. Math. Sci. (N.Y.), **205**, № 6, 859 – 870 (2015).
17. S. M. Chuiko, O. S. Chuiko, M. V. Popov, *Adomian decomposition method in the theory of nonlinear boundary-value problems*, J. Math. Sci., **277**, № 2, 338 – 351 (2023).
18. G. Adomian, *A review of the decomposition method in applied mathematics*, J. Math. Anal. Appl., **135**, 501 – 544 (1988).

19. О. Бойчук, С. Чуйко, Д. Д'яченко, *Метод декомпозиції Адомаля в теорії нелінійних автономних крайових задач*, Укр. мат. журн., **75**, № 8, 1053–1067 (2023); **English translation:** Ukr. Math. J., **75**, № 8, 1203–1218 (2023).
20. О. Б. Лыкова, А. А. Бойчук, *Построение периодических решений нелинейных систем в критических случаях*, Укр. мат. журн., **40**, № 1, 62–69 (1988); **English translation:** Ukr. Math. J., **40**, № 1, 51–58 (1988).
21. С. М. Чуйко, *Область збіжності ітераційної процедури для автономної крайової задачі*, Нелін. коливання, **9**, № 3, 416–432 (2006); **English translation:** Nonlinear Oscil. (N. Y.), **9**, № 3, 405–422 (2006).
22. R. Conti, *On ordinary differential equation with interface conditions*, J. Differential Equations, **4**, № 1, 4–11 (1968).
23. С. М. Чуйко, *Метод наименьших квадратов в теории некорректно поставленных линейных краевых задач с импульсным воздействием*, Укр. мат. журн., **62**, № 5, 690–697 (2010); **English translation:** Ukr. Math. J., **62**, № 5, 794–803 (2010).
24. О. А. Бойчук, С. М. Чуйко, *Узагальнений оператор Гріна імпульсної крайової задачі з переключеннями*, Нелін. коливання, **10**, № 1, 51–65 (2007); **English translation:** Nonlinear Oscil. (N.Y.), **10**, № 1, 46–61 (2007).
25. С. М. Чуйко, Д. В. Сисоев, *Матричные периодические краевые задачи с сосредоточенным запаздыванием*, Нелін. коливання, **21**, № 2, 273–283 (2018); **English translation:** J. Math. Sci. (N.Y.), **243**, № 2, 326–337 (2019).
26. S. M. Chuiko, *On the solution of a linear Noetherian boundary-value problem for a differential-algebraic system with concentrated delay by the method of least squares*, J. Math. Sci. (N.Y.), **246**, № 5, 622–630 (2020).
27. А. М. Самойленко, О. А. Бойчук, С. А. Кривошея, *Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма з виродженим ядром*, Укр. мат. журн., **48**, № 11, 1576–1579 (1996); **English translation:** Ukr. Math. J., **48**, № 11, 1785–1789 (1996).
28. S. M. Chuiko, *Nonlinear matrix differential-algebraic boundary value problem*, Lobachevskii J. Math., **38**, № 2, 236–244 (2017).

Одержано 18.02.24,  
після доопрацювання — 06.05.24